বীজগণিত

নৃপেন্দ্রনাথ সেন

Approved by the Board of Secondary Education, West Bengal
Vide Notification No. Syl./6t/54, Dated 27. 11. 54.
Published in the Calcutta Gazette, Dated 9. 12. 54.

বীজগণিত

[নূতন সিলেবাস-অনুসারে ৭ম-১০ম শ্রেণীর জন্য লিখিত]

কলিকাতা-বিশ্ববিদ্যালয়ের গণিতশাস্ত্রের অধ্যাপক
ডক্টর নৃপেন্দ্রনাথ সেন, ডি. এস্.-সি., পি. আর. এস্.
প্রণীত

চক্রবর্ত্তী, চাটার্জ্জি এণ্ড কোং লিমিটেড্
পুস্তকবিক্রেতা ও প্রকাশক
১৫নং কলেজ স্কোয়ার, কলিকাতা-১২।
১৯৫৬

প্রকাশক—
শ্রীবিনোদলাল চক্রবর্ত্তী, এম্. এস্-সি.
চক্রবর্ত্তী, চাটার্জ্জি এণ্ড কোং লিমিটেড
১৫নং কলেজ স্কোয়ার, কলিকাতা-১২।

প্রিণ্টার—
শ্রীবরেন্দ্রকৃষ্ণ মুখোপাধ্যায়
দেশবাণী-মুদ্রণিকা
১৪নং ডি. এল. রায় ষ্ট্রীট,
কলিকাতা-৬।

ভূমিকা

বীজগণিতের বর্ত্তমান সংস্করণ পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা-পর্ষতের নূতন পাঠ্যতালিকা (syllabus)-অনুসারে লিখিত হইয়াছে। পাটীগণিত হইতে হঠাৎ বীজগণিতে উপনীত হইয়া শিক্ষার্থীরা যে অসুবিধা ভোগ করিয়া থাকে, সেইদিকে সম্যক্ দৃষ্টি রাখিয়াই গ্রন্থটি রচিত হইয়াছে। সহজ দৃষ্টান্ত দ্বারা এবং প্রধানতঃ মৌখিক অঙ্কের সাহায্যে বীজগণিত-শিক্ষার প্রাথমিক বিষয়বস্তুগুলি বুঝাইবার চেষ্টা করা হইয়াছে।

পুস্তকের মধ্যে বিভিন্ন-বিষয়ক বহু অঙ্ক প্রদত্ত হইয়াছে। শুধু ভারতীয় বিশ্ববিদ্যালয় এবং বোর্ড হইতেই নয়, অক্স্‌ফোর্ড এবং কেম্‌ব্রিজ প্রভৃতি বিদেশীয় বোর্ডগুলির প্রশ্ন হইতেও শিক্ষার্থিগণের পক্ষে প্রয়োজনীয় প্রশ্ন সংগ্রহ করিয়া পুস্তকমধ্যে সন্নিবিষ্ট করিয়াছি। প্রশ্নমালাগুলিতে দুরূহতার অনুপাতে অঙ্কগুলির ক্রমিক সমাবেশও পুস্তকখানির অন্যতম বৈশিষ্ট্য। বস্তুতঃ পুস্তকখানিতে ছাত্রগণের বীজগণিত-শিক্ষা যতদূর সম্ভব সহজ ও আনন্দদায়ক করিবার চেষ্টা করিয়াছি। এখন গ্রন্থখানি দ্বারা ছাত্রগণের বীজগণিত-পাঠ সুগম হইলেই শ্রম সফল মনে করিব।

গণিত-অধ্যাপনায় যশস্বী এবং বিশিষ্ট শিক্ষাব্রতী বড়িশা হাইস্কুলের ৺বিজয়কৃষ্ণ গুপ্ত, হুগলী মহসীন কলেজের অধ্যাপক শ্রীগোবিন্দদেব ভট্টাচার্য্য, রংপুর নর্ম্যাল স্কুলের শ্রীঅক্ষয়কুমার রায়, বর্দ্ধমান জেলার স্কুলসমূহের ডিষ্ট্রিক্ট ইন্‌স্পেক্টর শ্রীঅনিলকুমার গুপ্ত, ভবানীপুর মিত্র ইন্‌ষ্টিটিউসনের ৺বীরেন্দ্রনাথ রায়, নেতাজী নগর হাইস্কুলের শ্রীতেজেন্দ্রনাথ দাস, আসানসোল রামকৃষ্ণ মিশন হাইস্কুলের শ্রীশক্তিশরণ সিংহ, চেতলা বয়েজ স্কুলের শ্রীসুধীরকুমার গাঙ্গুলী, পদ্মপুকুর ইন্‌ষ্টিটিউসনের শ্রীঅবনীমোহন চট্টোপাধ্যায়, বেহালা হাইস্কুলের শ্রীপ্রফুল্ল দাসগুপ্ত এবং অপর যাঁহারা এই পুস্তক-প্রণয়নে আমাকে নানাভাবে সাহায্য করিয়াছেন, তাঁহাদের ঋণ আমি কৃতজ্ঞ-অন্তরে স্মরণ করিতেছি।

শ্রীনৃপেন্দ্রনাথ সেন।

SYLLABUS

CLASS VII

1. The use of letters as symbols to generalise simple arithmetical problems (without formally introducing equations) and formulæ like area = length × breadth, i.e., A = LB.

2. The four simple rules involving positive quantities only.

3. Positive and negative quantities through graphical illustrations.

4. The four simple rules involving both positive and negative quantities.

5. The use of brackets.

6. The following formulæ and their easy applications :—

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

7. Solution of simple problems leading to simple equations.

8. Bar graphs from numerical data based on activities and experiences of daily life of the pupils.

CLASS VIII

1. Revision of previous work.

2. Advanced types of multiplication and division.

3. The following formulæ and their applications :—

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=a^3-b^3-3ab(a-b).$$

4. Simple factors ; factors of the following :—

$$a^2-b^2,\ a^3+b^3,\ a^3-b^3.$$

5. Factors of a quadratic expression by breaking the middle term.

6. H. C. F. and L. C. M. of simple expressions by factorisation.

7. Easy fractions.

8. Simple equations.

9. Problems involving simple equations.

10. *a*) Column graphs with practical illustrations.

(*b*) Axes of reference ; Plotting of points and tabulated data.

CLASS IX

1. Revision of previous work.

2. Harder factors.

3. Harder cases of H. C. F. and L. C. M.

4. Harder fractions.

5. Fuller treatment of simple equations and easy simultaneous equations involving two unknowns.

6. Problems leading to equations, simple and simultaneous.

7. Graphs of simple equations.

CLASS X

1. Revision of previous work.

2. The remainder-theorem ; divisibility (factor-theorem).

3. Easy ratio and proportion.

4. Laws of Indices (formal proofs of fractional and negative indices not being required). Only simple examples are to be taught.

5. Extraction of square root.

6. Graphical solution of simultaneous equations of the first degree.

সূচীপত্র

প্রথম খণ্ড

দ্বিতীয় খণ্ড

বীজগণিত

—০ঃ*ঃ০—

প্রথম অধ্যায়

সংখ্যা এবং ক্রিয়াসূচক চিহ্ন বা প্রতীক (Symbols) : প্রতীকের ব্যবহার ঃ পরিবর্ত্ত (Substitution)

1. বীজগণিত (Algebra)* এবং ইহার সংখ্যাসূচক চিহ্ন।

বীজগণিত পাটীগণিতের ন্যায় একটি সংখ্যা-বিজ্ঞান। পাটীগণিতে 1, 2, 3. 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 এই দশটি চিহ্ন বা অঙ্কের সাহায্যে যাবতীয় সংখ্যা প্রকাশ করা হইয়া থাকে। বীজগণিতে এইগুলি ব্যতীত বর্ণমালার অক্ষরসমূহও সংখ্যারূপে ব্যবহৃত হয়। যথা, ক, খ, গ,……ইত্যাদি বাংলা বর্ণমালার অক্ষর, a, b, c প্রভৃতি ইংরেজি বর্ণমালার অক্ষর, α, β, γ, δ, † ইত্যাদি গ্রীক-বর্ণমালার অক্ষরসমূহও সংখ্যাসূচক চিহ্ন বা প্রতীক (Sign, symbol)-রূপে ব্যবহার করা হয়। পাটীগণিতে যেমন 4 টাকা, 2 সের, 5 ইঞ্চি ইত্যাদি ব্যবহৃত হয়, তেমনই বীজগণিতেও a টাকা, b সের, c ইঞ্চি ইত্যাদি ব্যবহার করা হইয়া থাকে; কিন্তু পাটীগণিতে ব্যবহৃত প্রত্যেকটি অঙ্কের একটি নির্দ্দিষ্ট মান আছে। অপরপক্ষে বীজগণিতে যে-অক্ষরগুলি সংখ্যাসূচক চিহ্ন-হিসাবে ব্যবহৃত হয়, উহাদের কোন নির্দ্দিষ্ট মান নাই, প্রত্যেকটি অক্ষর দ্বারা যে-কোন সংখ্যা নির্দ্দেশ করা যায়। যথা, a টাকা বলিতে 1, 2, 3 ইত্যাদি যে-কোন-সংখ্যক টাকা বুঝাইতে পারে, তবে কোন বিশেষ প্রশ্নে একবার একটি অক্ষরের কোন নির্দ্দিষ্ট মান ধরিয়া লইলে ঐ প্রশ্নের সর্ব্বত্রই উহার সেই মান ধরিতে হয়।

---

* ভারতীয় গণিতজ্ঞগণ সমীকরণের (equationএর) বীজ (solution, root)-নির্ণয় দ্বারা বহু কাল্পনিক প্রশ্নের সমাধান করিতেন এবং ইহা হইতেই বীজগণিতের প্রথম সূত্রপাত হয়। 'বীজগণিত' নামের ইহাই হেতু। আরবদেশীয় পণ্ডিত মহম্মদ ইবন মুসা-প্রণীত "Al-jabr-W'almqâba'ah"-নামক গ্রন্থ হইতে ত্রয়োদশ শতাব্দীতে ইহা ইউরোপে প্রচারিত হয়। এইজন্য বীজগণিতকে ইংরেজিতে Algebra বলা হয়।

† α, β, γ, δ…এর উচ্চারণ যথাক্রমে অ্যাল্‌ফা, বিটা, গ্যামা, ডেল্‌টা…।

2. বীজগণিত-পাঠে পরে দেখা যাইবে যে, আক্ষরিক সংখ্যা ব্যবহৃত হয় বলিয়াই বীজগণিতের সাহায্যে পাটীগণিতের সংখ্যাবিষয়ক মূলসূত্র এবং প্রক্রিয়াগুলি-সম্বন্ধে উত্তম ধারণা জন্মে এবং উহাদিগকে ব্যাপকভাবে প্রকাশ ও প্রয়োগ করা যায়; পাটীগণিতের বহু প্রশ্নের সমাধানও সহজে সাধিত হয়। এইহেতু বীজগণিতকে এক সময়ে নিখিল পাটীগণিত (Universal Arithmetic) বলা হইত। তবে আধুনিক বীজগণিতের ক্ষেত্র বহু বিস্তীর্ণ; পাটীগণিতের জ্ঞানের প্রসারতা-সাধন ইহার একটি ক্ষুদ্র অধ্যায় মাত্র।

3. এই পুস্তকে এক, দুই, তিন, চারি, পাঁচ, ছয়, সাত, আট, নয়, শূন্য যথাক্রমে 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 এই আন্তর্জাতিক প্রতীকগুলি দ্বারাই সূচিত হইয়াছে এবং সংখ্যা-প্রকাশার্থ প্রধানতঃ ইংরেজি-বর্ণমালার অক্ষর a, b, $c, \cdots x$, y, zই ব্যবহৃত হইয়াছে।

ক্রিয়াসূচক চিহ্ন (Signs of Operation) : প্রতীক (Symbols)

4. বীজগণিতের ক্রিয়াসূচক চিহ্ন।

পাটীগণিত এবং বীজগণিতে একই রকমের ক্রিয়াসূচক চিহ্ন ব্যবহার করা হয়। নিম্নে এই চিহ্নগুলির বিষয় সংক্ষেপে লিখিত হইল।

5. যোগচিহ্ন (+), বিয়োগচিহ্ন (−), গুণনচিহ্ন (×), ভাগচিহ্ন (÷)।

বীজগণিতে এই চিহ্নগুলির অর্থ, পড়িবার নিয়ম এবং ব্যবহার-প্রণালী* অবিকল পাটীগণিতেরই মত। যথা—

---

* পাটীগণিতে দেখা গিয়াছে যে, +, −, ×, ÷ এই চিহ্নগুলি কোন সংখ্যা বা রাশির পূর্ব্বে বসে এবং উক্ত সংখ্যা বা রাশির উপর কোন্ রকমের প্রক্রিয়া সম্পন্ন হইবে, তাহাই নির্দ্দেশ করে। ইহাদের কার্য্যক্রম (Order of operation) নিম্নে বিবৃত হইল।

(1) কতকগুলি সংখ্যার মধ্যে (+) এবং (−) বা ইহাদের যে-কোন একটি বর্ত্তমান থাকিলে বামদিক্ হইতে আরম্ভ করিয়া চিহ্নগুলির কার্য্য পর-পর সম্পন্ন করিতে হয়।

(2) কতকগুলি সংখ্যার মধ্যে (×) এবং (÷) বা ইহাদের যে-কোন একটি বর্ত্তমান থাকিলে চিহ্নগুলির কার্য্য বামদিক্ হইতে আরম্ভ করিয়া ডানদিকে পর-পর সম্পন্ন করিতে হয়। যথা, $6 \div 3 \times 2$এ 6কে 3 দ্বারা ভাগ করিয়া লব্ধ ভাগফলকে 2 দ্বারা গুণ করিবে। এরূপ, $6 \times 2 \div 4$এ 6কে 2 দ্বারা গুণ করিয়া লব্ধ গুণফলকে 4 দ্বারা ভাগ করিবে।

(3) কতকগুলি সংখ্যার মধ্যে (+), (−), (×), (÷) চিহ্ন বর্ত্তমান থাকিলে উল্লিখিত নিয়ম-অনুসারে প্রথমে × এবং ÷র কার্য্য করিয়া পরে + এবং − চিহ্নের কার্য্য করিতে হয়।

পাটীগণিতে $2+3$এর অর্থ 2এর সহিত 3 যোগ কর ;

এইরূপ বীজগণিতে $a+b$এর অর্থ aএর সহিত b যোগ কর।

$5-3+2$এর অর্থ 5 হইতে 3 বিয়োগ কর এবং লব্ধ-বিয়োগফলের সহিত 2 যোগ কর।

এইরূপ $a-b+c$এর অর্থ a হইতে b বিয়োগ কর এবং লব্ধ-বিয়োগফলের সহিত c যোগ কর।

অনুরূপভাবে $x \div y \times z$এর অর্থ xকে y দ্বারা ভাগ কর এবং লব্ধ-ভাগফলকে z দ্বারা গুণ কর ইত্যাদি।

6. অন্তর-চিহ্ন ($\sim$)।

পাটীগণিতে $3 \sim 7$এর অর্থ 3 এবং 7এর অন্তরফল, অর্থাৎ উহাদের বৃহত্তরটি হইতে ক্ষুদ্রতরটির বিয়োগফল। অতএব

$$3 \sim 7 = 7 - 3 = 4.$$

এইরূপ $5 \sim 2 = 5 - 2 = 3.$

বীজগণিতে $x \sim y$এর অর্থও x এবং y এর অন্তরফল, অর্থাৎ উহাদের বৃহত্তরটি হইতে লঘুতরটির বিয়োগফল।

7. সূচক-চিহ্ন, মূল-চিহ্ন, ভগ্নাংশ-চিহ্ন, সমতা-চিহ্ন ইত্যাদি।

এই চিহ্নগুলির ব্যবহারের নিয়মও পাটীগণিত এবং বীজগণিতে একইরূপ। যথা,

3^2 দ্বারা (3এর বর্গ অর্থাৎ) 3×3 বুঝায়।

এইরূপ a^2 দ্বারা (aএর **বর্গ** অর্থাৎ) $a \times a$ বুঝায়।

5^3 দ্বারা (5এর ঘন অর্থাৎ) $5 \times 5 \times 5$ বুঝায় ;

এইরূপ x^3 দ্বারা (xএর **ঘন** অর্থাৎ) $x \times x \times x$ বুঝায়।

$\sqrt{4}$ বা $\sqrt[2]{4}$ দ্বারা 4এর বর্গমূল বুঝায় ;

এইরূপ $\sqrt{a}$ বা $\sqrt[2]{a}$ দ্বারা aএর **বর্গমূল** বুঝায়।

$\sqrt[3]{8}$এ বুঝায় 8এর ঘনমূল ;

এইরূপ $\sqrt[3]{x}$এ বুঝায় xএর **ঘনমূল**।

পাটীগণিতে $3 \div 5$কে $\frac{3}{5}$ বা $3/5$ এইরূপ ভগ্নাংশ-আকারেও লিখিত হয়।

সেইরূপ বীজগণিতেও $x \div y$কে $\dfrac{x}{y}$ বা x/y **ভগ্নাংশরূপে** লিখিত হয়।

পাটীগণিতের মত

$x=y$ এর অর্থ— x এবং y পরস্পর সমান।

$x=y=z$ এর অর্থ— x, y এবং z পরস্পর সমান।

$x>y$ এর অর্থ— x y অপেক্ষা বৃহত্তর।

$a<b$ এর অর্থ— a b অপেক্ষা লঘুতর।

$m \neq n$ এর অর্থ— m এবং n সমান নহে।

$x \ngtr y$ এর অর্থ— x y অপেক্ষা বৃহত্তর নহে।

$p \nless q$ এর অর্থ— p q অপেক্ষা লঘুতর নহে।

$c \equiv d$ এর অর্থ— c এবং d সর্ব্বতোভাবে সমান।

8. পাটীগণিতের মত বীজগণিতেও $\because$ চিহ্নটি 'যেহেতু'-অর্থে এবং $\therefore$ চিহ্নটি 'অতএব'-অর্থে ব্যবহৃত হয়।

9. প্রতীক (Symbols)।

a, b, c ইত্যাদি সংখ্যাসূচক চিহ্ন এবং $+$, $-$, $\times$, $\div$, $=$, $\because$, $\therefore$ ইত্যাদি ক্রিয়াসূচক বা সাঙ্কেতিক চিহ্নগুলিকে **প্রতীক** বলা হয়। ইহাদের মধ্যে a, b, c ইত্যাদি সংখ্যা-সূচক চিহ্নগুলিকে **সাংখ্য-প্রতীক** (Symbols of quantity) বলে।

10. বন্ধনী (Brackets)।

বন্ধনী-বিষয়ক নিয়ম বীজগণিত এবং পাটীগণিতে একই। —, ( ), { }, [ ], এই চারিটি চিহ্নের নাম বন্ধনী। ইহাদিগকে যথাক্রমে **রেখাবন্ধনী** (Vinculum), **লঘুবন্ধনী** (First Brackets), **ধনুর্ব্বন্ধনী** (Second Brackets), এবং **গুরুবন্ধনী** (Third Brackets) বলে। সাধারণতঃ গুরুবন্ধনীর মধ্যে ধনুর্ব্বন্ধনী, ধনুর্ব্বন্ধনীর মধ্যে লঘুবন্ধনী এবং লঘুবন্ধনীর মধ্যে রেখাবন্ধনী ব্যবহৃত হইয়া থাকে।

বন্ধনীর অন্তর্গত রাশিমালাটিকে একটি রাশি বলিয়া গণ্য করিতে হয়। যথা, $a-\overline{b+c}$ বা $a-(b+c)$এর অর্থ a হইতে b এবং cএর সমষ্টির বিয়োগফল।

11. বীজগণিতে গুণফল লিখিবার বিশিষ্ট প্রণালী : পাটীগণিত এবং বীজগণিতে সংখ্যা-লিখন-প্রণালীতে পার্থক্য।

বীজগণিতে $2 \times a$কে গুণচিহ্ন বাদ দিয়া '$2a$'রূপেও লিখিত হয়; কিন্তু পাটীগণিতে 2×3কে কখনও 23রূপে লিখিত হয় না।

$23 = 2$ দশ $+ 3$ অর্থাৎ $2 \times 10 + 3$, ইহা 2×3 বা 6 নহে।

কিন্তু $\quad 2x = 2 \times x$;

$xy = x \times y$;

এইরূপ $\quad 2ab = 2 \times a \times b$;

$xyz = x \times y \times z$;

আবার পাটীগণিতে $\quad 2\frac{3}{4} = 2 + \frac{3}{4}$;

কিন্তু বীজগণিতে $\quad 2\frac{a}{b} = 2 \times \frac{a}{b}$;

$$x\frac{y}{z} = x \times \frac{y}{z}$$

টীকা। কোন গুণচিহ্নবিহীন গুণফলে পাটীগণিতীয় সংখ্যা গুণকরূপে বর্ত্তমান থাকিলে উহা প্রথমে লিখিত হয় ; যথা,

$a \times 2$কে $2a$ লিখিবে. $a2$ নহে।

$a \times 2 \times b$কে $2ab$ লিখিবে $a2b$ নহে।

পরে প্রমাণিত হইবে যে, ইহাতে গুণফলের মানের কোন পরিবর্ত্তন হয় না।

দ্রষ্টব্য। $x \times 1$কে $1x$ না লিখিয়া ইহাকে শুধু 'x' লিখিতে হয়, 1 উহ্য থাকে। এইরূপ $1 \times a \times b = ab$.

12. পূর্ব্ববর্ত্তী অণুচ্ছেদগুলি হইতে দেখা যাইতেছে যে, ক্রিয়াসূচক প্রতীকসমূহ কতকগুলি সাঙ্কেতিক চিহ্নমাত্র। ইহারা অনেকটা সর্টহাণ্ড (Shorthand)-প্রণালীর সাঙ্কেতিক চিহ্নের মত। ইহাদের প্রকৃত-অর্থ-সম্বন্ধে সম্যক্ সচেতন না থাকিলে ভুলের সম্ভাবনা যথেষ্ট। শিক্ষার্থিগণ যাহাতে এই প্রতীকগুলির যথাযথ প্রয়োগ শিক্ষা করিতে পারে, তজ্জন্য নিম্নে একটি অনুশীলনী প্রদত্ত হইল।

উদাহরণ 1. নিম্নলিখিত ফলগুলির অর্থ বল ঃ

(i) $4b$; (ii) $a - 4b + c$: (iii) $a^2 \sim b^2$; (iv) $ax - by$.

(i) $4b$এর অর্থ $4 \times b$ বা $b \times 4$; অর্থাৎ bএর 4 গুণ।

(ii) $a - 4b + c$এর অর্থ a হইতে bএর 4 গুণ বিয়োগ কর এবং প্রাপ্ত বিয়োগফলের সহিত c যোগ কর।

(iii) $a^2 \sim b^2$এর অর্থ a বর্গ এবং b বর্গের অন্তরফল।

(iv) $ax - by$এর অর্থ aএর xগুণ হইতে bএর yগুণের বিয়োগফল।

উদাহরণ 2. নিম্নলিখিত ফলগুলি +, − ইত্যাদি প্রতীক দ্বারা সংক্ষেপে লিখ :

(i) aকে xবর্গ দ্বারা ভাগ কর এবং লব্ধফলের দ্বিগুণের সহিত z যুক্ত কর।

(ii) xএর এক-তৃতীয়াংশ হইতে yএর দ্বিগুণের বিয়োগফল zএর 5 গুণের সমান।

(i)এর উত্তর : $2(a \div x^2) + z$. (ii)এর উত্তর : $\frac{x}{3} - 2y = 5z$.

প্রশ্নমালা 1

নিম্নলিখিত ফলগুলির অর্থ মুখে-মুখে বল :

1-5. $a+x$; $a-x$; $a \times x$; $a \div x$; $\frac{a}{x}$.

6-10. ax ; a^2 ; $\sqrt{a}$; $2xa$; $5abc$.

11-13. $a \times b \div c$; $b \div c \times a$; $x \div y \div z$.

14-17. $x^2 \sim y^2$: $\sqrt{a} \sim \sqrt{b}$; $\sqrt{a-b^2+c^3}$; $\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}$.

18-20 $\frac{a}{2} + \frac{b}{3}$; $\frac{a}{3} - \frac{b}{4} + \frac{c}{5}$; $2/m + 3/n + 4/p$.

21-23. $x = y$; $x + a = y + b$: $x = y = z$.

24-27. $a > b$; $x < y$; $m \neq n$; $x \ngtr y$.

28-30. $x^2 + y^2 \nless 2xy$; $m + n \equiv n + m$; $x \times y \equiv y \times x$.

31-32. $2(x+a) + 3(y+b)$; $3(a+b) - 2(c+a) + 4(a+b)$.

নিম্নলিখিত রাশি-যুগলগুলির মধ্যে কোন প্রভেদ থাকিলে তাহা বুঝাইয়া বল :

33-35. 53 এবং 5×3 ; $5a$ এবং $5 \times a$; ab এবং $a \times b$.

36-38. $3\frac{2}{5}$ এবং $3 \times \frac{2}{5}$; $3\frac{x}{y}$ এবং $3 \times \frac{x}{y}$; $a\frac{b}{c}$ এবং $a \times \frac{b}{c}$.

39-41. $2\sqrt{x}$ এবং $\sqrt[2]{x}$; $3\sqrt{x}$ এবং $\sqrt[3]{x}$; x^3 এবং $x \times 3$

42-43. $x \div a \times b$ এবং $x \div ab$; $x \div a \div b$ এবং $x \div \frac{a}{b}$.

নিম্নলিখিত ফলগুলি +, −, ×, ÷ ইত্যাদি চিহ্নের সাহায্যে সংক্ষেপে লিখ :

44-47. aএর সহিত b যোগ কর ; c হইতে d বিয়োগ কর ;
mকে n দ্বারা গুণ কর ; xকে y দ্বারা ভাগ কর।

48-49. aএর অর্দ্ধ ; x এবং yএর সমষ্টির এক-তৃতীয়াংশ।

50-51. aবর্গ এবং bবর্গের সমষ্টি ;
xএর বর্গমূল এবং yএর বর্গমূলের অন্তর।

52. x হইতে y বিযুক্ত কর এবং লব্ধ-বিয়োগফলের সহিত a যুক্ত কর।

53. xবর্গের সহিত yএর বর্গমূল যুক্ত কর এবং লব্ধ-যোগফল হইতে zএর ঘনমূল বিয়োগ কর।

54. aএর b গুণ হইতে cএর d গুণ বিযুক্ত কর।

55. aএর x গুণকে yএর b গুণ দ্বারা ভাগ কর এবং প্রাপ্ত-ভাগফলকে cএর z গুণ দ্বারা গুণ কর।

56. aকে x দ্বারা, bকে y দ্বারা, cকে z দ্বারা ভাগ কর এবং লব্ধ-ভাগফলগুলিকে যোগ কর।

57. xএর বর্গমূল হইতে yবর্গ বিযুক্ত কর এবং প্রাপ্ত-বিয়োগফলকে n দ্বারা গুণ কর।

58. x এবং yএর সমষ্টি zএর সমান।

59. a, b, cএর সমষ্টি sএর সমান।

60. x হইতে yএর বিয়োগফল zএর সমান।

61. aএর x গুণ, bএর y গুণ, cএর z গুণ, ইহারা পরস্পর সমান।

62. x এবং yএর সমষ্টির এক-তৃতীয়াংশ a হইতে bএর বিয়োগফলের এক-চতুর্থাংশের সমান।

63. a এবং bএর সমষ্টি c হইতে বৃহত্তর।

64. x এবং yএর অন্তর z হইতে ক্ষুদ্রতর।

65. c d হইতে বৃহত্তর হইতে পারে না।

66. aএর m গুণ bএর n গুণের সমান নহে।

67. a এবং xএর সমষ্টির অর্দ্ধেকের বর্গ a এবং xএর গুণফল অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইতে পারে না।

68. aবর্গ এবং bবর্গের অন্তরফল a এবং bএর সমষ্টি এবং অন্তরের গুণফলের সমান।

69. x এবং y পরস্পর সমান হইলে

(i) x এবং aএর সমষ্টি y এবং aএর সমষ্টির সমান;

(ii) x এবং aএর অন্তর y এবং aএর অন্তরের সমান;

(iii) xএর a গুণ yএর a গুণের সমান;

(iv) xকে a দ্বারা এবং yকে a দ্বারা ভাগলব্ধফল পরস্পর সমান।

70. x এবং aএর সমষ্টির m গুণ হইতে y এবং bএর সমষ্টির n গুণ বিয়োগ কর এবং লব্ধ-বিয়োগফল হইতে z এবং cএর সমষ্টির p গুণ বিয়োগ কর।

13. পরিবর্ত্ত (Substitution)।

পূর্ব্বেই বলা হইয়াছে যে, বীজগণিতে যে-অক্ষরগুলি সংখ্যা বুঝাইবার জন্য ব্যবহৃত হয়, উহাদের কোন নির্দ্দিষ্ট মান নাই। নিম্নের অঙ্কগুলিতে অক্ষরগুলির পরিবর্তে কোন প্রদত্ত মান বসাইয়া অঙ্কগুলিকে সরল করা হইয়াছে। এই প্রক্রিয়াকে **পরিবর্ত্ত** (Substitution) বলে।

উদাহরণ 1. $a=2, b=5, c=16$ এবং $d=9$ ধরিলে

(ক) $a+b=$ কত? (খ) $2bc=$ কত? (গ) $a^b=$ কত? $ab=$ কত?

(ঘ) $\frac{ca}{b-1}=$ কত? (ঙ) $\sqrt{c}+d=$ কত? $\sqrt{c+d}=$ কত?

(চ) $6a-2b+3c=$ কত? (ছ) $25\frac{9}{16}-ab\frac{d}{c}=$ কত?

(ক) $a=2, b=5$; অতএব $a+b=2+5=\mathbf{7}$.

(খ) $b=5, c=16$; অতএব $2bc=2\times b\times c=2\times5\times16=\mathbf{160}$.

(গ) $a=2, b=5$; অতএব $a^b=2^5=2\times2\times2\times2\times2=\mathbf{32}$;

এবং $ab=a\times b=2\times5=\mathbf{10}$.

(ঘ) $\frac{ca}{b-1}=\frac{c\times a}{b-1}=\frac{16\times2}{5-1}=\frac{\overset{4}{\cancel{16}}\times2}{\cancel{4}}=\mathbf{8}$.

(ঙ) $\sqrt{c}+d=\sqrt{16}+9=4+9=\mathbf{13}$;

কিন্তু $\sqrt{c+d}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=\mathbf{5}$.

(চ) $6a-2b+3c=6\times a-2\times b+3\times c$
$=6\times2-2\times5+3\times16$
$=12-10+48=\mathbf{50}$.

(ছ) $25\frac{9}{16}-ab\frac{d}{c}=25\frac{9}{16}-a\times b\times\frac{d}{c}$.
$=25\frac{9}{16}-2\times5\times\frac{9}{\underset{8}{\cancel{16}}}$
$=25\frac{9}{16}-\frac{45}{8}=\mathbf{19\frac{15}{16}}$. [সরল করিয়া]

উদাহরণ 2. x^2+5x+3কে সংক্ষেপে $f(x)$ লিখিলে $f(3)=$ কত?

$f(x)=x^2+5x+3$;

xএর স্থলে 3 লিখিলে $f(3)=3^2+5\times3+3=9+15+3=\mathbf{27}$.

প্রশ্নমালা 2

$a=6, b=3, c=2, d=8, e=0$ ধরিয়া 1-35 প্রশ্নোক্ত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর : [সম্ভবস্থলে প্রশ্নের উত্তর মুখে-মুখে বল] :

1-5. $a+b$; $a-b$; $a \times b$; $a \div b$; $\frac{a}{b}$.

6-10. $2a$; $2ab$; a^2 ; b^2 ; $a^2+2ab+b^2$.

11-15. a^3 ; b^3 ; c^3 ; $3abc$; $a^3+b^3+c^3-3abc$.

16-18. $a \times b \div c$; $a \div b \times c$; $a \div b \div c$.

19-22. $a+b \times c$; $a-b \times e$; $a \times b+e$; $a \div b-c$.

23-25. $\frac{12}{a}+\frac{15}{b}$; $\frac{20}{c}-\frac{d}{4}$; $\frac{a+d}{b-c}$.

26. (i) 2^b ; (ii) $2b$. **27.** (i) a^2 ; (ii) $a \times 2$.

28. (i) a^b ; (ii) ab.

29-31. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$; $\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}$; $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}$.

32-35. $a(b-c)$; $a-(b-c)$; $2a-(3b-2c)$;
$2(a+b)-3(b+c)+7(b-c)$;

$x=3, y=4, z=5, s=24, t=9$ হইলে 36-49 প্রশ্নোক্ত রাশির মান নির্ণয় কর :—

36-40. $\sqrt{y}$; $\sqrt{y+z}$; $\sqrt{x^2+y^2}$; $\sqrt{49}-\sqrt{yt}$; $\sqrt{\frac{20}{z}+\frac{36}{x}}$.

41-42. $t \div x \times x$; $t \div x^2$.

43. (i) $s \div x \times y$; (ii) $s \div xy$.

44. (i) $s \div y \div x$; (ii) $s \div \frac{y}{x}$

45. (i) $34-xy$; (ii) $45-yz$.

46. (i) $345-xyz$; (ii) $325-32z+3yz-xyz$.

47-49. $\frac{x}{yz}-\frac{3}{45}$; $3\frac{4}{5}-x\frac{y}{z}$; $34\frac{5}{9}-xy\frac{z}{t}$.

50. $x=1, 2, 3, 4$ অথবা 5 হইলে $2x+3$এর মানগুলি নির্ণয় কর এবং

উহাদিগকে xএর অনুরূপ মানের ঠিক নিম্নে স্থাপন করিয়া নিম্নপ্রদর্শিতভাবে একটি তালিকা প্রস্তুত কর :

x	1	2	3	4	5
$2x+3$					

51. $y=3x+4$. যদি $x=1, 2, 3, 4, 5$ অথবা 6 হয়, তবে yএর মানগুলি নির্ণয় কর এবং উহাদিগকে xএর অনুরূপ মানের ঠিক নিম্নে স্থাপন করিয়া নিম্নপ্রদর্শিতভাবে একটি তালিকা প্রস্তুত কর :

x	1	2	3	4	5	6
y						

52. $y=\frac{1}{4}x^2$. যদি $x=2, 4, 5, 6, 8$ কিংবা 10 হয়, তবে x^2 এবং yএর মানগুলি নির্ণয় কর এবং উহাদিগকে যথাক্রমে xএর অনুরূপ মানের ঠিক নিম্নে স্থাপন করিয়া একটি তালিকা প্রস্তুত কর।

53. $ut+\frac{1}{2}ft^2$এর মান নির্ণয় কর :

(i) $u=0, f=2, t=3$ হইলে

(ii) $u=5, f=0, t=7$ হইলে

(iii) $u=9, f=5, t=8$ হইলে।

54. $s=\dfrac{v^2-u^2}{2f}$ হইলে sএর মান নির্ণয় কর :

(i) $u=0, v=16, f=2$ হইলে

(ii) $u=10, v=20, f=10$ হইলে

(iii) $u=8, v=9, f=\frac{1}{2}$ হইলে।

55. $x^3-3x^2+6x+10$কে সংক্ষেপে $f(x)$ লিখিলে $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(8)-f(7)$এর মান নির্ণয় কর।

প্রতীকের ব্যবহার (Use of Symbols)

14. বীজগণিতীয় প্রতীকের সাহায্যে গণিতের ফলগুলি ব্যাপকভাবে লিখিতে পারা যায় এবং উহার নিয়মগুলিও সংক্ষেপে এবং সুষ্ঠুরূপে প্রকাশ করা সম্ভব হয়। নিম্নে কয়েকটি দৃষ্টান্ত দেওয়া হইল।

উদাহরণ 1. (i) কোন্ সংখ্যা হইতে 2 বিয়োগ করিলে 3 বাকি থাকে ?
(ii) কোন্ সংখ্যা হইতে 5 বিয়োগ করিলে 4 বাকি থাকে ?
(iii) কোন্ সংখ্যা হইতে x বিয়োগ করিলে a বাকি থাকে ?

স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, প্রত্যেকস্থলে যোগ দ্বারাই উত্তর পাওয়া যাইবে। অতএব

(i) নির্ণেয় সংখ্যা $= \mathbf{2+3}$ বা $\mathbf{5}$;
(ii) নির্ণেয় সংখ্যা $= \mathbf{5+4}$ বা $\mathbf{9}$;
(iii) নির্ণেয় সংখ্যা $= x+a$.

টীকা। লক্ষ্য কর যে, শেষোক্ত উত্তরে এবং aএর স্থলে বিভিন্ন সংখ্যা বসাইয়া পাটীগণিতের এই প্রকার সমস্ত অঙ্কের ফল নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ 2. ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ।

ভাজ্যকে D, ভাজককে d, ভাগফলকে Q এবং ভাগশেষকে R ধরিয়া পাটীগণিতের উল্লিখিত নিয়মটিকে সংক্ষেপে লিখ এবং উহা হইতে অযুগ্ম-সংখ্যা-নির্ণয়ের একটি সূত্র নির্ণয় কর।

ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ

$$\therefore \quad D = d \times Q + R$$

অথবা $D = dQ + R$. ...(ক)

এইরূপ সংক্ষিপ্ত আকারে সাধারণভাবে প্রকাশিত নিয়মকে **সূত্র** (formula) বলে।

অযুগ্মসংখ্যাকে 2 দ্বারা ভাগ করিলে শূন্য বা কোন অখণ্ড সংখ্যা ভাগফল এবং 1 ভাগশেষ থাকে।

অতএব (ক)-চিহ্নিত সূত্রে dকে 2, Qকে শূন্য বা কোন অখণ্ড সংখ্যা এবং Rকে 1 ধরিলেই D একটি অযুগ্ম সংখ্যা হইবে।

$\therefore$ Q শূন্য বা যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা হইলে

$2Q+1$ = অযুগ্ম সংখ্যা।

ইহাই অযুগ্মসংখ্যা-নির্ণয়ের সূত্র।

উদাহরণ 3. aকে বিয়োজন, bকে বিয়োজ্য এবং cকে বিয়োগফল ধরিয়া দেখাও যে,

(i) $a-b=c$;
(ii) $a=b+c$;
এবং (iii) $a-c=b$.

বিয়োজন, বিয়োজ্য ও বিয়োগফলের সংজ্ঞা হইতে দেখা গিয়াছে যে,

(i) বিয়োজন – বিয়োজ্য = বিয়োগফল।

(ii) বিয়োজন = বিয়োজ্য + বিয়োগফল।

(iii) বিয়োজন – বিয়োগফল = বিয়োজ্য।

অতএব বিয়োজনকে a, বিয়োজ্যকে b এবং বিয়োগফলকে c ধরিলে

(i) $a-b=c.$

(ii) $a=b+c.$

(iii) $a-c=b.$

প্রশ্নমালা 3

[**1-24** প্রশ্নের উত্তর মুখে-মুখে বল]

1. (i) দুইটি সংখ্যার যোগফল 5 ; উহাদের একটি 2 হইলে অপরটি কত ?
(ii) দুইটি সংখ্যার যোগফল x ; উহাদের একটি a হইলে অপরটি কত ?

2. (i) কোন্ সংখ্যা হইতে 5 বিয়োগ করিলে বিয়োগফল 3 হয় ?
(ii) কোন্ সংখ্যা হইতে a বিয়োগ করিলে বিয়োগফল x হয় ?

3. (i) কোন্ সংখ্যাকে 3 দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল 2 হয় ?
(ii) কোন্ সংখ্যাকে a দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল x হয় ?

4. (i) দুইটি সংখ্যার গুণফল 12 ; উহাদের একটি 4 হইলে অপরটি কত ?
(ii) দুইটি সংখ্যার গুণফল x ; উহাদের একটি a হইলে অপরটি কত ?

5. (i) 15 টাকা 5 জনের মধ্যে সমান ভাগ করিয়া দিলে প্রত্যেকে কত পাইবে ?
(ii) x টাকা a জনের মধ্যে সমান ভাগ করিয়া দিলে প্রত্যেকে কত পাইবে ?

6. (i) একটি ভেড়ার দাম 4 টাকা হইলে 6টি ভেড়ার দাম কত ?
(ii) একটি ভেড়ার দাম a টাকা হইলে bটি ভেড়ার দাম কত ?

7. (i) 3 টাকায় কত আনা ? (ii) a টাকায় কত আনা ?

8. (i) 4 ফুটে কত ইঞ্চি ? (ii) x ফুটে কত ইঞ্চি ?

9. (i) 3 পাউণ্ডে কত শিলিং ? (ii) b পাউণ্ডে কত শিলিং ?

10. (i) 32 আনায় কত টাকা ? (ii) x আনায় কত টাকা ?

11. (i) 6 ফুটে কত গজ ? (ii) y ফুটে কত গজ ?

12. x গজ y ফুটে কত ফুট ? কত গজ ?

13. a টাকা b আনায় কত আনা ? কত টাকা ?

14. m পাউণ্ড n শিলিংএ কত শিলিং ? কত পাউণ্ড ?

15. (i) n একটি অখণ্ড সংখ্যা। উহার ঠিক পূর্ব্ববর্ত্তী এবং ঠিক পরবর্ত্তী অখণ্ড সংখ্যা কত ?

(ii) n একটি অযুগ্মসংখ্যা. উহার ঠিক পূর্ব্ববর্ত্তী এবং ঠিক পরবর্ত্তী অযুগ্মসংখ্যা কত ?

(iii) $2m$ একটি যুগ্মসংখ্যা, উহার ঠিক পূর্ব্ববর্ত্তী এবং ঠিক পরবর্ত্তী যুগ্মসংখ্যা কত ?

16. একটি লোকের বর্ত্তমান বয়স a বৎসর ; x বৎসর পূর্ব্বে তাহার বয়স কত ছিল ? y বৎসর পরে তাহার বয়স কত হইবে ?

17. একব্যক্তি প্রতিঘণ্টায় x মাইল চলে। y ঘণ্টায় সে কত মাইল যাইবে ? z মাইল যাইতে তাহার কত ঘণ্টা লাগিবে।

18. একটি জলপূর্ণ পাত্রের ওজন x সের। খালি পাত্রের ওজন y সের হইলে জলের ওজন কত ?

19. ভাজক a, ভাগফল b ও ভাগশেষ c হইলে ভাজ্য কত ?

20. কত টাকা aজন বালকের মধ্যে সমানভাবে ভাগ করিয়া দিলে প্রত্যেকে b টাকা পাইবে এবং c টাকা বাকি থাকিবে ?

21. একব্যক্তির নিকট a টাকা ছিল। সে উহা হইতে b টাকা খরচ করিলে কত বাকি থাকিল ? যদি সে আরও c টাকা খরচ করিত, তাহা হইলে কত বাকি থাকিত ?

22. একটি লোকের xটি গরু ছিল, তাহাদের aটি মরিয়া গেলে সে আর bটি গরু কিনিল। সর্ব্বশেষ তাহার কয়টা গরু থাকিল ?

23. একব্যক্তির প্রথমে a টাকা লাভ, পরে b টাকা ক্ষতি হইল। তাহার মোট কত লাভ বা ক্ষতি হইল ?

24. (i) একটি ঘড়ি a টাকায় ক্রয় করিয়া কত টাকায় বিক্রয় করিলে b টাকা লাভ থাকিবে ?

(ii) একটি বাড়ী x টাকায় ক্রয় করিয়া y টাকায় বিক্রয় করিলে কত লাভ বা ক্ষতি হইবে ?

(iii) একটি বাড়ী x টাকায় বিক্রয় করাতে y টাকা লাভ হইল. উহার ক্রয়-মূল্য কত ? যদি z টাকা ক্ষতি হইত, তাহা হইলেই বা ক্রয়মূল্য কত হইত ?

(iv) একব্যক্তি a টাকা-দরের x পাউণ্ড চা'র সহিত b টাকা দরের y পাউণ্ড চা মিশ্রিত করিয়া মিশ্রিত চা'কে c টাকা-দরে বিক্রয় করিলে তাহার কত লাভ বা ক্ষতি হইবে ?

25. (ক) পাটীগণিতে দুইটি শুদ্ধসংখ্যার গুণনে দেখা গিয়াছে যে,

গুণ্য × গুণক = গুণক × গুণ্য।

গুণ্যকে a, গুণককে b ধরিয়া এই নিয়মটিকে সূত্রাকারে লিখ এবং নিম্নলিখিত স্থলে লব্ধ সূত্রের সত্যতা পরীক্ষা কর—

(1) $a=5$, $b=3$ হইলে ;

(2) $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{3}$ হইলে ;

(3) $a=2\cdot5, b=1\cdot7$ হইলে।

(খ) কোন ভাগ-অঙ্কে ভাগশেষ না থাকিলে

ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল।

ভাজ্যকে D, ভাজককে d ও ভাগফলকে Q ধরিয়া একটি সূত্র রচনা কর এবং লব্ধ-সূত্র হইতে যুগ্মসংখ্যার সূত্র লিখ।

26. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি এবং অন্তর দেওয়া থাকিলে সংখ্যা-দুইটি নিম্নলিখিত নিয়মে নির্ণয় করা যায়—

$$\text{বৃহত্তর সংখ্যা} = \frac{\text{সমষ্টি} + \text{অন্তর}}{2};$$

$$\text{এবং ক্ষুদ্রতর সংখ্যা} = \frac{\text{সমষ্টি} - \text{অন্তর}}{2}।$$

বৃহত্তর সংখ্যাকে N, ক্ষুদ্রতর সংখ্যাকে n, সমষ্টিকে S ও অন্তরকে D ধরিয়া নিয়মটি সূত্রাকারে লিখ এবং প্রাপ্ত-সূত্র হইতে নিম্নলিখিত স্থলে N এবং n নির্ণয় কর—

যখন (i) $S=18$, $D=10$;

(ii) $S=37\cdot5, D=29\ 3$;

(iii) $S=8\frac{3}{4}$, $D=4\frac{1}{4}$.

27. (i) দুইটি সংখ্যার গুণফল উহাদের গ. সা. গু. এবং ল. সা. গু.-র গুণফলের সমান।

$$\text{(ii) ল. সা. গু.} = \frac{\text{সংখ্যাদ্বয়ের গুণফল}}{\text{গ. সা. গু.}}।$$

সংখ্যাদ্বয়কে N এবং n, গ. সা. গু.কে G এবং ল. সা. গু.কে L ধরিয়া উক্ত নিয়মগুলি সূত্রাকারে প্রকাশ কর।

28. 1, 2, 3……… ইত্যাদি স্বাভাবিক সংখ্যার প্রথম nটির যোগফল S ধরিলে প্রমাণ করা যায় যে,

$$S=\frac{n(n+1)}{2}.$$

(ক) $n=6$, (খ) $n=12$ ধরিয়া সূত্রটির সত্যতা পরীক্ষা কর এবং এই সূত্র দ্বারা (i) 1 হইতে 100 পর্য্যন্ত সংখ্যার, (ii) 1 হইতে 1000 পর্য্যন্ত সংখ্যার যোগফল নির্ণয় কর।

29. নিম্নলিখিত প্রশ্নোক্ত নিয়মগুলিকে প্রতীক-সাহায্যে সংক্ষেপে প্রকাশ কর। আয়তাকার ক্ষেত্রের—

(i) ক্ষেত্রফল $=$ দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ ;

(ii) (বাহুসমষ্টি বা) পরিসীমা $= 2$ (দৈর্ঘ্য $+$ প্রস্থ) ;

(iii) কর্ণ $= \sqrt{\text{দৈর্ঘ্য}^2 + \text{প্রস্থ}^2}$ ।

ক্ষেত্রফলকে A, দৈর্ঘ্যকে L, প্রস্থকে B, পরিসীমাকে P এবং কর্ণকে D ধরিয়া উল্লিখিত ফল তিনটি সূত্রাকারে লিখ।

30. বর্গাকার ক্ষেত্রে—

(i) ক্ষেত্রফল $=$ বাহু^{2} ;

(ii) বাহু $= \sqrt{\text{ক্ষেত্রফল}}$;

(iii) পরিসীমা $= 4 \times \sqrt{\text{ক্ষেত্রফল}}$;

(iv) কর্ণ $= \sqrt{2 \times \text{ক্ষেত্রফল}}$ ।

ক্ষেত্রফলকে A, বাহুকে L, পরিসীমাকে P এবং কর্ণকে D ধরিয়া উল্লিখিত চারিটি ফল সূত্রাকারে লিখ।

31. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা।

ক্ষেত্রফলকে $\triangle$, ভূমিকে b এবং উচ্চতাকে h ধরিয়া উক্ত ফলটি সূত্রাকারে লিখ।

32. (i) বৃত্তের পরিধি $=$ ব্যাসার্দ্ধের 2π গুণ এবং (ii) উহার ক্ষেত্রফল $=$ ব্যাসার্দ্ধের বর্গের π গুণ। পরিধিকে C, ব্যাসার্দ্ধকে R, ক্ষেত্রফলকে A ধরিয়া এই নিয়মদ্বয়কে সূত্রাকারে লিখ।

টীকা। π (উচ্চারণ—*pi*, পাই) একটি সংখ্যাজ্ঞাপক চিহ্ন বা প্রতীক, ইহার পূর্ণমান নির্ণয় করা সম্ভব হয় নাই। ইহাকে সাধারণতঃ স্থূলভাবে $\frac{22}{7}$ ধরা হয়।

33. সমকোণী ত্রিভুজে (অতিভুজ)$^2 =$ অপর দুই বাহুর বর্গের সমষ্টি ; অতিভুজ এবং অপর দুই বাহুকে যথাক্রমে a, b, c ধরিয়া ফলটি সূত্রাকারে লিখ।

34. (i) একটি ঘরের ঘনফল $=$ দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ $\times$ উচ্চতা ;

(ii) ইহার চারি দেওয়ালের ক্ষেত্রফল $= 2 \times$ (দৈর্ঘ্য $+$ প্রস্থ) $\times$ উচ্চতা। ঘনফলকে V, চারি দেওয়ালের ক্ষেত্রফলকে S, দৈর্ঘ্যকে L, প্রস্থকে B এবং উচ্চতাকে H ধরিয়া উল্লিখিত ফলগুলি সূত্রাকারে লিখ।

35. (i) পৃথিবীর ঘনফল $=$ উহার (ব্যাসার্দ্ধ)^{3}এর $\frac{4\pi}{3}$ গুণ ;

এবং (ii) উহার উপরিভাগের ক্ষেত্রফল $=$ (ব্যাসার্দ্ধ)^{2}এর 4π গুণ।

ঘনফলকে V, উপরিভাগের ক্ষেত্রফলকে S এবং ব্যাসার্দ্ধকে R ধরিয়া উক্ত ফল-দুইটিকে সূত্রাকারে লিখ।

36. টেলিগ্রামের প্রথম 8এর অনধিক শব্দের জন্য a আনা এবং তদতিরিক্ত প্রত্যেক শব্দের জন্য b আনা দিতে হয়। x শব্দের একটি টেলিগ্রামে y আনা খরচ পড়িলে y-নির্ণয়ের একটি সূত্র রচনা কর।

37. পোষ্ট-আফিস সেভিংস্-ব্যাঙ্কে এক বৎসরের অনধিক সময় টাকা জমা রাখিলে যে-সুদ পাওয়া যায়, তাহার পরিমাণ

$$=\frac{\text{জমা টাকা}\times 100 \text{ টাকার } 1 \text{ বৎসরের সুদ}\times\text{সময়}}{100}.$$

সুদকে I, জমা টাকাকে P, 100 টাকার 1 বৎসরের সুদকে R এবং সময়কে T ধরিয়া সুদ-নির্ণয়ের একটি সূত্র রচনা কর।

38. একটি গাড়ী সমবেগে চলিলে উহার

(i) অতিক্রান্ত পথের পরিমাণ = বেগ × অতিবাহিত সময় ;

(ii) $$\text{বেগ}=\frac{\text{অতিক্রান্ত পথ}}{\text{অতিবাহিত সময়}};$$

(iii) $$\text{সময়}=\frac{\text{অতিক্রান্ত পথ}}{\text{বেগ}};$$

অতিক্রান্ত পথকে S, বেগকে V এবং সময়কে T ধরিয়া উল্লিখিত তিনটি ফলকে সূত্রাকারে প্রকাশ কর।

39. কোন গাড়ীর চাকা প্রত্যেক আবর্ত্তনে উহার পরিধির সমান পথ যায়। অতএব গাড়ীর অতিক্রান্ত পথের পরিমাণ = চাকার পরিধি × চাকার আবর্ত্তন-সংখ্যা। চাকার ব্যাসার্দ্ধকে R, আবর্ত্তন-সংখ্যাকে N এবং অতিক্রান্ত পথকে S ধরিয়া একটি সূত্র রচনা কর। [প্রশ্ন 32 দেখ।]

40. একখানি পাথর পৃথিবীর মাধ্যাকর্ষণ দ্বারা স্থির অবস্থা হইতে নীচের দিকে পড়িতে থাকিলে উহা t সেকেণ্ডে $16t^2$ ফুট পড়ে। t সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত পথকে s ফুট ধরিয়া একটি সূত্র রচনা কর এবং একটি কূপের উপরিভাগ হইতে উহার তলদেশে পড়িতে একখানি পাথরের $2\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড লাগিলে সূত্র দ্বারা কূপের গভীরতা নির্ণয় কর।

41. জলের কল হইতে নল দ্বারা কোন নির্দ্দিষ্ট সময়ে যে-জল সরবরাহ করা হয়, তাহার ঘনপরিমাণ = জলের বেগ × নলের ছিদ্রপথের ক্ষেত্রফল × সময়।

ঘনপরিমাণ Q, বেগ V, নলের ব্যাসার্দ্ধ R এবং সময়কে T ধরিয়া ফলটিকে 32-প্রশ্নের সাহায্যে সূত্রাকারে লিখ।

42. x গজ y ফুট z ইঞ্চিকে (i) ইঞ্চিতে, (ii) গজে, (iii) মাইলে পরিণত করিবার সূত্র নির্ণয় কর।

43. x পাউণ্ড y শিলিং z পেন্সকে (i) পেন্সে, (ii) পাউণ্ডে পরিণত করিবার সূত্র নির্ণয় কর।

15. সংখ্যাসূচক সহগ (numerical co-efficient)।

1 টাকা +1 টাকা +1 টাকা =3 টাকা।

এইরূপ $x+x+x=3x$.

'3 টাকা'য় 3 বুঝায় টাকার সংখ্যা।

এইরূপ $3x$এও 3 বুঝায় xএর সংখ্যা।

$3x$এ 3কে xএর **সংখ্যাসূচক সহগ** বলে।

এইরূপ $5y$এ $5=y$এর সংখ্যাসূচক সহগ।

$7xy$এ $7=xy$এর সংখ্যাসূচক সহগ।

আবার যেহেতু $x=1.x$, সুতরাং 'x'এ xএর সংখ্যাসূচক সহগ $=1$.

কিন্তু এই 1 লিখিত হয় না।

এইরূপ কোন রাশিতে সংখ্যাসূচক সহগের উল্লেখ না থাকিলে উহা 1 ধরিবে।

যথা, a, xy, m^2, mnp, এই রাশিগুলির প্রত্যেকটির সংখ্যাসূচক সহগ $=1$.

16. সদৃশ রাশি (like terms) এবং অসদৃশ রাশি (unlike terms)।

কতকগুলি রাশির আক্ষরিক অংশ একইরূপ হইলে উহাদিগকে **সদৃশ রাশি** বলা হয়; অন্যথায় উহাদিগকে **অসদৃশ** বলে।

উদাহরণ 1. (i) $5x, 2x, 3x, x$, ইহারা সদৃশ রাশি এবং
5, 2, 3, 1 যথাক্রমে ইহাদিগের সংখ্যাসূচক সহগ।

(ii) $3ab, 7ab, ab$, ইহারা সদৃশ রাশি এবং
3, 7, 1 যথাক্রমে ইহাদের সংখ্যাসূচক সহগ।

উদাহরণ 2. (i) $3a, 2x, 5ab$, ইহারা অসদৃশ।

(ii) x^2, x, x^3, ইহারাও অসদৃশ।

প্রশ্নমালা 4 (মৌখিক)

নিম্নলিখিত রাশিগুলির মধ্যে কোন্-কোন্টি সদৃশ এবং উহাদের সংখ্যাসূচক সহগগুলি কত?

1. a, a, a, a **2.** x, x, x, x. **3.** $4a, 5a, 7a, 11a$.

4. $2x, 3x, 7x, 9x$. **5.** $2b^2, b^2, 5b^2, 20b^2$.

6. $2abc, 5abc, 7abc, 2xabc, 9xabc, 3xabc$.

7. $2a^2x^2, 3b^2y^2, 4b^2y^2, a^2x^2, 2b^2y^2, 5a^2x^2$.

8. $2ax, 3by, 2cz, 5by, 7cz, 8ax, 9cz, 2by, 5ax$.

9. a, x, ax, by, x^2. **10.** $5, 7a, 10a^2, 9a^3, 15a^4$.

দ্বিতীয় অধ্যায়

সাধারণ চারি নিয়ম The Four Simple Rules)*

17. যোগ, বিয়োগ, গুণন ও ভাগ—এই চারি প্রক্রিয়াকে **সাধারণ চারি নিয়ম** বলা হয়।

যোগ (Addition)

18. যোগ (Addition)।

দুই বা তদধিক রাশি একত্র করিলে কত হয়, তাহা স্থির করার প্রণালীকে যোগ বলে। যে-সকল রাশিকে একত্র করা হয়, তাহাদিগকে **যোজ্যরাশি** (summands) বলে এবং যোগ করিয়া যে-ফল পাওয়া যায়, তাহাকে **যোগফল** বা **সমষ্টি** (sum) বলা হয়।

$a+b$ বুঝায় a এবং bএর সমষ্টি বা যোগফল।

এইরূপ $a+b+c$ বুঝায় a, b এবং cএর সমষ্টি বা যোগফল।

19. সদৃশ রাশির যোগফল।

সদৃশ রাশির বিষয় 16 অণুচ্ছেদে আলোচিত হইয়াছে। ইহাদের যোগফল নির্ণয়ের প্রণালী পাটীগণিতীয় প্রণালীরই মত।

প্রশ্ন 1. (i) 2 আনা, 3 আনা ও 7 আনার যোগফল কত ?

(ii) $2a$, $3a$ ও $7a$ এর যোগফল কত ?

---

*বর্তমান অধ্যায়ে শুধু ধনাত্মক রাশি-বিষয়ক নিয়মই আলোচিত হইয়াছে।

(i) 2 আনা + 3 আনা + 7 আনা = (2 + 3 + 7) আনা = 12 আনা।

এইরূপে আনার স্থলে a লিখিলে

(ii) $2a+3a+7a=(2+3+7)a=12a.$ …(ক)

প্রশ্ন 2. (i) 5 সের, 4 সের ও 2 সেরের যোগফল কত ?

(ii) $5s$, $4s$ ও $2s$এর যোগফল কত ?

(i) 5 সের + 4 সের + 2 সের = (5 + 4 + 2) সের = 11 সের।

এইরূপ সেরের স্থলে s লিখিলে

(ii) $5s+4s+2s=(5+4+2)s=11s.$ …(খ)

(ক) এবং (খ)-চিহ্নিত ফল হইতে দেখা যাইতেছে যে, প্রত্যেক স্থলেই

(1) যোগফল যোজ্যরাশিগুলির অনুরূপ সদৃশ রাশি ;

এবং (2) যোগফলের সংখ্যাসূচক অঙ্ক
= যোজ্যরাশিগুলির সংখ্যাসূচক অঙ্কগুলির সমষ্টি।*

টীকা। কোন রাশিতে সংখ্যাসূচক অঙ্কের উল্লেখ না থাকিলে উহাকে 1 ধরিবে। [অনু. 15 দ্রষ্টব্য]

উদাহরণ 1. (i) $2x+3x+4x=(2+3+4)x=9x.$

(ii) $7a+a+4a+5a=(7+1+4+5)a=17a,$ [$\because\ a=1a$]

(iii) $3ab+2ab+4ab=(3+2+4)ab=9ab.$

(iv) $2{\cdot}2a^2+3{\cdot}7a^2+8{\cdot}12a^2=(2{\cdot}2+3{\cdot}7+8{\cdot}12)a^2$
$=14{\cdot}02a^2.$

উল্লিখিত অঙ্কগুলিতে যোজ্যরাশিগুলি স্তম্ভাকারে সাজাইয়াও যোগফল নির্ণয় করা যায়। যথা,

	$7a$		
$2x$	a	$3ab$	$2{\cdot}2a^2$
$3x$	$4a$	$2ab$	$3{\cdot}7a^2$
$4x$	$5a$	$4ab$	$8{\cdot}12a^2$
যোগফল $=9x.$	যোগফল $=17a.$	যোগফল $=9ab.$	যোগফল $=14{\cdot}02a^2.$

উদাহরণ 2. $x=12,\ y=26,\ z=10$ হইলে $3{\cdot}27xyz$, $5{\cdot}61xyz$, $1{\cdot}12xyz$এর সমষ্টির মান কত ?

$$3{\cdot}27xyz+5{\cdot}61xyz+1{\cdot}12xyz=(3{\cdot}27+5{\cdot}61+1{\cdot}12)xyz$$
$$=10xyz=10\times x\times y\times z$$
$$=10\times12\times26\times10=\mathbf{31200}.$$

* এই নিয়মটি পরে 66 পৃষ্ঠার 62 এবং 68 অনুচ্ছেদে সাধারণভাবে প্রমাণিত হইবে।

প্রশ্নমালা 5

মুখে-মুখে যোগ কর :

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
$2a$	$7x$	m	$3s$	$5x^2$	$4ab$	abc
$3a$	$9x$	m	$2s$	$2x^2$	$2ab$	$7abc$
		m	$5s$	$4x^2$	$7ab$	$8abc$

8.	9.	10.	11.
$2a^2b$	$8{\cdot}2a^2x^2$	$8x^2y^2z^2$	$2{\cdot}57xyz$
$3a^2b$	$9{\cdot}7a^2x^2$	$7x^2y^2z^2$	$1{\cdot}32xyz$
$4a^2b$	$12{\cdot}3a^2x^2$	$13x^2y^2z^2$	$1{\cdot}11xyz$

12. $2ax,\ 5ax,\ 9ax,\ 11ax$ **13.** $3a^3,\ 5a^3,\ 16a^3,\ 15a^3$

14. $10\sqrt{abc},\ 15\sqrt{abc},\ 3\sqrt{abc}$

15. $2x^2+5x^2+8x^2+15x^2$

16. $12\frac{bc}{a}+21\frac{bc}{a}+31\frac{bc}{a}$

17. $1{\cdot}52xyz+3{\cdot}71xyz+2{\cdot}28xyz+2{\cdot}49xyz$

$x=12,\ y=15,\ z=16$ হইলে নিম্নলিখিত রাশিগুলির সমষ্টির মান নির্ণয় কর :

18. $7xy,\ 3xy,\ 4xy$ **19.** $46yz,\ 28yz,\ 26yz$

20. $7\frac{3}{8}\frac{yz}{x},\quad 5\frac{3}{4}\frac{yz}{x},\quad 2\frac{1}{4}\frac{yz}{x},\quad 4\frac{5}{8}\frac{yz}{x}$

21. $15{\cdot}71x^2y^2z^2+26{\cdot}92x^2y^2z^2+35{\cdot}86x^2y^2z^2+21{\cdot}51x^2y^2z^2$.

বিয়োগ (Subtraction)

20. বিয়োগ।

কোন রাশি হইতে অপর এক রাশি বাহির করিয়া লইলে কত বাকি থাকে, তাহা নির্ণয় করার প্রণালীকে **বিয়োগ** (Subtraction) বলে। যাহা হইতে (বাদ দেওয়া অর্থাৎ) বিয়োগ করা হয়, তাহাকে **বিয়োজন** বা **জমা** (Minuend), যাহা বিয়োগ করা হয়, তাহাকে **বিয়োজ্য** (Subtrahend) এবং বিয়োগ করিলে যাহা বাকি থাকে, তাহাকে **বিয়োগফল** বা **বাকি** (Remainder, Difference) বলে।

মনে কর, a হইতে b বাহির করিয়া লইলে বা বিয়োগ করিলে c বাকি থাকে। অর্থাৎ $a-b=c$. এস্থলে a বিয়োজন, b বিয়োজ্য, c বিয়োগফল।

21. পূর্ব্ববর্ত্তী অনুচ্ছেদে প্রদত্ত বিয়োগের সংজ্ঞা হইতে দেখা যাইতেছে যে, বিয়োজন হইতে বিয়োজ্য বাহির করিয়া লইলে বিয়োগফল বাকি থাকে; সুতরাং বিয়োজ্য ও বিয়োগফল একত্র করিলে বিয়োজন পাওয়া যাইবে। অর্থাৎ

বিয়োজ্য + বিয়োগফল = বিয়োজন।

অতএব $\boldsymbol{a-b=c}$ হইলে $\boldsymbol{b+c=a}$.

22. সদৃশ পদের বিয়োগ (Subtraction of one of two like terms from the other)। এইরূপ বিয়োগের প্রণালী পাটীগণিতীয় প্রণালীরই মত।

উদাহরণ (1) 7 আনা − 5 আনা = কত?
$7a-5a$ = কত?
(2) 5 মণ − 3 মণ = কত?
$5m-3m$ = কত?

(1) **7** আনা − **5** আনা = (**7** − **5**) আনা = **2** আনা।
এইরূপ $\mathbf{7}a - \mathbf{5}a = (\mathbf{7}-\mathbf{5})a = \mathbf{2}a.$ ...(ক)
(2) **5** মণ − **3** মণ = (**5** − **3**) মণ = **2** মণ।
এইরূপ $\mathbf{5}m-\mathbf{3}m = (\mathbf{5}-\mathbf{3})m = \mathbf{2}m.$ ...(খ)

(ক) এবং (খ)-চিহ্নিত ফল হইতে দেখা যাইতেছে যে, বিয়োগফল **বিয়োজন** ও **বিয়োজ্যের** সদৃশরাশি এবং বিয়োজনের সংখ্যাসূচক অঙ্ক হইতে **বিয়োজ্যের** সংখ্যাসূচক অঙ্ক বিয়োগ করিলে বিয়োগফলের সংখ্যাসূচক অঙ্ক পাওয়া যায়।

টীকা। কোন রাশিতে সংখ্যাসূচক অঙ্কের উল্লেখ না থাকিলে উহাকে 1 ধরিবে। (অনু. 15)

উদাহরণ 1. (ক) $6x-4x=(6-4)x=\mathbf{2}x.$
(খ) $7x^2-x^2=(7-1)x^2=\mathbf{6}x^2.$
(গ) $4{\cdot}8ab-1{\cdot}1ab=(4{\cdot}8-1{\cdot}1)ab=\mathbf{3{\cdot}7}ab.$

অথবা স্তম্ভাকারে সাজাইয়া

(ক)		(খ)	(গ)
বিয়োজন	$=6x$	$7x^2$	$4{\cdot}8ab$
বিয়োজ্য	$=4x$	x^2	$1{\cdot}1ab$
বিয়োগফল	$=2x.$	$6x^2.$	$3{\cdot}7ab.$

উদাহরণ 2. সরল কর : $5x-3x-x+2x$.

চিহ্নগুলির কার্য্য বামদিক্ হইতে ডানদিকে ক্রমশঃ সম্পন্ন করিলে প্রদত্ত রাশিমালা $=2x-x+2x=x+2x=3x$.

প্রশ্নমালা 6 (মৌখিক)

উপরের রাশি হইতে নীচের রাশি বিয়োগ কর :

1. $\begin{array}{l}7a\\ \underline{3a}\end{array}$ 2. $\begin{array}{l}15x\\ \underline{9x}\end{array}$ 3. $\begin{array}{l}8m^2\\ \underline{3m^2}\end{array}$ 4. $\begin{array}{l}4ab\\ \underline{ab}\end{array}$

5. $\begin{array}{l}23ab\\ \underline{15ab}\end{array}$ 6. $\begin{array}{l}9{\cdot}4xyz\\ \underline{7{\cdot}3xyz}\end{array}$ 7. $\begin{array}{l}2{\cdot}6a^2x^2\\ \underline{2{\cdot}1a^2x^2}\end{array}$ 8. $\begin{array}{l}35{\cdot}32y^2z^2\\ \underline{23{\cdot}63y^2z^2}\end{array}$

9. $\begin{array}{l}4\frac{3}{4}x^2y^2z^2\\ \underline{2\frac{1}{2}x^2y^2z^2}\end{array}$ 10. $\begin{array}{l}\frac{23}{7}mnp\\ \underline{\frac{16}{7}mnp}\end{array}$

বিয়োগ কর :

11. $9ax$ হইতে $5ax$ 12. $17xyz$ হইতে $12xyz$

13. $18{\cdot}62x^2y^2z^2$ হইতে $13{\cdot}71x^2y^2z^2$

14. $7\frac{1}{2}a^2$ হইতে $3\frac{1}{4}a^2$ 15. $15xy+2xy$ হইতে $10xy$

16. $16xy+5xy$ হইতে $3xy+2xy$

17. $7ab-2ab$ হইতে $16ab-14ab$

18. $8xy+9xy+3xy$ হইতে $4xy+7xy+5xy$

19. $5a^2+17a^2+19a^2+11a^2$ হইতে $8a^2+5a^2+20a^2+7a^2$

20 $9x^2$এর সহিত কত যোগ করিলে $11x^2$ হয় ?

21. $5xy$ হইতে কত বিয়োগ করিলে $3xy$ বাকি থাকে ?

সরল কর :

22. $12a-3a+5a$ 23. $12xy-5xy-7xy$

24. $8x^2-4x^2+6x^2-7x^2$. 25. $16x^2-2x^2-4x^2-8x^2+x^2$

নিম্নলিখিত যোগের অঙ্কগুলিতে তারকা-চিহ্নিত স্থলের লুপ্ত-অঙ্ক নির্ণয় কর :

26. $\begin{array}{l}*\\ \underline{2x}\\ 7x\end{array}$ 27. $\begin{array}{l}2a\\ \underline{*}\\ 5a\end{array}$ 28. $\begin{array}{l}2xy\\ 3xy\\ \underline{*}\\ 9xy\end{array}$ 29. $\begin{array}{l}7x^2\\ *\\ \underline{2x^2}\\ 14x^2\end{array}$ 30. $\begin{array}{l}2abc\\ *\\ \underline{3abc}\\ 15abc.\end{array}$

গুণন (Multiplication)

23. গুণনের পাটীগণিতীয় সাধারণ সংজ্ঞা এবং নিয়মসমূহ বীজগণিতেও প্রয়োগ করা যায়।

গুণণের সংজ্ঞা। xকে a দ্বারা গুণ করার অর্থঃ একক হইতে যে প্রক্রিয়া দ্বারা a পাওয়া যায় xএর উপর সেই প্রক্রিয়া প্রয়োগ করা। যাহাকে গুণ করা হয়, তাহার নাম **গুণ্য** (multiplicand) ; যাহা দ্বারা গুণ করা হয়, তাহার নাম **গুণক** (multiplier) এবং গুণলব্ধ ফলকে **গুণফল** (product) বলে।

$x \times a$এ বুঝায় যে, xকে a দ্বারা গুণ করিতে হইবে।

'xa'এ বুঝায় xএর aগুণ।

উদাহরণ 1. $4a \times 3 =$ কত ?

$3 = 1 + 1 + 1$; অর্থাৎ 1কে তিনবার লইয়া যোগ করিলে 3 পাওয়া যায়। অতএব গুণনের সংজ্ঞানুসারে $4a$কে তিনবার লইয়া যোগ করিলে $4a \times 3$ পাওয়া যাইবে।

$\therefore \quad 4a \times 3 = 4a + 4a + 4a = 12a.$

এস্থলে $4a$ গুণ্য, 3 গুণক এবং $12a$ গুণফল।

টীকা। **0 (শূন্য) দ্বারা গুণন।** পাটীগণিতে দেখা গিয়াছে যে, যে-কোন সংখ্যাকে 0 (শূন্য) দ্বারা গুণ করিলে কিংবা 0কে যে-কোন সংখ্যা দ্বারা গুণ করিলে উভয়স্থলে গুণফল $= 0$; ইহাকে প্রতীক-সাহায্যে নিম্নলিখিতরূপে লিখা যায়ঃ

$$x \times 0 = 0 ;$$

এবং $$0 \times x = 0.$$

24. **গুণনের বিনিময় নিয়ম।** পাটীগণিতে দেখা গিয়াছে যে, যে-কোন দুইটি শুদ্ধসংখ্যার গুণনে

গুণ্য × গুণক = গুণক × গুণ্য।

যথা, $$3 \times 4 = 4 \times 3 ;$$
$$\tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{2} ;$$
$$\cdot 2 \times \cdot 3 = \cdot 3 \times \cdot 2 ;$$

এইরূপ $a \times b = b \times a.$

আবার $2 \times 3 \times 4 = 3 \times 4 \times 2 = 4 \times 3 \times 2$ [যেহেতু ইহাদের প্রত্যেকটি $= 24$]

এইরূপ $a \times b \times c = b \times c \times a = c \times b \times a$ ইত্যাদি।

অর্থাৎ কতকগুলি রাশির গুণফল নির্ণয় করিতে হইলে রাশিগুলিকে ইচ্ছামত সাজাইয়া গুণ করা চলে।

এই নিয়মটিকে গুণনের **বিনিময় নিয়ম** * (Commutative Law) বলে।

25. গুণনের সংযোগ নিয়ম* (Associative Law)। কতকগুলি সংখ্যাকে পর-পর গুণ করিয়া গেলে যে গুণফল পাওয়া যায়, সংখ্যাগুলিকে কয়েকটি কয়েকটি করিয়া লইয়া পৃথক্-পৃথক্ গুণ দ্বারা লব্ধ ফলগুলিকে পরে গুণ করিলেও সেই গুণফল পাওয়া যায়। যথা,

$2\times3\times4\times5 \quad =120$

আবার $(2\times3)\times(4\times5)=6\times20=120$;

$2\times(3\times4\times5) \ =2\times60=120$ ইত্যাদি ;

অতএব $2\times3\times4\times5=(2\times3)\times(4\times5)=2\times(3\times4\times5)$ ইত্যাদি।

এইরূপ $a\times b\times c\times d=(a\times b)\times(c\times d)=a\times(b\times c\times d)$ ইত্যাদি।

26. গুণনের উদাহরণ।

উদাহরণ 1. $5x\times3=$ কত ?

প্রথম নিয়ম। যেহেতু $3=1+1+1$, অতএব

গুণনের সংজ্ঞা হইতে $5x\times3=5x+5x+5x=15x.$

দ্বিতীয় নিয়ম। $5x\times3=5\times x\times3=5\times3\times x$ [বিনিময় নিয়ম]

$=(5\times3)\times x$ [সংযোগ নিয়ম]

$=15x.$

উদাহরণ 2. $2a\times5b=$ কত ?

$2a\times5b=2\times a\times5\times b=2\times5\times a\times b$ [বিনিময় নিয়ম]

$=(2\times5)\times(a\times b)$ [সংযোগ নিয়ম]

$=10ab.$

উদাহরণ 3. $2ab\times3bc\times4ca=$ কত ?

$2ab\times3bc\times4ca=2\times a\times b\times3\times b\times c\times4\times c\times a$

$=2\times3\times4\times a\times a\times b\times b\times c\times c$ [বিনিময় নিয়ম]

$=(2\times3\times4)\times(a\times a)\times(b\times b)\times(c\times c)$ [সংযোগ নিয়ম]

$=24a^2b^2c^2.$

* নিয়মটি পরে ব্যাপকভাবে প্রমাণিত হইবে।

প্রশ্নমালা 7

1-5 প্রশ্নে গুণনের সংজ্ঞা হইতে গুণফল নির্ণয় কর :

1-5. $3x\times2$; $4a\times3$; $7a^2\times4$; $5ab\times6$; $2xyz\times5$.

গুণফল নির্ণয় কর :

6. $5a\times2b$ **7.** $3x\times4y$ **8.** $5ab\times2a$ **9.** $3xy\times2y$

10. $6ab\times5bc$ **11.** $2xy\times3yz$ **12.** $2a^2\times7a^3$

13. $5x^2y\times3xy^2$ **14.** $(2xy)^2$ **15** $(3mnp)^2$

16. $11xy\times2yz\times3zx$ **17.** $3abc\times4bca\times5cab$

18. $2a^2bc\times3ab^2c\times4abc^2$ **19.** $(2mnp)^3$

20. $(3yz\times2zx\times xy)^2$.

ভাগ (Division)

27 ভাগের পাটীগণিতীয় সংজ্ঞা বীজগণিতেও প্রযোজ্য।

ভাগের সংজ্ঞা। কোন রাশি aকে অপর এক রাশি b দ্বারা ভাগ করার অর্থ—তৃতীয় এরূপ একটি রাশি x নির্ণয় করা, যেন $x\times b=a$ হয়।

এরূপস্থলে aকে **ভাজ্য** (dividend), bকে **ভাজক** (divisor) এবং xকে **ভাগফল** (quotient) বলা হয় এবং প্রক্রিয়াটি সংক্ষেপে '$a\div b=x$'রূপে লিখিত হয়।

অতএব $x\times b=a$ হইলে

$$a\div b=x.$$

28. **ভাগফল লিখিবার প্রণালী।** aকে b দ্বারা ভাগ করিলে যে-সম্পূর্ণ ভাগফল পাওয়া যায়, তাহা $a\div b$ এবং $\frac{a}{b}$ বা a/b এইরূপ ভগ্নাংশের আকারেও লিখিত হয়।

29. **ভাগফল-নির্ণয়ের নিয়ম*।** ভাগফলকে ভগ্নাংশ-আকারে লিখিয়া উহাকে পাটীগণিতের নিয়মে সরল করিলেই ভাগফল পাওয়া যায়।

উদাহরণ (1) $24\div6=\frac{\overset{4}{\cancel{24}}}{\cancel{6}}=4.$

* এই নিয়মটি পরে সাধারণভাবে প্রমাণিত হইবে।

(2) $6xy \div 3x = \dfrac{6xy}{3x} = \dfrac{\overset{2}{\cancel{6}} \times \cancel{x} \times y}{\cancel{3} \times \cancel{x}} = 2 \times y = 2y.$

(3) $12a^3b^2 \div 8a^3b = \dfrac{12a^3b^2}{8a^3b} = \dfrac{\overset{3}{\cancel{12}} \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{b} \times b}{\underset{2}{\cancel{8}} \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{b}}$

$= \dfrac{3 \times b}{2} = \dfrac{3b}{2}.$

প্রশ্নমালা 8

ভাগ কর (ভাগফল যতদূর সম্ভব মুখে-মুখে বল) :

1. $2a$কে a দ্বারা
2. $8x$কে $2x$ দ্বারা
3. $4ab$কে $2a$ দ্বারা
4. $8xy$কে $4y$ দ্বারা
5. $18xy$কে $6xy$ দ্বারা
6. $6x^2$কে $3x$ দ্বারা
7. $12abc$কে $3a$ দ্বারা
8. $39xyz$কে $13xy$ দ্বারা
9. $18a^3$কে $6a^2$ দ্বারা
10. $15x^2y$কে $3xy$ দ্বারা
11. $20abxy$কে $5ax$ দ্বারা
12. $21mnpqr$কে $7mpq$ দ্বারা
13. $10x^5$কে $2x^3$ দ্বারা
14. $16x^2yz$কে $8xyz$ দ্বারা
15. $28abcxyz$কে $7bcyz$ দ্বারা
16. $35x^2y^2z^2$কে $7xyz$ দ্বারা
17. $51mnpqxy$কে $17mpx$ দ্বারা
18. $15x^6$কে $3x^4$ দ্বারা
19. $15x^3y^2z$কে $5x^2y^2$ দ্বারা
20. $x^3y^2z^4$কে x^2yz^3 দ্বারা
21. কোন্ সংখ্যাকে $2x^2y^2z^2$ দ্বারা গুণ করিলে গুণফল $6x^3y^3z^3$ হয় ?

তৃতীয় অধ্যায়

ধনরাশি (Positive Quantity)

ঋণরাশি (Negative Quantity)

30. '+' এবং '−' চিহ্নের নূতন প্রকৃতি (new aspects)। পূর্ব্বেই বলা হইয়াছে যে, পাটীগণিত এবং বীজগণিতে '+' (যোগ) এবং '−' (বিয়োগ) চিহ্ন যথাক্রমে যোগ এবং বিয়োগের ক্রিয়াসূচক চিহ্নরূপে ব্যবহৃত হয়; কিন্তু বীজগণিতে এই চিহ্নদ্বয় আরও একটি বিশেষ অর্থে ব্যবহৃত হইয়া থাকে। নিম্নে উহা বিবৃত হইল।

কতকগুলি রাশি আছে, যাহারা সমজাতীয়, কিন্তু বিপরীত-প্রকৃতিবিশিষ্ট। যথা, আয় এবং ব্যয়। কোন ব্যক্তি 5 টাকা আয় করিলে তাহার সঞ্চিত অর্থের পরিমাণ 5 টাকা বৃদ্ধি পায়; কিন্তু যদি সে 7 টাকা ব্যয় করে, তবে তাহার সঞ্চিত অর্থের পরিমাণ 7 টাকা হ্রাস পাইবে। '5 টাকা আয়' এবং '7 টাকা ব্যয়' উভয়েই কতকগুলি টাকা বুঝাইতেছে, অতএব উহারা সমজাতীয় রাশি, কিন্তু এই রাশি-দুইটি বিপরীত-প্রকৃতিবিশিষ্ট, কারণ আয় এবং ব্যয় দ্বারা সঞ্চিত অর্থের পরিমাণ যথাক্রমে বাড়ে এবং কমে।

বীজগণিতে কোন রাশিকে '+' চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করিলে উহার বিপরীত-প্রকৃতিবিশিষ্ট রাশিকে '−' চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হইয়া থাকে। এইরূপে ব্যবহৃত '+' এবং '−' চিহ্নকে **ভেদ-চিহ্ন** (Sign of affection) বলে। 5 টাকা আয়কে '+5' টাকা লিখিলে 7 টাকা ব্যয়কে '−7' টাকা লিখিতে হয়।

এইরূপে 5 টাকা ব্যয়কে +5 টাকা লিখিলে 8 টাকা আয়কে − 8 টাকা লিখিতে হয়।

সাধারণতঃ '+' চিহ্ন উহ্য থাকে, অর্থাৎ কোন রাশির পূর্ব্বে চিহ্ন না থাকিলে '+' চিহ্ন ধরিয়া লইতে হয়।

31. সমজাতীয় এবং বিপরীত-প্রকৃতিবিশিষ্ট রাশির দৃষ্টান্ত।

(1) **আয় এবং ব্যয়।** ইহা পূর্ব্বেই আলোচিত হইয়াছে।

(2) **লাভ** এবং **ক্ষতি**। লাভ এবং ক্ষতি বিপরীত-প্রকৃতিবিশিষ্ট। অতএব '+5 টাকা (বা 5 টাকা)' দ্বারা 5 টাকা লাভ বুঝাইলেই '−3 টাকা' দ্বারা 3 টাকা ক্ষতি বুঝাইবে।

(3) **সম্পত্তি** এবং **ঋণ**। '+5000 টাকা বা 5000 টাকা' দ্বারা 5000 টাকার সম্পত্তি বুঝাইলে '−3000 টাকা' দ্বারা 3000 টাকা ঋণ বুঝাইবে।

(4) **হ্রাস** এবং **বৃদ্ধি**। হ্রাস এবং বৃদ্ধি বিপরীত-প্রকৃতিবিশিষ্ট। যদি '-5°' দ্বারা উত্তাপের 5° হ্রাস বুঝায়, তাহা হইলে '$+5^\circ$' দ্বারা তাপের 5° বৃদ্ধি বুঝাইবে।

যদি '−5 ফুট' দ্বারা বুঝায় যে, নদীর উপরিভাগ তাহার স্বাভাবিক অবস্থান হইতে 5 ফুট নীচে নামিয়াছে, তাহা হইলে '+8 ফুট' দ্বারা বুঝাইবে যে, নদীর উপরিভাগ উহার স্বাভাবিক অবস্থান হইতে 8 ফুট উপরে উঠিয়াছে।

(5) **কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে উহার বিপরীতদিকে অবস্থিত বিন্দুগুলির দূরত্ব**। মনে কর, X′OX পশ্চিম হইতে পূর্ব্বাভিমুখী একটি সোজা রাস্তা ;

X′ Q O P X

O উহার একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু। O বিন্দুর পূর্ব্ব এবং পশ্চিম পরস্পর বিপরীতদিক্। অতএব যদি '+4 মাইল' দ্বারা O বিন্দুর 4 মাইল পূর্ব্বদিকে অবস্থিত বিন্দুটির দূরত্ব বুঝায়, তবে '−3 মাইল' দ্বারা O বিন্দুর 3 মাইল পশ্চিমস্থ বিন্দুটির দূরত্ব বুঝাইবে।

এইরূপ যদি '+2 ফুট' দ্বারা O বিন্দুর 2 ফুট উত্তরে অবস্থিত বিন্দুটির দূরত্ব বুঝায়, তাহা হইলে '−5 ফুট' দ্বারা O বিন্দুর 5 ফুট দক্ষিণদিকে অবস্থিত বিন্দুটির দূরত্ব বুঝাইবে।

32. ধনরাশি (Positive quantity); ঋণরাশি (Negative quantity); ধনচিহ্ন (Positive Sign); ঋণচিহ্ন (Negative Sign)। যে-সকল রাশির পূর্ব্বে '+' বসে বা কোন চিহ্ন বসে না, উহাদিগকে **ধনরাশি** বলে এবং যে-সকল রাশির পূর্ব্বে '−' চিহ্ন বসে, উহাদিগকে **ঋণরাশি** বলা হয়। যথা, +2 অথবা 2, +5 বা 5, ইহারা ধনরাশি ; −3, −7, ইহারা ঋণরাশি।

'+' এবং '−' চিহ্নদ্বয়কে যথাক্রমে **ধন-চিহ্ন** (Positive Sign) এবং **ঋণ-চিহ্ন** (Negative Sign) বলে।

33. ধনরাশি এবং ঋণরাশির রৈখিক দৃষ্টান্ত (Graphical Illustration)।

X′ −5 −4 −3 −2 −1 +1 +2 +3 +4 +5 X

E′ D′ C′ B′ A′ O A B C D E

মনে কর, X′OX একটি সরলরেখা এবং উহার উপর E′, D′, C′, B′, A′,

O, A, B, C, D, E বিন্দুগুলি পরস্পর এরূপভাবে লওয়া হইয়াছে, যেন যে-কোন বিন্দু উহার ঠিক পূর্ব্ববর্ত্তী কিংবা পরবর্ত্তী বিন্দুটি হইতে 1 একক দূরে অবস্থিত (চিত্র দেখ)। এখন O বিন্দু হইতে উহার ডানদিকে অবস্থিত বিন্দুগুলির দূরত্বকে ধনরাশি ধরা হইলে O হইতে উহার বামদিকে অবস্থিত বিন্দুগুলির দূরত্বকে ঋণরাশি ধরিতে হয় [অনু 30]; অতএব চিত্র হইতে দেখা যাইতেছে যে, এই নিয়ম-অনুসারে A, B, C, D, E···বিন্দুগুলি O বিন্দু হইতে যথাক্রমে +1, +2, +3, +4, +5··· দূরে অবস্থিত এবং A′, B′, C′, D′, E′······বিন্দুগুলি O বিন্দু হইতে যথাক্রমে −1, −2, −3, −4, −5···দূরে অবস্থিত। আবার O বিন্দু হইতে +1 দূরে অবস্থিত বিন্দুটি নির্দ্দেশ করিতে বলিলে একমাত্র A বিন্দুটিই বুঝাইবে; এইরূপ O হইতে −4 দূরে অবস্থিত বিন্দুটি বলিলে একমাত্র D′ বিন্দুটিই বুঝাইবে ইত্যাদি। অতএব যে-কোন নির্দ্দিষ্ট সংখ্যাকে X′OX সরলরেখার একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দ্বারা নির্দ্দেশ করা যায়। যথা, −3, −2, −1, 0, +1, +2, +3 সংখ্যাগুলিকে যথাক্রমে X′OX রেখার C′, B′, A′, O, A, B, C বিন্দুগুলির দ্বারা নির্দ্দেশ করা যায়।

সংখ্যাকে বিন্দুর সাহায্যে প্রকাশ করিবার এই প্রণালীকে সংখ্যার **লৈখিক পরিচয়** (Graphical representation) বলে।

34. পূর্ব্বের আলোচনা হইতে নিম্নলিখিত অনুসিদ্ধান্তগুলি সহজে বুঝা যায় :

অনুসিদ্ধান্ত 1. $-a = +a$এর বিপরীত রাশি।

এবং $+a = -a$এর বিপরীত রাশি।

অনুসিদ্ধান্ত 2. $-(-a) = +a$ বা a.

কারণ অনুসিদ্ধান্ত 1 দ্বারা $-(-a) = -a$এর বিপরীত রাশি

$= +a$ বা (সংক্ষেপে) a.

উদাহরণ 1. −25 টাকা ক্ষতি = 25 টাকা (ক্ষতির বিপরীত) লাভ।

2. −500 টাকা ব্যয় = 500 টাকা (ব্যয়ের বিপরীত) আয়।

3. কোন বিন্দু হইতে −3 মাইল পশ্চিমে = উক্ত বিন্দু হইতে 3 মাইল (পশ্চিমের বিপরীত) পূর্ব্বে।

4. −3 মাইল উচ্চে = 3 মাইল (উচ্চের বিপরীত) নিম্নে।

5. মধ্যাহ্নের −2 ঘণ্টা পূর্ব্বে = মধ্যাহ্নের +2 ঘণ্টা (পূর্ব্বের বিপরীত) পরে।

35. ধন ও ঋণরাশির পরম মান (Absolute value)। কোন রাশির ভেদচিহ্ন-রহিত মানকে উহার **পরম মান** (Absolute value) বলে।

যথা, $+3$ কিংবা -3এর পরম মান 3.

এইরূপ '$+a$' কিংবা '$-a$', এই উভয়ের পরম মান সমান।

দ্রষ্টব্য। '$+a$' এবং '$-a$'এর পরম মান সকল স্থলে 'a' নহে। কারণ a একটি সংখ্যাসূচক অক্ষর মাত্র ; ইহা ধন এবং ঋণ এই উভয়বিধ সংখ্যার জন্য ব্যবহৃত হইতে পারে।

প্রশ্নমালা 9.

নিম্নলিখিত রাশিগুলিকে 33 অণুচ্ছেদে প্রদর্শিত নিয়মে বিন্দু-সাহায্যে নির্দ্দেশ কর :

1-10. $3 ; 8 ; -5 ; -2 ; 1 ; 0 ; -7 ; -9 ; -11 ; 4.$

নিম্নলিখিত রাশিগুলির দ্বারা কি বুঝায়, তাহা মুখে-মুখে বল :

11. -20 টাকা লাভ **12.** -30 টাকা ক্ষতি

13. -10 টাকা আয় **14.** -25 টাকা ব্যয়

15. -10 মাইল দক্ষিণে **16.** -11 গজ পূর্ব্বে

17. -100 হাত উপরে **18.** -9 মাইল উত্তর-পূর্ব্বে

19. -2 মাইল নীচে **20.** সন্ধ্যার -3 ঘণ্টা পূর্ব্বে

21. মধ্যাহ্নের -4 ঘণ্টা পূর্ব্বে **22.** -500 টাকা বৃদ্ধি

23. ক খ হইতে -25 নম্বর বেশী পাইয়াছে।

24. গ ঘ হইতে -15 টাকা কম পাইল।

25. ওজনের -9 সের বৃদ্ধি **26.** মধ্যাহ্ন-তাপের -10° বৃদ্ধি

27. জ্বরের -3° হ্রাস **28.** $-(-15$ টাকা লাভ$)$

29. $-(-10$ পাউণ্ড ব্যয়$)$ **30.** $-(-20$ ফুট উপরে$)$।

নিম্নলিখিত রাশিগুলিকে বিপরীতার্থক রাশি দ্বারা প্রকাশ কর :

31. 10 টাকা ক্ষতি **32.** 25 পাউণ্ড আয় **33.** 8 মণ বেশী

34. 3 মাইল দক্ষিণে **35.** 15° হ্রাস

নিম্নলিখিত রাশিগুলির পরম মান নির্ণয় কর :

36. $+3$ **37.** 7 **38.** -5 **39.** -3

40. 10 **41.** -11 **42.** -14 টাকা

43. $+15$ পাউণ্ড **44.** -20° **45.** $-17''$.

চতুর্থ অধ্যায়

সাধারণ চারি নিয়ম (The Four Simple Rules)

36. ধনাত্মক-রাশি-বিষয়ক সাধারণ চারি নিয়ম পূর্ব্বে (দ্বিতীয় অধ্যায়ের অনু. 17-27এ) আলোচিত হইয়াছে। এস্থলে যাবতীয় রাশি-বিষয়ক সাধারণ চারি নিয়ম প্রদত্ত হইল।

যোগ (Addition)

36 (ক)। একই চিহ্নযুক্ত সদৃশ পদের যোগফল।

(i) $2a+3a+7a=$ কত ? (ii) $(-2a)+(-3a)+(-7a)=$ কত ?

(i) $2a+3a+7a=(2+3+7)a=12a.$ [অনু. 19] ......(A)

(ii) যেহেতু 2 আনা ক্ষতি + 3 আনা ক্ষতি + 7 আনা ক্ষতি

$=(2+3+7)$ আনা ক্ষতি,

অতএব অনু. 30-অনুসারে

$(-2$ আনা লাভ$)+(-3$ আনা লাভ$)+(-7$ আনা লাভ$)=-(2+3+7)$ আনা লাভ বা -12 আনা লাভ।

অর্থাৎ $(-2$আ.$)+(-3$আ.$)+(-7$আ.$)=-(2+3+7)$ আ. বা -12আ.।

এইরূপ $(-2a)+(-3a)+(-7a)=-(2+3+7)a=-12a.$ ...(B)

(A) এবং (B)-চিহ্নিত ফল হইতে দেখা যাইতেছে যে. উভয়স্থলেই যোগফল যোজ্যরাশিসমূহের সদৃশ রাশি এবং যোগফলের সংখ্যাসূচক সহগ যোজ্যরাশিসমূহের সংখ্যাসূচক সহগগুলির সমষ্টি।

স্পষ্টই দেখা যাইতেছে যে, সদৃশ রাশিগুলির সংখ্যা যাহাই হউক না কেন, সকল স্থলেই এই নিয়ম খাটিবে।

অতএব একই চিহ্নযুক্ত সদৃশ রাশিগুলির যোগফলের নিয়ম নিম্নলিখিতরূপ হইবে :

নিয়ম। কতকগুলি একই চিহ্নযুক্ত সদৃশ রাশির যোগফল নির্ণয় করিতে হইলে উহাদের সংখ্যাসূচক সহগগুলির সমষ্টির পূর্ব্বে

রাশিগুলির সাধারণ চিহ্ন এবং পরে রাশিগুলির সাধারণ আক্ষরিক অংশ বসাইলেই যোগফল পাইবে।

দ্রষ্টব্য। কোন পদের সহগে সংখ্যার উল্লেখ না থাকিলে উহা 1 ধরিতে হইবে। যথা, $x=1.x$; এইরূপ $-ab=-1ab$.

উদাহরণ 1. $(-3x^2)+(-7x^2)+(-5x^2)=-(3+7+5)x^2=-15x^2$.

2. $(-2ab)+(-ab)+(-6ab) = -(2+1+6)ab=-9ab$.

3. $7{\cdot}1xyz+8{\cdot}2xyz+2{\cdot}3xyz=(7{\cdot}1+8{\cdot}2+2{\cdot}3)xyz=17{\cdot}6xyz$.

এস্থলে যোজ্যরাশিগুলিকে স্তম্ভাকারে সাজাইয়াও যোগ করা যায়। যথা,

$-3x^2$	$-2ab$	$7{\cdot}1xyz$
$-7x^2$	$-ab$	$8{\cdot}2xyz$
$-5x^2$	$-6ab$	$2{\cdot}3xyz$
$-15x^2$	$-9ab$	$17{\cdot}6xyz$.

36. (খ)। ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক সদৃশ রাশির যোগফল।

মনে কর, একব্যক্তির প্রথমে a টাকা লাভ ; পরে b টাকা ক্ষতি হইল ; যদি $a>b$ হয়, তবে তাহার মোট $(a-b)$ টাকা লাভ হইল ; কিন্তু যদি $b>a$ হয়, তাহা হইলে তাহার $(b-a)$ টাকা ক্ষতি হইল। লাভকে ধনরাশি ধরিলে ইহা নিম্নলিখিতরূপ প্রকাশ করা যায় :

$$a+(-b)=a-b \text{ বা } -(b-a). \qquad \cdots\cdots(A)$$

আবার ঐ ব্যক্তির প্রথমে b টাকা ক্ষতি, পরে a টাকা লাভ হইল ধরিলে যেহেতু মোট লাভের বা মোট ক্ষতির পরিমাণ উভয় স্থলে একই থাকিবে, অতএব

$$(-b)+a=a-b \text{ বা } -(b-a). \qquad \cdots\cdots(B)$$

নিম্নলিখিত দৃষ্টান্ত দ্বারা (A) এবং (B) চিহ্নিত ফল-দুইটির অর্থ সুস্পষ্ট হইবে :

উদাহরণ 1. $7+(-2)=7-2$ বা 5.

2. $3+(-7)=-(7-3)$ বা -4.

3. $4x+(-3x)=4x-3x=(4-3)x$ বা x.

4. $(-7a)+11a=11a-7a=(11-7)a$ বা $4a$.

5. $(-12xy)+5xy=-(12xy-5xy)=-(12-5)xy$ বা $-7xy$.

এই উদাহরণগুলি হইতে দেখা যাইতেছে যে, ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক সদৃশ রাশির যোগে (i) যোগফল যোজ্যরাশিদ্বয়ের সদৃশ ; (ii) যোজ্যরাশিদ্বয়ের সংখ্যা-সূচক অঙ্ক-দুইটির মধ্যে যেটি বৃহত্তর, উহা হইতে লঘুতরটি বিয়োগ করিলে

যোগফলের সংখ্যাসূচক অঙ্ক পাওয়া যায়, এবং (iii) যোগফলের চিহ্ন যে-যোজ্যরাশিটির সংখ্যাসূচক অঙ্ক বৃহত্তর তাহার অনুরূপ।

অতএব এস্থলে যোগফল-নির্ণয়ের নিয়ম এইরূপ হইবে :

নিয়ম। একটি ধনাত্মক রাশির সহিত উহার সদৃশ অপর একটি ঋণাত্মক রাশির যোগে, উহাদের সংখ্যাসূচক অঙ্কদ্বয়ের মধ্যে যেটি বৃহত্তর তাহা হইতে লঘুতরটি বিয়োগ কর। লব্ধ বিয়োগফলের পূর্ব্বে বৃহত্তর সংখ্যাসূচক অঙ্কবিশিষ্ট পদের চিহ্ন এবং পরে রাশিদ্বয়ের সাধারণ আক্ষরিক অংশ বসাইলেই যোগফল পাইবে।

উদাহরণ 1. $5a+(-3a)=(5-3)a=2a.$

2. $(-7x)+2x=-(7-2)x=-5x.$

3. $6x+(-6x)=(6-6)x=0.x=0.$

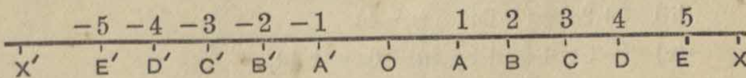
4. $(-5x)+3x+(-4x)=$ কত ?

বামদিক্ হইতে ক্রমশঃ যোগ করিলে প্রদত্ত রাশিমালা $=-2x+(-4x)$

$=-6x.$

রৈখিক প্রণালীতে (Graphical methodএ) যোগ।

36 (গ) (ক) ও (খ) অনুচ্ছেদে প্রদত্ত যোগের নিয়মগুলিকে রৈখিক (Graphical) উপায়েও প্রমাণ করা যায়। মনে কর, X′OX একটি সরলরেখা এবং



উহার E′, D′, C′, B′, A′, O, A, B, C, D, E···বিন্দুগুলি (চিত্র দেখ) পর-পর এরূপভাবে অবস্থিত যে, উহাদের যে কোন একটি উহার ঠিক পূর্ব্ববর্ত্তী কিংবা ঠিক পরবর্ত্তী বিন্দুটি হইতে 1 ফুট দূরে অবস্থিত। O হইতে উহার ডানদিকে অবস্থিত বিন্দুগুলির দূরত্ব ধনরাশি ধরিলে O হইতে উহার বামদিকে অবস্থিত বিন্দুগুলির দূরত্বকে ঋণরাশি ধরিতে হয় (অনুচ্ছেদ 30)। অতএব স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, O হইতে E′, D′, C′, B′, A′, O, A, B, C, D, E বিন্দুগুলির দূরত্ব যথাক্রমে −5, −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 ফুট। মনে কর, একব্যক্তি এই সরলরেখা ধরিয়া চলিতেছে। স্মরণ রাখিতে হইবে যে, বামদিক্ হইতে ডানদিকে অতিক্রান্ত পথকে ধনরাশি ধরিলে (উহার বিপরীত অর্থাৎ) ডানদিক্ হইতে বামদিকে অতিক্রান্ত পথকে ঋণরাশি ধরিতে হয়।

(1) লোকটি O-বিন্দু হইতে 3 ফুট ডানদিকে গিয়া আরও 2 ফুট ডানদিকে অগ্রসর হইলে স্পষ্টই সে E-বিন্দুতে উপস্থিত হইবে। যেহেতু O হইতে E-বিন্দুর দূরত্ব = 5 ফুট,

অতএব (+3 ফুট) + (+2 ফুট) = +5 ফুট।

(2) লোকটি O-বিন্দু হইতে 3 ফুট বামদিকে গিয়া আরও 2 ফুট বামদিকে অগ্রসর হইলে স্পষ্টই সে E′-বিন্দুতে উপস্থিত হইবে। যেহেতু O হইতে E′-বিন্দুর দূরত্ব = −5 ফুট,

অতএব (−3 ফুট) + (−2 ফুট) = −5 ফুট।

(3) লোকটি O-বিন্দু হইতে 2 ফুট ডানদিকে গিয়া পরে 6 ফুট বামদিকে গেলে স্পষ্টই সে D′-বিন্দুতে উপস্থিত হইবে। যেহেতু O হইতে D′এর দূরত্ব = −4 ফুট,

অতএব (+2 ফুট) + (−6 ফুট) = −4 ফুট।

(4) লোকটি O-বিন্দু হইতে প্রথমে 3 ফুট বামদিকে, পরে 5 ফুট ডানদিকে, তৎপরে 4 ফুট বামদিকে এবং সর্ব্বশেষে 6 ফুট ডানদিকে অগ্রসর হইলে স্পষ্টই সে D-বিন্দুতে পৌঁছিবে। O হইতে D-বিন্দুর দূরত্ব = +4 ফুট,

অতএব $(-3)+5+(-4)+6=+4$

উপরের চিত্রে বিন্দুগুলি a ফুট দূরে-দূরে লইয়া এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে,

(i) $(+3a)+(+2a) = +5a.$

(ii) $(-3a)+(-2a) = -5a.$

(iii) $(+2a)+(-6a) = -4a.$

(iv) $(-3a)+5a+(-4a)+6a=+4a.$

প্রশ্নমালা 10

36 (ক)-অণুচ্ছেদে প্রদত্ত নিয়মে মুখে-মুখে যোগ কর :

1. $\begin{array}{r} -2x \\ -3x \\ \hline \end{array}$
2. $\begin{array}{r} -4x \\ -3x \\ -2x \\ \hline \end{array}$
3. $\begin{array}{r} -ab \\ -2ab \\ -7ab \\ \hline \end{array}$
4. $\begin{array}{r} -abx \\ -7abx \\ -8abx \\ \hline \end{array}$
5. $\begin{array}{r} 18{\cdot}21x^2 \\ 19{\cdot}72x^2 \\ 12{\cdot}37x^2 \\ \hline \end{array}$
6. $\begin{array}{r} -1{\cdot}52x^3 \\ -3{\cdot}71x^3 \\ -8{\cdot}93x^3 \\ \hline \end{array}$
7. $(-2)+(-5)+(-7)+(-3)$
8. $(-2x^2)+(-3x^2)+(-x^2)+(-5x^2)$

9. $(-1{\cdot}52xyz)+(-3{\cdot}71xyz)+(-2{\cdot}28xyz)+(-2{\cdot}49xyz)$

10. $(-7\frac{1}{2}a^2x^2)+(-3\frac{1}{4}a^2x^2)+(-2\frac{3}{4}a^2x^2)+(-1\frac{1}{2}a^2x^2)$.

36 (খ)-অণুচ্ছেদে প্রদত্ত নিয়মে মুখে-মুখে যোগ কর :

11.	$9a$	**12.**	$8b$	**13.**	$12c$	**14.**	$6d$
	$-7a$		$-6b$		$-12c$		$-9d$
15.	$-11ex$	**16.**	$-29xy$	**17.**	$-31abc$	**18.**	$5cd$ এবং $-3cd$
	$+17ex$		$12xy$		$26abc$		

19. $12d^2$ এবং $-9d^2$ 20. $-22\ 3x^2y^2z^2$ এবং $15{\cdot}5x^2y^2z^2$

21. $3x$, $2x$, $7x$ এবং $9x$এর সমষ্টির সহিত $-5x$, $-8x$, $-12x$ এবং $-x$এর সমষ্টি যোগ কর।

22. $-1{\cdot}2a$, $-7{\cdot}3a$, $-9{\cdot}6a$ এবং $-1{\cdot}9a$এর যোগফলের সহিত $3\ 21a$, $1{\cdot}37a$ এবং $5{\cdot}7a$এর যোগফল যোগ কর।

23. $2x+(-4x)+3x=$ কত ? 24. $4x+(-8x)+(-5x)=$ কত ?

25. $(-3x)+2x+5x+(-4x)=$ কত ?

36 (গ)-অণুচ্ছেদে প্রদর্শিত লৈখিক প্রণালীতে (graphical methodএ) প্রমাণ কর :

26. $3+4=7$ 27. $8+(-8)=0$ 28. $(-8)+3=-5$

29. $3a+(-7a)=-4a$ 30. $(-5)+(-4)=-9$

31. $(-2)+3+(-1)=0$ 32. $(-3)+4+(-8)=-7$

33. $(-2x)+(-3x)+7x=2x$ 34. $16a+(-7a)+(-3a)=6a$

35. $(+2x)+(-3x)+(-8x)+(+12x)+(-4x)=-x$.

বিয়োগ (Subtraction)

37. বিয়োগফল-নির্ণয়ের নূতন নিয়ম।

বিয়োগের সংজ্ঞা হইতে দেখা গিয়াছে যে,

বিয়োজ্য + বিয়োগফল = বিয়োজন, [অণু. 21]

যেহেতু $5+3=8$; অতএব $8-5=3$;

কিন্তু $8+(-5)=3$ [অণু. 36 (খ)]

$\therefore\ 8-5=8+(-5)$.

অতএব '5 বিয়োগ করা' এবং '(−5) যোগ করা', উভয়ই এক।

অর্থাৎ $-5=+(-5)$.

অপর যে-কোন ধন-সংখ্যা লইয়াও অনুরূপ ফল প্রমাণ করা যায়।

অতএব 'কোন ধন-সংখ্যা বিয়োগ করা' এবং 'উহার ধনচিহ্নের স্থানে ঋণ-চিহ্ন লিখিয়া উহাকে যোগ করা', উভয়েই এক। প্রতীক-সাহায্যে নিয়মটি নিম্নলিখিতরূপে লেখা যায় :

$$-a=+(-a) \qquad \cdots(1)$$

আবার, যেহেতু $(-2)+7=5$.

$\therefore\ 5-(-2)=7$, কিন্তু $5+2=7$.

$\therefore\ 5-(-2)=5+2$.

কাজেই '(−2) বিয়োগ করা' এবং '2 যোগ করা', উভয়ই এক ;

অর্থাৎ $-(-2)=+2$.

অপর যে-কোন ঋণ-সংখ্যা লইয়াও অনুরূপ ফল প্রমাণ করা যায়।

অতএব 'কোন ঋণ-সংখ্যা বিয়োগ করা' এবং 'উহার ঋণ-চিহ্নের স্থানে ধন-চিহ্ন লিখিয়া উহাকে যোগ করা', উভয়ই এক।

প্রতীক-সাহায্যে নিয়মটি নিম্নলিখিতরূপে লেখা যায় :

$$-(-a)=+a \qquad \cdots(2)$$

উল্লিখিত (1) এবং (2)- চিহ্নিত নিয়মগুলি হইতে বিয়োগফল-নির্ণয়ের নিম্নলিখিত সাধারণ নিয়ম পাওয়া যায় :

নিয়ম। বিয়োজ্যের চিহ্ন-পরিবর্তন (অর্থাৎ '+'কে '−' এবং '−'কে '+') করিয়া উহাকে বিয়োজনের সহিত যোগ করিলে নির্ণেয় বিয়োগফল পাইবে।

দ্রষ্টব্য। পদের পূর্ব্বে কোন চিহ্ন না থাকিলে '+' চিহ্ন উহ্য আছে ধরিতে হয়।

উদাহরণ। (1) $5-(-3)=5+3=8$.

(2) $0-(-7)=0+7=7$.

(3) (i) $6x-4x=6x+(-4x)=2x$. [36 (খ) অনু.]

অথবা $6x-4x=(6-4)x=2x$. [অনু. 22]

(ii) $6x-8x=6x+(-8x)=-2x$. [36 (খ) অনু.]

(4) $(-2a)-3a=(-2a)+(-3a)=-5a$. [36 (ক) অনু.]

(5) $-4x-(-6x)=-4x+6x=2x$. [36 (খ) অনু.]

(6) $2x-(-3a)=2x+3a$.

বিয়োজ্যকে বিয়োজনের ঠিক নিয়ে স্থাপন করিয়া প্রক্রিয়াগুলি এইরূপেও লেখা যায় :

উদা. (1)	উদা. (2)	উদা. (3)
5	0	$-2a$
-3	-7	$3a$
8	7	$-5a.$

এইসকল স্থলে মনে-মনে বিয়োজ্যের চিহ্ন-পরিবর্তন করিয়া বিয়োজনের সহিত যোগ করিতে হয়। পদের পূর্ব্বে কোন চিহ্ন না থাকিলে + চিহ্ন উহ্য আছে, ধরিতে হইবে।

38. **অসমতা (Inequality)।** $a-b$ ধনরাশি (positive quantity) হইলে aকে b অপেক্ষা বৃহত্তর (greater) বলা হয়, অথবা bকে a অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বলা হয়।

দুইটি রাশির মধ্যে > বা < চিহ্ন বসিলে উহারা অসমান বুঝায়।

$a>b$ দ্বারা বুঝায় যে, a b হইতে বৃহত্তর।

$b<a$ দ্বারা বুঝায় যে, b a হইতে ক্ষুদ্রতর।

উদাহরণ। (1) $5-2=3$, অর্থাৎ একটি ধনরাশি ; অতএব $5>2$.
(2) $-3-(-5)=-3+5=2$, অর্থাৎ একটি ধনরাশি ; অতএব $-3>-5$

প্রশ্নমালা 11

উপরের রাশি হইতে নীচের রাশিটি বিয়োগ কর :

1. $2a$	2. $5b$	3. 0	4. $+12x$	5. $+14m$
$-3a$	$-7b$	-19	$-19x$	$-21m$
6. $-16n$	7. $-17z$	8. $-9ab$	9. $-15x^2$	10. $-23pq$
$-9n$	$-11z$	$13ab$	$-18x^2$	$47pq$
11. $17xyz$	12. 0	13. $-9x^2y^2$		14. $-10xyz$
$-23xyz$	$-13ab$	$9x^2y^2$		$-12xyz$

বিয়োগ কর :

15. $3a$ হইতে $(-12a)$
16. $-5x$ হইতে $16x$
17. $-3ab$ হইতে $(-16ab)$
18. $5x$ হইতে $(-3a)$
19. $-7a^2$ হইতে $(-5a^2)$
20. $7x^2$ হইতে $(-5a^2)$

সরল কর :

21. $5a^2x^2-(-15a^2x^2)$ 22. $-17x^2y^2z^2-23x^2y^2z^2$

23. $-35a^2b^2c^2-18a^2b^2c^2$.

24. $15x^2$ হইতে কত বিয়োগ করিলে $(-6x^2)$ বাকি থাকিবে ?

25. দেখাও যে. 0, −1, −2, −3, −4, −5 এই সংখ্যা-শ্রেণীর যে-কোন সংখ্যা উহার পরবর্তী যে-কোন সংখ্যা অপেক্ষা বৃহত্তর।

39. যোগের বিনিময় নিয়ম (Commutative Law)। কতকগুলি রাশিকে ক্রমশঃ যোগ করিয়া গেলে যে-যোগফল পাওয়া যায়, রাশিগুলিকে যদৃচ্ছাক্রমে সাজাইয়া যোগ করিলেও সেই যোগফল পাওয়া যায়।

যোগ-প্রক্রিয়ার এই নিয়মকে **বিনিময় নিয়ম** (Commutative Law) বলে। যথা, বামদিক্ হইতে ক্রমশঃ যোগ করিয়া গেলে

$$3a+(-5a)+12a=-2a+12a=10a.$$

আবার রাশিগুলির ক্রম পরিবর্তন করিয়া

$$3a+12a+(-5a)=15a+(-5a)=10a;$$

এইরূপ $(-5a)+12a+3a=+7a+3a=10a.$

40. যোগের সংযোগ নিয়ম (Associative Law)। কতকগুলি রাশিকে পর-পর যোগ করিয়া গেলে যে-যোগফল পাওয়া যায়, রাশিগুলিকে যদৃচ্ছাক্রমে কয়েকটি কয়েকটি করিয়া লইয়া পৃথক্ পৃথক্ যোগ দ্বারা প্রাপ্ত ফলগুলি যোগ করিলেও সেই যোগফল পাওয়া যায়।

যোগের এই নিয়মকে **সংযোগ নিয়ম** (Associative Law) বলে।

যথা, বামদিক্ হইতে ক্রমশঃ যোগ করিয়া গেলে

$$3a+(-5a)+12a+(-8a)=2a.$$

আবার প্রথম দুইটি পদ এবং শেষ দুইটি পদ পৃথক্-পৃথক্ যোগ করিয়া প্রাপ্ত যোগফলগুলি যোগ করিলেও যোগফল একই হয় :

$$\{3a+(-5a)\}+\{12a+(-8a)\}=(-2a)+4a=2a.$$

প্রথম তিনটি পদকে পৃথগ্‌ভাবে যোগ করিয়া প্রাপ্ত যোগফলের সহিত চতুর্থ পদ যোগ করিলেও যোগফল একই হয় :

$$\{3a+(-5a)+12a\}+(-8a)=10a+(-8a)=2a.$$

+, − চিহ্নযুক্ত রাশিমালার সরলীকরণ (Simplification)

41. রাশিমালা (Expression); ধনপদ (Positive Term); ঋণপদ (Negative Term)। কতকগুলি রাশি + বা − অথবা এই উভয় চিহ্ন দ্বারা যুক্ত

হইলে একটি **রাশিমালা** উৎপন্ন হয়। ইহার যে-যে-অংশ যোগ (+) বা বিয়োগ (−) চিহ্ন দ্বারা যুক্ত থাকে, উহাদিগের প্রত্যেকটিকে রাশিমালাটির **পদ** (Term) বলে।

যে-সকল পদের পূর্ব্বে যোগ (+) চিহ্ন থাকে, উহাদিগকে **ধনপদ** বলে এবং যে-সকল পদের পূর্ব্বে বিয়োগ (−) চিহ্ন থাকে, উহাদিগকে **ঋণপদ** বলা হয়।

পদের পূর্ব্বে কোন চিহ্ন না থাকিলে উহার পূর্ব্বে যোগ (+) চিহ্ন আছে, ধরিতে হয়। সাধারণতঃ কোন রাশিমালার প্রথম পদের পূর্ব্বে যোগ (+) চিহ্ন থাকিলে উহা লিখিত হয় না।

যথা, $6x-12y+5x$, এই রাশিমালাটিতে $6x$ এবং $5x$ ধনপদ এবং $12y$ ঋণপদ।

কোন রাশিমালাকে যতদূর সম্ভব সংক্ষেপে প্রকাশ করিলেই উহাকে সরল করা হইল বলা হয়।

42. **বীজগণিতীয় সমষ্টি (Algebraic sum)।** দুই বা তদধিক পদ-বিশিষ্ট কোন রাশিমালা উহার অন্তর্গত স্ব-স্ব চিহ্নযুক্ত পদগুলির **বীজগণিতীয় সমষ্টি** (Algebraic sum)।

যথা, (i) $a-b+c-e=a+(-b)+c+(-e)$. [অনু. 37]

অতএব $a-b+c-e=a,\ -b,\ c$ এবং $-e$ এর বীজগণিতীয় সমষ্টি।

এইরূপ (ii) $3x-2x+5x-9x=3x,\ -2x,\ +5x$ এবং $-9x$এর বীজগণিতীয় সমষ্টি।

উদাহরণ 1. যোগ কর : $12x, -5x, -7x, 4x, -3x$.

$$\text{যোগফল}=12x+(-5x)+(-7x)+4x+(-3x)$$
$$=(12x+4x)+\{(-5x)+(-7x)+(-3x)\} \quad [\text{ সংযোগ নিয়ম }]$$
$$=16x+(-15x)=x.$$

উদাহরণ 2. সরল কর : $3x-2x+15x-4x$.

প্রথম নিয়ম। বামদিক্ হইতে ডানদিকে চিহ্নগুলির কার্য্য ক্রমশঃ সম্পন্ন কারলে

$$3x-2x+15x-4x=x+15x-4x=16x-4x=12x.$$

দ্বিতীয় নিয়ম। যেহেতু $3x$ এবং $15x$ যোগ করিতে হইবে ; সুতরাং মোট যোগ করিতে হইবে $3x+15x$ বা $18x$; $2x$, $4x$ ইহাদের প্রত্যেকটিকে বিয়োগ করিতে হইবে, অর্থাৎ মোট বিয়োগ করিতে হইবে $2x+4x$ বা $6x$.

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা $=18x-6x=12x$.

অতএব এইরূপ অঙ্ক কষিবার নিম্নোক্ত নিয়ম পাওয়া গেল :

নিয়ম। কোন রাশিমালা সরল করিতে হইলে উহার ধনপদগুলির সমষ্টি হইতে ঋণপদগুলির সমষ্টি বিয়োগ কর।

উদাহরণ 3. সরল কর : $2x^2-(-3x^2)+(-5x^2)+6x^2-8x^2$.

প্রদত্ত রাশিমালা $=2x^2+3x^2-5x^2+6x^2-8x^2$. [অনু. 37]

ধনপদগুলির সমষ্টি $=2x^2+3x^2+6x^2=11x^2$.

ঋণপদগুলির সমষ্টি $=5x^2+8x^2=13x^2$.

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা $=11x^2-13x^2=-2x^2$.

উদাহরণ 4. $a=3, b=-7, c=-5$ হইলে $a-b+c=$ কত ?

$a-b+c=3-(-7)+(-5)=3+7-5=10-5=5$.

প্রশ্নমালা 12

যোগ কর [প্রথম সাতটি অঙ্কের ফল মুখে-মুখে বল] :

1. $15x, -9x, -8x, 2x$ 2. $-2ab, 3ab, 7ab, -8ab$
3. $3(x-y), -2(x-y), -5(x-y), 4(x-y)$
4. $2(a^2-b^2), -3(a^2-b^2), -4(a^2-b^2), 7(a^2-b^2)$.

সরল কর :

5. $4x-7x+3x$. 6. $3x^2+5x^2-7x^2$
7. $5xy-8xy-2xy$ 8. $2\sqrt{ab}-3\sqrt{ab}+5\sqrt{ab}-4\sqrt{ab}$
9. $8abc-10abc-23abc+36abc-17abc$.
10. $-3b^2+6b^2+(-13b^2)-(-14b^2)$
11. $-2a^2-(-3a^2)-5a^2+(-8a^2)$
12. $-3xyz-5xyz-10xyz-14xyz$
13. $32x^3-(-19x^3)+(-x^3)-(-21x^3)-15x^3$
14. $1{\cdot}71x^2y^2-23{\cdot}32x^2y^2+(-12{\cdot}68x^2y^2)-(-21{\cdot}67x^2y^2)+13{\cdot}62x^2y^2$

$a=3, b=-5, c=-8, d=7, e=-3$ হইলে নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :

15. $a+b+c+d+e$. 16. $a-b+c-d+e$
17. $-a-b-c+d+e$ 18. $-d-e-a+b+c$
19. $e-a-b-c-d$ 20. $-c-e+b-a-(-d)$.

গুণন (Multiplication)

43. ধনাত্মক রাশির গুণনের নিয়ম পূর্ব্বে (অনু. 23-26এ) প্রদত্ত হইয়াছে। এস্থলে গুণনের বিষয় আরও ব্যাপকভাবে আলোচিত হইবে।

44. **গুণনের সংজ্ঞা**। xকে a দ্বারা গুণ করার অর্থ: 'একক হইতে যে-প্রক্রিয়া দ্বারা a পাওয়া যায়, xএর উপর সেই প্রক্রিয়া প্রয়োগ করা'।

উদাহরণ। (1) $(-5a)\times 3=$ কত ?

(2) $4x\times(-3)=$ কত ?

(1) $3=1+1+1$;

$\therefore$ গুণনের সংজ্ঞানুসারে $(-5a)\times 3=(-5a)+(-5a)+(-5a)=-15a.$

(2) $-3=(-1)+(-1)+(-1)$; অর্থাৎ 1এর চিহ্ন-পরিবর্ত্তন করিয়া উহাকে তিনবার লইয়া যোগ করিলে -3 পাওয়া যায়। অতএব গুণনের সংজ্ঞানুসারে $4x$এর চিহ্ন-পরিবর্ত্তন করিয়া উহাকে তিনবার লইয়া যোগ করিলে $4x\times(-3)$ পাওয়া যাইবে।

$\therefore\ 4x\times(-3)=(-4x)+(-4x)+(-4x)=-12x.$

45. **গুণফলের চিহ্নবিষয়ক নিয়ম (Rule of Sign)**। গুণনের সংজ্ঞা হইতে নিম্নলিখিত গুণফলগুলি পাওয়া যায়:

(i) $(+3)\times(+4)=+(3\times 4),$

(ii) $(-3)\times(+4)=-(3\times 4),$

(iii) $(+3)\times(-4)=-(3\times 4),$

(iv) $(-3)\times(-4)=+(3\times 4).$

(i) এবং (ii) এর **প্রমাণ**। $4=1+1+1+1$; সুতরাং গুণনের সংজ্ঞানুসারে

$(+3)\times(+4)=3+3+3+3=12$ বা $+(3\times 4)$ …(i)

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $(-3)\times 4=-(3\times 4)$ …(ii)

(iii) এবং (iv)এর **প্রমাণ**। $-4=(-1)+(-1)+(-1)+(-1)$; অর্থাৎ 1এর চিহ্ন-পরিবর্ত্তন করিয়া উহাকে চারিবার লইয়া যোগ করিলেই -4 পাওয়া যায় ; কাজেই সংজ্ঞানুসারে $+3$এর চিহ্ন-পরিবর্ত্তন করিয়া উহাকে (অর্থাৎ -3কে) চারিবার লইয়া যোগ করিলেই $(+3)\times(-4)$ পাওয়া যাইবে। অতএব

$(+3)\times(-4)=(-3)+(-3)+(-3)+(-3)=-12$ বা $-(3\times 4)$ …(iii)

অনুরূপভাবে $(-3)\times(-4)=+(3\times 4).$ …(iv)

পাটীগণিতে দেখা গয়াছে যে, 44 অনুচ্ছেদোক্ত গুণনের সংজ্ঞা পূর্ণসংখ্যা এবং

ভগ্নাংশ উভয়ের পক্ষে প্রযোজ্য। অতএব উল্লিখিত, (i), (iv), (ii), (iii)-চিহ্নিত ফলগুলি সাধারণভাবে নিম্নলিখিতরূপে লেখা যায় :

a এবং b যে-কোন দুইটি ধনসংখ্যা হইলে

$$(+a)\times(+b)=+(ab);$$
$$(-a)\times(-b)=+(ab);$$
$$(-a)\times(+b)=-(ab);$$
$$(+a)\times(-b)=-(ab).$$

অতএব দুইটি রাশির গুণনে গুণ্য এবং গুণক সদৃশ চিহ্নযুক্ত (অর্থাৎ উভয়েই + কিংবা উভয়েই − চিহ্নযুক্ত হইলে উহাদের গুণফলের পূর্ব্বে + চিহ্ন এবং অসদৃশ চিহ্নযুক্ত হইলে গুণফলের পূর্ব্বে − চিহ্ন বসিবে।

ইহাই গুণফলের চিহ্নবিষয়ক নিয়ম।

অনুসিদ্ধান্ত। দুই বা তদধিক রাশির গুণনে রাশিগুলির পূর্ব্বে ধন-চিহ্ন কিংবা যুগ্মসংখ্যক ঋণ-চিহ্ন থাকিলে উহাদের গুণফলের পূর্ব্বে + চিহ্ন এবং অযুগ্মসংখ্যক ঋণ-চিহ্ন থাকিলে গুণফলের পূর্ব্বে − চিহ্ন বসিবে।

ঋণরাশির যুগ্মঘাত (even power) + চিহ্নযুক্ত এবং অযুগ্মঘাত (odd power) − চিহ্নযুক্ত হইবে।

যথা, $(+a)\times(+b)\times(+c)=+abc.$

$(+a)\times(-b)\times(-c)=+abc.$

$(+a)\times(-b)\times(-c)\times(-d)=-abcd.$

$(-a)^2=+a^2.$

$(-a)^3=-a^3$ ইত্যাদি।

দ্রষ্টব্য। ধনচিহ্ন (+) সাধারণতঃ উহ্য থাকে।

উদাহরণ 1. (i) $(-5)\times(-2)=+(5\times2)$ বা 10.

(ii) $$\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(+\frac{9}{16}\right)=-\frac{2\times9}{3\times16}=-\frac{3}{8}.$$

উদাহরণ 2. $(-3)\times(-5)\times8\times(-2)=-(3\times5\times8\times2)=-240.$

প্রশ্নমালা 13

মুখে-মুখে গুণফল স্থির কর :

1. $2\times(-3)$ 2. $(-3)\times(-4)$ 3. $(-2)\times3\times(-4)$
4. $(-3)\times(-4)\times(-5)$ 5. $(-2)\times(-3)\times(-4)\times(-5)$
6. $(-\frac{1}{2})\times(-\frac{2}{3})\times(-\frac{3}{4})$ 7. $(-\frac{5}{7})\times\frac{3}{5}\times(-\frac{4}{3})\times\frac{7}{4}$
8. $(-3)^2$ 9. $(-4)^3$ 10. $(-2)^4$ 11. $(-2)^2\times(-3)$
12. $(-2)^3\times(-3)^2$ 13. $(-\cdot2)\times\cdot3$
14. $(-\cdot3)\times(\cdot4)\times(-\cdot5)$ 15. $(-\cdot5)^4$.

46. গুণনের বিনিময় নিয়ম (Commutative Law)।

নিয়ম। দুই বা তদধিক রাশির গুণফল নির্ণয় করিতে হইলে রাশিগুলিকে ইচ্ছামত সাজাইয়া গুণ করা চলে।

যথা, $a\times b\times c=b\times a\times c=c\times b\times a$ ইত্যাদি।

এই নিয়মটি পূর্ব্বে (অনু. 24এ) ধনরাশির গুণনে সত্য বলিয়া প্রদর্শিত হইয়াছে। প্রকৃতপক্ষে ইহা যাবতীয় রাশির গুণনে প্রয়োগ করা যায়।

উদাহরণ। $(-4)\times5=5\times(-4)$, [$\because$ ইহারা প্রত্যেকে $=-20$.]
এইরূপ $(-6)\times(-9)=(-9)\times(-6)$, [$\because$ ইহারা প্রত্যেকে $=+54$.]
এইরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে,

$$(-2)\times(-5)\times9=(-5)\times(-2)\times9=9\times(-2)\times(-5).$$

47. গুণনের সংযোগ নিয়ম (Associative Law)। কতকগুলি রাশিকে পর-পর গুণ করিয়া গেলে যে-গুণফল পাওয়া যায়, রাশিগুলিকে কয়েকটি-কয়েকটি করিয়া লইয়া পৃথক্-পৃথক্ গুণ দ্বারা লব্ধ ফলগুলি পরে গুণ করিলেও সেই গুণফল পাওয়া যায়।

যথা, $a\times b\times c\times d=(a\times b)\times(c\times d)=a\times(b\times c)\times d$
$=a\times(b\times c\times d)$ ইত্যাদি।

পূর্ব্ববর্ত্তী অনুচ্ছেদের প্রণালীতে ইহা সহজে দেখান যায় যে, এই নিয়মটিও যাবতীয় রাশির গুণনে প্রযোজ্য।

48. ঘাত (Power); সূচক (Index)। কোন সংখ্যাকে উক্ত সংখ্যা দ্বারা এক, দুই, তিন, চারি,…বার ক্রমে গুণ করিয়া গেলে যে-গুণফলগুলি পাওয়া যায়,

তাহাদিগকে যথাক্রমে সংখ্যাটির দ্বিতীয়, তৃতীয় চতুর্থ···ঘাত (Power) বলে। যে-কোন সংখ্যা উক্ত সংখ্যার প্রথম ঘাত (First power)।

যথা, a — aএর প্রথম ঘাত।

$a \times a$ — aএর দ্বিতীয় ঘাত (Second power) বা **বর্গ** (Square).

$a \times a \times a$ — aএর তৃতীয় ঘাত (Third power) বা **ঘন** (Cube) ইত্যাদি।

$a \times a, a \times a \times a, a \times a \times a \times a, \cdots$কে সংক্ষেপে যথাক্রমে $a^2, a^3, a^4, \cdots$ লেখা হইয়া থাকে। এইরূপে লিখিত 2, 3, 4···কে যথাক্রমে দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুর্থ··· ঘাতের **সূচক** (Index) বলে। এই নিয়মে

$$a \times a \times a \cdots n \text{ বার} = a\text{এর } n\text{-তম-ঘাত} = a^n.$$

aএর প্রথম ঘাত $= a^1$; কিন্তু লিখিবার সময় a^1কে শুধু a লেখা হয়, '1' উহ্য থাকে।

49. গুণনের সূচক নিয়ম (Index law)।

(1) প্রমাণ করিতে পারা যায় যে, m এবং n দুইটি অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে

$$\boldsymbol{a^m \times a^n = a^{m+n}}.$$

প্রমাণ। সংজ্ঞানুসারে $a^2 = a \times a$ এবং $a^3 = a \times a \times a$.

অতএব $a^2 \times a^3 = (a \times a) \times (a \times a \times a)$

$= a \times a \times a \times a \times a,$ [সংযোগ নিয়ম দ্বারা]

$= a^5 = a^{2+3}.$

এইরূপ যেহেতু $a^m = a \times a \times a \times \cdots\cdots m$-সংখ্যক উৎপাদক ;

এবং $a^n = a \times a \times a \times \cdots\cdots n$-সংখ্যক উৎপাদক ;

$\therefore\ a^m \times a^n = (a \times a \times a \times \cdots m\text{-সংখ্যক উৎপাদক})$

$\times (a \times a \times a \times \cdots n\text{-সংখ্যক উৎপাদক})$

$= a \times a \times a \times a \times a \times a \times \cdots\cdots (m+n)\text{-সংখ্যক উৎপাদক}$

$= a^{m+n}.$

(2) m, n, p প্রত্যেকে ধনসংখ্যা হইলে প্রমাণ করিতে পারা যায় যে,

$$\boldsymbol{a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p}}$$

প্রমাণ। যেহেতু $a^m \times a^n = a^{m+n}$,

অতএব $a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n} \times a^p = a^{(m+n)+p} = a^{m+n+p}.$

এইরূপ $m, n, p, \cdots$ধনসংখ্যা হইলে

$$a^m \times a^n \times a^p \times \cdots = a^{m+n+p+\cdots}$$

(1) এবং (2) হইতে স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে,

গুণ্যরাশিগুলির aএর সূচকসমূহ যোগ করিলে উহাদের গুণফলে 'a'এর সূচক পাওয়া যায়। ইহাকেই গুণনের **সূচক নিয়ম** বলে।

দ্রষ্টব্য। $a=a^1$. সূচক 1 হইলে উহা সাধারণতঃ উহ্য থাকে।

অনুসিদ্ধান্ত। m এবং n প্রত্যেকে অখণ্ড ধনরাশি হইলে $(a^m)^n=a^{mn}$.

প্রমাণ। $(a^m)^n=a^m\times a^m\times a^m\cdots\cdots n$-সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত

$=a^{m+m+\cdots n\text{-সংখ্যক পদ পর্য্যন্ত}}=a^{mn}$.

উদাহরণ। (1) $a^5\times a^7=a^{5+7}=a^{12}$.

(2) $a\times a^9\times a^{12}=a^{1+9+12}=a^{22}$.

(3) $(a^3)^5=a^{3\times5}=a^{15}$.

প্রশ্নমালা 14

দেখাও যে,

1. $a^3\times a^5=a^8$ **2.** $a^7\times a^3=a^{10}$ **3.** $x^2.x^5=x^7$

4. $(a^2)^3=a^6$ **5.** $(a^5)^2=a^{10}$

মুখে-মুখে সরল কর :—

6. $a^5\times a^{10}$ **7.** $x^7\times x^{11}$ **8.** $b^2\times b^{10}$

9. $a^3\times a^2\times a^5$ **10.** $x^2\times x^3\times x^8$ **11.** $a^2.a^7.a^9.a^{11}$

12. $x^3.x^5.x^{19}.x^7.x^2$ **13.** $(a^4)^7$ **14.** $a^4.a^7$

15. $(a^8)^3$ **16.** $a^8\times a^3$ **17.** $(x^{11})^{11}$

18. $x^{11}\times x^{11}$ **19.** $\{(x^2)^3\}^4$ **20.** $\{(x^2x^3xx^5)^6\}^3$.

50. সরলরাশিসমূহের (monomialএর) গুণফল।

উদাহরণ 1. $3a^2b^3$কে $-5a^3b^5c$ দ্বারা গুণ কর।

$(3a^2b^3)\times(-5a^3b^5c)$

$=-\{(3a^2b^3)\times(5a^3b^5c)\}$. [চিহ্ন-বিষয়ক নিয়ম দ্বারা]

$=-\{3\times a^2\times b^3\times5\times a^3\times b^5\times c\}$, [সংযোগ-নিয়ম দ্বারা]

$=-\{3\times5\times a^2\times a^3\times b^3\times b^5\times c\}$, [বিনিময়-নিয়ম দ্বারা]

$=-\{(3\times5)\times(a^2\times a^3)\times(b^3\times b^5)\times c\}$, [সংযোগ-নিয়ম দ্বারা]

$=-15a^5b^8c$. [সূচক-নিয়ম দ্বারা]

উক্ত গুণনের প্রক্রিয়াটি নিম্নলিখিতরূপেও প্রকাশ করা যায় :

গুণ্য = $3a^2b^3$

গুণক = $-5a^3b^5c$

গুণফল = $-15a^5b^8c$.

লক্ষ্য কর যে, (1) গুণ্যরাশিগুলিতে অযুগ্মসংখ্যক ঋণচিহ্ন থাকিলে উহাদের গুণফলে '−' চিহ্ন হইবে ;

(2) গুণফলের সংখ্যা-সূচক সহগ = গুণ্যরাশিগুলির সংখ্যা-সূচক সহগসমূহের গুণফল ;

(3) গুণফলের কোন অক্ষরের সূচক

= গুণ্যরাশিগুলির উক্ত অক্ষরের সূচকসমূহের সমষ্টি ।

সহজে দেখা যায় যে, গুণ্যরাশিগুলির সংখ্যা দুইএর অধিক হইলেও এই 'নিয়ম' খাটিবে। অতএব কতকগুলি **সরল রাশির গুণফল-নির্ণয়ের নিয়ম** নিম্নলিখিতরূপ হইবে :

নিয়ম । (1) কতকগুলি সরল রাশিতে কোন ঋণচিহ্ন না থাকিলে কিংবা যুগ্মসংখ্যক ঋণচিহ্ন থাকিলে উহাদের গুণফলে '+' চিহ্ন এবং অযুগ্মসংখ্যক ঋণচিহ্ন থাকিলে গুণফলে '−' চিহ্ন বসিবে।

(2) রাশিগুলির সংখ্যা-সূচক সহগগুলিকে গুণ করিলে গুণফলের সংখ্যা-সূচক সহগ পাইবে।

(3) রাশিগুলির অন্তর্গত যে-কোন অক্ষরের সূচকসমূহ যোগ করিলে গুণফলে উক্ত অক্ষরের সূচক পাইবে।

উদাহরণ 2. $-2a^2b^3d$, $-3a^4b^2e$ এবং $-5a^3b^5f$এর গুণফল নির্ণয় কর।

$(-2a^2b^3d)\times(-3a^4b^2e)\times(-5a^3b^5f)$

$= -(2\times3\times5)\times a^{2+4+3}b^{3+2+5}def,$ [গুণনের নিয়ম দ্বারা]

$= -30a^9b^{10}def.$

প্রশ্নমালা 15

গুণফল লিখ : [1-11 প্রশ্নের উত্তর মুখে-মুখে বল] :

1. $5ab$; $2a$
2. $3xy$; $2y$
3. $6a^2b$; $5ab$
4. $-2x^3y^2$; $3xy^2$
5. $-5x^4y^3$; $-3x^2y$
6. $2abc$; $3xyz$
7. $-2mnp$; $-3abc$
8. $2abc$; $-3axy$
9. $-5abc$; $3abx$
10. $8x^2yz$; $4x^2y^2z^4$
11. $-11a^2b^3c^2$; $9ab^2c^2$

গুণ কর :

12. $-8a^2m$ এবং $3am^2$ 13. $(-9c^3d)^2$

14. $-3a^4b$ এবং $-5a^2b^3$ 15. $3x^2y^3$ এবং $5x^4y^7$

16. $-8x^3y^8$ এবং $7x^2y^9$ 17. $-15x^7y^3z^2$ এবং $-8x^4y^2z^3$

18. $(7x^2y^3z)^2$ 19. $(2a^2)^3$ 20. $-3a^3, -2a^2, 5a^7$

21. $(-2a^2b)^3$ 22. $(-4x^2y^3)^3$ 23. $-5yz, -6zx$ এবং $9xy$

24. $(-5a^2bc^3)\times 7a^3b^5c^9\times(-3ab^2c^4)$

25. $(-3x^2y^3z)\times(-5xy^5z^4)\times(-6x^2y^8z^9)$

26. $-3abc, -2bca$ এবং $8cab$ 27. $(x^my^n)^2$ এবং $x^{3m}y^{4n}$

28. $(-x^2)^4$ 29. $(-xy)^3$ 30. $(3a^2b)^4$ 31. $(-2x^2y^3)^4$

32. $(-3a^2b^3c)^4$ 33. $2a^2bcd, 3ab^2cd, 4abc^2d$ এবং $6abcd^2$

34. $-5a^2b^3c^7x, -8a^3b^2c^8x^2, 7a^3b^2c^8x^3$ এবং $-10ab^2c^2x^7$

35. $(-x^2)^3\times(-x^2y^3)^2\times(-x^4z^3)$.

ভাগ (Division)

51. 27 অনুচ্ছেদে প্রদত্ত ভাগের সংজ্ঞা যাবতীয় রাশির পক্ষে সত্য। a ভাজ্য, b ভাজক এবং x ভাগফল হইলে অর্থাৎ $a\div b=x$ হইলে

সংজ্ঞানুসারে $x\times b=a$. $\therefore$ $(x\times b)\div b=x$.

অতএব দুইটি রাশির গুণফলকে রাশিদ্বয়ের যে-কোন একটি দ্বারা ভাগ করিলে অপর রাশিটিই ভাগফল হইবে।

টীকা। 0 (শূন্য) দ্বারা ভাগ অর্থহীন।

ইহা নিম্নলিখিতরূপে সহজে বুঝা যায়।

মনে কর, aকে 0 দ্বারা ভাগ করাতে x ভাগফল হইল,

$\therefore$ (ভাগের সংজ্ঞা দ্বারা) $a=0\times x$,

কিন্তু $0\times$ যে-কোন সংখ্যা $=0$. অতএব $a=0$. ...(ক)

এখন যদি a (ভাজ্য) শূন্য না হয়, তাহা হইলে (ক)-চিহ্নিত ফল সত্য হইতে পারে না। অতএব শূন্যাতিরিক্ত কোন রাশিকে 0 দ্বারা ভাগ করা অর্থহীন।

আবার যদি $a=0$ হয়, তাহা হইলে (ক)-চিহ্নিত ফলটি x (অর্থাৎ ভাগফল)-নিরপেক্ষ ভাবে সত্য।

অর্থাৎ 0কে 0 দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল যে-কোন সংখ্যা হইতে পারে। অতএব 0কে 0 দ্বারা ভাগও অর্থহীন।

52. **ভাগফলের চিহ্ন-বিষয়ক নিয়ম (Rule of Signs)।** পূর্ব্ববর্ত্তী

অণুচ্ছেদে প্রদর্শিত হইয়াছে যে, দুইটি রাশির গুণফলকে উহাদের যে-কোন একটি দ্বারা ভাগ করিলে অপর রাশিটিই ভাগফল হইবে। যেহেতু

$(+a)\times(+b)=+ab$; $\therefore$ $+ab\div(+a)=+b$ অর্থাৎ $+(ab\div a)$.

$(-a)\times(+b)=-ab$; $\therefore$ $-ab\div(-a)=+b$ অর্থাৎ $+(ab\div a)$.

$(+a)\times(-b)=-ab$; $\therefore$ $-ab\div(+a)=-b$ অর্থাৎ $-(ab\div a)$.

$(-a)\times(-b)=+ab$; $\therefore$ $+ab\div(-a)=-b$ অর্থাৎ $-(ab\div a)$.

অতএব ভাজ্য এবং ভাজক সদৃশ-চিহ্নযুক্ত (অর্থাৎ উভয়েই +, কিংবা উভয়েই − চিহ্নযুক্ত) হইলে ভাগফলে '+' চিহ্ন এবং ভাজ্য ও ভাজক অসদৃশ-চিহ্নযুক্ত হইলে ভাগফলে '−' চিহ্ন হইবে। **ইহাই ভাগফলের চিহ্ন-বিষয়ক নিয়ম।**

উদাহরণ। (i) $(-12)\div3 \quad =-(12\div3)=-4.$

(ii) $(-15)\div(-5)=+(15\div5)=+3.$

(iii) $(+20)\div(-4)=-(20\div4)=-5.$

প্রশ্নমালা 16

(মৌখিক)

মুখে-মুখে ভাগফল বল :

1. $(-6)\div2$ **2.** $(-8)\div(-4)$ **3.** $12\div6$

4. $9\div(-3)$ **5.** $(-9)\div(-3)$ **6.** $(-16)\div(-8)$

7. $16\div(-8)$ **8.** $(-42)\div(-7)$ **9.** $(-6)\div(-18)$

10. $(-16)\div32$ **11.** $12\div(-48)$ **12.** $(-13)\div(-52)$

13. $5\div(-10)$ **14.** $(-15)\div(-90)$.

53. ভাগের সূচক নিয়ম (Index Law)। m এবং n অখণ্ড ধন-সংখ্যা এবং $m>n$ হইলে

$$a^m\div a^n=a^{m-n}.$$

অর্থাৎ ভাজ্যের aর সূচক হইতে ভাজকের aর সূচক বিয়োগ করিলে ভাগফলের aর সূচক পাওয়া যায়। ইহাই ভাগের সূচক নিয়ম।

প্রমাণ। যেহেতু $a^{m-n}\times a^n=a^{m-n+n}$ [গুণনের সূচক নিয়ম]

$=a^m$;

অতএব $a^m\div a^n=a^{m-n}$. [ভাগের সংজ্ঞা]

অনুসিদ্ধান্ত। $a^0=1$.*

কারণ $a^m \div a^m = a^{m-m} = a^0$,

কিন্তু $a^m \div a^m = 1$. $\therefore$ $a^0 = 1$.

উদাহরণ। (i) $a^9 \div a^7 = a^{9-7} = a^2$.

(ii) $a^{22} \div a^{19} = a^{22-19} = a^3$.

দ্রষ্টব্য। সূচকের উল্লেখ না থাকিলে উহা 1 ধরিবে। যথা, $a = a^1$.

প্রশ্নমালা 17

(মৌখিক)

ভাগফল মুখে-মুখে বল :

1. $a^3 \div a^2$ 2. $x^8 \div x^3$ 3. $y^{12} \div y^5$ 4. $a^5 \div a^2$
5. $a^{22} \div a^{19}$ 6. $b^{32} \div b^{29}$ 7. $x^{62} \div x^{58}$
8. $x^{101} \div x^{97}$ 9. $c^{28} \div c^{25}$ 10. $d^{15} \div d^{12}$.

54. প্রমাণ করিতে পারা যায় যে,

$$ax \div bx = a \div b.$$

অর্থাৎ $$\frac{ax}{bx} = \frac{a}{b}.$$

প্রমাণ। মনে কর, $a \div b = c$. অতএব ভাগের সংজ্ঞানুসারে $cb = a$.
এই সমান রাশিদ্বয়ের প্রত্যেকটিকে x দ্বারা গুণ করিলে $cbx = ax$.
অথবা $c \times bx = ax$; অতএব $ax \div bx = c$. [51 অনু.]

$$\therefore \quad ax \div bx = a \div b.$$

অর্থাৎ $$\frac{ax}{bx} = \frac{a}{b}.$$

প্রক্রিয়াটি এইরূপে প্রদর্শিত হয় : $\frac{ax}{bx} = \frac{a\cancel{x}}{b\cancel{x}} = \frac{a}{b}$.

এইরূপ $$\frac{axy}{bxy} = \frac{a \times \cancel{x} \times \cancel{y}}{b \times \cancel{x} \times \cancel{y}} = \frac{a}{b}.$$

অতএব ভাজ্য এবং ভাজক হইতে উহাদের সাধারণ উৎপাদকগুলি অপসারিত করিলেও ভাগফল ঠিক থাকে।

এই সূত্রের সাহায্যে সহজে ভাগফল নির্ণয় করা যায় ; কারণ ভাগফলকে ভগ্নাংশ-আকারে লিখিয়া এই সূত্রের সাহায্যে উহাকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্তিত করিলেই ভাগফল পাওয়া গেল।

---

* প্রকৃতপক্ষে $a^0=1$, এই সিদ্ধান্তটিকে **সংজ্ঞা** বলাই যুক্তিযুক্ত ; কারণ m এবং n অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলেই $a^m \times a^n = a^{m+n}$. অতএব $a^0 \times a^n = a^{0+n} = a^n$, এইরূপ লিখা অযৌক্তিক।
সুতরাং $a^0 = a^n \div a^n = 1$, এইরূপ লিখাও অযৌক্তিক।

দ্রষ্টব্য। পাটীগণিতে ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্তন করিবার জন্যও এই প্রক্রিয়া অবলম্বন করা হয়।

55. এক সরল রাশিকে অপর এক সরল রাশি দ্বারা ভাগ।

উদাহরণ 1. $-10a^2bcxyz \div 2abxy = -(10a^2bcxyz \div 2abxy)$

[চিহ্ন-বিষয়ক নিয়ম দ্বারা] $= -\dfrac{10a^2bcxyz}{2abxy}$

$$= -\frac{\overset{5}{\cancel{10}} \times \cancel{a} \times a \times \cancel{b} \times c \times \cancel{x} \times \cancel{y} \times z}{\cancel{2} \times \cancel{a} \times \cancel{b} \times \cancel{x} \times \cancel{y}} = -5 \times a \times c \times z = -5acz.$$

উদাহরণ 2. $-28x^7y^9$কে $7x^5y^3$ দ্বারা ভাগ কর।

$-28x^7y^9 \div 7x^5y^3 = -(28x^7y^9 \div 7x^5y^3)$, [চিহ্ন-বিষয়ক নিয়ম]

$$= -\frac{28x^7y^9}{7x^5y^3} = -\frac{\overset{4}{\cancel{28}} \times \cancel{x^5} \times x^{7-5} \times \cancel{y^3} \times y^{9-3}}{\cancel{7} \times \cancel{x^5} \times \cancel{y^3}}$$

[$\because$ $x^7 = x^5 \times x^{7-5}$ এবং $y^9 = y^3 \times y^{9-3}$

$= -4x^{7-5}y^{9-3}$ বা $-4x^2y^6$ [সাধারণ উৎপাদকগুলিকে অপসারিত করিয়া]।

উদাহরণ 2এ লক্ষ্য কর যে,

(1) চিহ্ন-বিষয়ক নিয়ম দ্বারা ভাগফলের চিহ্ন ঠিক করা হইল।

(2) ভাজ্যের সংখ্যা-সূচক সহগকে ভাজকের সংখ্যা-সূচক সহগ দ্বারা ভাগ করিয়া ভাগফলের সংখ্যা-সূচক সহগ পাওয়া গেল।

(3) ভাজ্যের xএর সূচক হইতে ভাজকের xএর সূচক বিয়োগ করিয়া ভাগফলের xএর সূচক পাওয়া গেল এবং ভাজ্যের yএর সূচক হইতে ভাজকের yএর সূচক বিয়োগ করিয়া ভাগফলের yএর সূচক পাওয়া গেল।

অপর যে-কোন দুইটি সরল রাশির ভাগেও অনুরূপ নিয়ম লক্ষ্য করা যাইবে। অতএব এইরূপ ভাগের নিয়ম নিম্নলিখিতরূপ হইবে:

নিয়ম। (1) চিহ্ন-বিষয়ক নিয়ম দ্বারা ভাগফলের চিহ্ন স্থির কর।

(2) ভাজ্যের সংখ্যা-সূচক সহগকে ভাজকের সংখ্যা-সূচক সহগ দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফলের সংখ্যা-সূচক সহগ পাইবে।

(3) ভাজ্যের অন্তর্গত কোন অক্ষরের সূচক হইতে ভাজকের

অন্তর্গত উক্ত অক্ষরের সূচক বিয়োগ করিলে ভাগফলে উক্ত অক্ষরের সূচক পাইবে।

দ্রষ্টব্য। (i) অক্ষরের উপর সূচকের উল্লেখ না থাকিলে উহাকে '1' ধরিতে হয়। যথা, $a=a^1$.

(ii) ভাজ্য কিংবা ভাজকে কোন অক্ষর না থাকিলে উহার সূচক শূন্য (0) ধরিতে হইবে, [যেহেতু (যে-কোন সংখ্যা)$^0=1$.]

(iii) সংখ্যা-সূচক সহগের উল্লেখ না থাকিলে উহাকে '1' ধরিতে হয়। যথা, $a=1.a$.

উদাহরণ 3. $15x^9y^5z^6$কে $-5x^7y^2z^5$ দ্বারা ভাগ কর।
এস্থলে ভাগফলে '$-$' চিহ্ন হইবে ;
এবং ভাগফলের সংখ্যা-সূচক সহগ $=15\div5=3$;
অতএব নির্ণেয় ভাগফল $=-3x^{9-7}y^{5-2}z^{6-5}=-3x^2y^3z$.

উদাহরণ 4. $-\frac{3}{8}a^9b^7c^8x^3y^2$কে $-\frac{9}{16}a^5b^7c^6y$ দ্বারা ভাগ কর।
এস্থলে ভাগফলে '$+$' চিহ্ন হইবে ;

এবং উহার সংখ্যা-সূচক সহগ $=\frac{3}{8}\div\frac{9}{16}=\frac{3}{8}\times\frac{16}{9}=\frac{2}{3}$;

অতএব ভাগফল $=+\frac{2}{3}a^{9-5}b^{7-7}c^{8-6}x^{3-0}y^{2-1}$
$=\frac{2}{3}a^4c^2x^3y$, [$\because\ b^{7-7}=b^0=1$; $y^1=y$]

উদাহরণ 5. সরল কর : $5x^4\div10x^3\times12x^2$.
চিহ্নগুলির কার্য্য বামদিক্ হইতে ডানদিকে ক্রমশঃ সম্পন্ন করিতে হয়।

$5x^4\div10x^3\times12x^2$

$=\frac{5}{10}x^{4-3}\times12x^2$ [ভাগের নিয়ম]

$=\frac{1}{2}x\times12x^2$

$=\left(\frac{1}{2}\times12\right)x^{1+2}$ [গুণের নিয়ম]

$=6x^3$.

উদাহরণ 6. সরল কর :

$$18x^4y^4 \div 2xy - 10x^5y^5 \div 5x^2y^2 + 12x^6y^4 \div 4x^3y.$$

কতকগুলি রাশি +, −, ×, ÷ চিহ্ন দ্বারা যুক্ত থাকিলে প্রথমে × এবং ÷ চিহ্নের কার্য্য সম্পন্ন করিতে হয় এবং সর্ব্বশেষে +, − চিহ্নের কার্য্য করিতে হয়।

$18x^4y^4 \div 2xy = 9x^{4-1}y^{4-1} = 9x^3y^3.$ [ভাগের নিয়ম]

$10x^5y^5 \div 5x^2y^2 = 2x^{5-2}y^{5-2} = 2x^3y^3.$

$12x^6y^4 \div 4x^3y = 3x^{6-3}y^{4-1} = 3x^3y^3.$

∴ প্রদত্ত রাশিমালা $= 9x^3y^3 - 2x^3y^3 + 3x^3y^3.$

$= 10x^3y^3.$ [সরল করিয়া]

প্রশ্নমালা 18

অণু. 55র উদাহরণ 1এর প্রণালীতে ভাগফল নির্ণয় কর :

1. $6abxy \div (-3ax)$
2. $-10a^2bc \div (-5ac)$
3. $-8x^2yz \div 4xyz$
4. $-15abcxy \div (-5bcy)$
5. $-20a^2b^2c \div (-5ab^2)$
6. $-24x^2y^2z^2 \div 6xyz^2$
7. $-51abcxyz \div 17abxy$
8. $-35x^3y^2z^2 \div (-7x^2yz^2).$

অণু. 55এ প্রদত্ত নিয়মে ভাগ কর [9-18 প্রশ্নের উত্তর মুখে-মুখে বল] :

9. $(-8x^2) \div 2x$
10. $(-15a^4) \div 5a^2$
11. $16x^5 \div (-8x^3)$
12. $24a^6 \div 12a^4$
13. $50a^7 \div 10a^3$
14. $80x^9 \div (-16x^5)$
15. $(-6x^3y^3) \div (-3x^2y^2)$
16. $(-15x^3y^3z^3) \div (-5x^2y^2z^2)$
17. $-24a^4b^3c^2 \div (-8a^2b^2c)$
18. $(-16a^6b^4c^3) \div 32a^4b^3c^2$
19. $-\frac{6}{25}a^3b^2 \div \frac{3}{20}a^2b$
20. $\frac{15}{16}m^4n^3 \div (-\frac{3}{8}m^3n)$
21. $-\frac{36}{35}a^5b^4c^3d \div \frac{12}{7}a^4b^3c^2$
22. $-80m^4n^3p^2qr \div 32m^3n^3p^2q$

সরল কর :

23. $15a^3 \div 3a^2 \times 2a^5$
24. $10x^4 \times 3x^5 \div 6x^7.$
25. $12x^6y^4 \div 6x^4y^2 \times 9x^2y^2$
26. $yz \times zx \times xy \div x^2y^2z^2$
27. $12x^2 \div 2x - 8x^3 \div 4x^2 + 9x^4 \div 3x^3$
28. $16a^4 \div 8a^2 + 9a^3b \div 3ab - 12a^2bc \div 4bc.$
29. $27x^6 \div 9x^2 - 15x^5y \div (-5xy) + 12x^4mn \div (-6mn).$

বিবিধ প্রশ্নমালা (ক)

I

1. $a=3, b=2, c=4$ হইলে $b\times c\div a+c\times a\div b+a\times b\div c=$ কত ?
2. a^3 এবং $3a$এর মধ্যে প্রভেদ কি ? $a=4$ হইলে $a^3-3a=$ কত ?
3. x গজ y ফুটে কত ফুট ? কত গজ ?
4. $3x, -5x, 8x, -15x, 27x$এর যোগফল নির্ণয় কর।
5. রৈখিক প্রণালীতে সরল কর : $5a-7a+(-3a)-(-8a)$.
6. m এবং n অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে প্রমাণ কর যে, $a^m\times a^n=a^{m+n}$.
7. সরল কর : (ক) $3a^3b^4\times 5a^2b^5$; (খ) $12x^5y^3\div 4x^3y^2$.
8. $x=3$ হইলে $5x^6\div 4x^5\times 10x^2=$ কত ?

II

1. m এবং n অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে এবং m n হইতে বৃহত্তর হইলে প্রমাণ কর যে, $a^m\div a^n=a^{m-n}$.

2. xy, x^y, yx, y^xএর প্রভেদ কি ? $x=2, y=3$ হইলে $xy-x^y+yx-y^x$এর মান নির্ণয় কর।

3. প্রমাণ কর যে, $+(-3)=-3$ এবং $-(-3)=+3$.

4. $a-b$ এবং $a\sim b$এ প্রভেদ কি ? $a=7, b=9$ হইলে $a-b$, $a\sim b$ এবং $b-a$এর মান নির্ণয় কর।

5. $a\div b\times c$, $a\div bc$ এবং $a\div(b\times c)$এর প্রত্যেকটি দ্বারা কি বুঝায় ? $a=24, b=4, c=3$ হইলে $a\div b\times c-a\div bc+a\div(b\times c)$এর মান নির্ণয় কর।

6. $y=2x+3$; যদি $x=0, 1, 2, 3, 4$ অথবা 5 হয়, তাহা হইলে yএর মানগুলি নির্ণয় কর এবং উহাদিগকে xএর অনুরূপ মানের ঠিক নিম্নে স্থাপন করিয়া একটি তালিকা প্রস্তুত কর।

7. $a<b$ দ্বারা কি বুঝায় ? নিম্নলিখিত রাশিগুলিকে মানের নিম্নগক্রমে সাজাও : $1, 5, -2, -5, 7, -16$.

8. একব্যক্তির প্রথমে x টাকা লাভ, পরে y টাকা ক্ষতি হইল। তাহার মোট কত লাভ বা ক্ষতি হইল ?

প্রমাণ কর যে, $x+(-y)=(-y)+x$.

III

1. m এবং n যে-কোন দুইটি অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে প্রমাণ কর যে,
$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

2. বীজগণিতীয় সমষ্টি কাহাকে বলে ?

$3\sqrt{a^2bc} - 7\sqrt{a^2bc} + (-9\sqrt{a^2bc}) - (-4\sqrt{a^2bc}) + 6\sqrt{a^2bc}$এর বীজগণিতীয় সমষ্টি নির্ণয় কর ; এবং $a=2,\ b=5,\ c=20$ হইলে রাশিমালাটির মান নির্ণয় কর।

3. $2\sqrt{a}$ এবং $\sqrt[2]{a}$এ প্রভেদ কি ? $a=64$ হইলে $2\sqrt{a} - \sqrt[2]{a} =$ কত ?

4. $a=2,\ b=3$ হইলে $42 - 4a + 23 - 2b + 432 - 4ba$এর মান নির্ণয় কর।

5. $x=4,\ y=5$ হইলে দেখাও যে, $\dfrac{y^3 - x^3}{y - x} = y^2 + yx + x^2$.

6. $x=2,\ y=5,\ z=6$ হইলে নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :

(1) $x(y-z) + y(z-x) + z(x-y)$;

(2) $\dfrac{y-z}{yz} + \dfrac{z-x}{zx} + \dfrac{x-y}{xy}$;

(3) $(y+z-2x) + (z+x-2y) + (x+y-2z)$.

সরল কর :

7. $5(a^2)^6 - 3(a^3)^4 + 6(a^6)^2 - 2(a^4)^3$

8. $2yz \times 3zx \times 5xy - (3xyz)^2 + 2x^2yz \times 3yz - 6xy^2z \times 2zx + 4xyz^2 \times 5xy$.

IV

1. a এবং b অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে প্রমাণ কর যে, $a \times b = b \times a$.

2. $x=3,\ y=2,\ z=1,\ a=0$ হইলে $\dfrac{x^{yz} + y^{zx} + z^{xy}}{(xyz)^a}$এর মান নির্ণয় কর।

3. $x=1,\ 2$ অথবা 3 হইলে প্রমাণ কর যে, প্রত্যেকস্থলে
$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$$

4. রৈখিক প্রণালীতে যোগের বিনিময় নিয়ম প্রমাণ কর।

দেখাও যে, $2a + (-6a) = -4a$.

5. সরল কর : $2x \times (-3y) \times (-5z) \times (-7yz) \times 3zx \times 6xy$.

6. সরল কর : $2xyz - 3xyz + (-8xyz) - (-9xyz) + 6xyz$.

7. $a=4, b=5, c=16$ হইলে

$(\sqrt{a}+b+c)(\sqrt{a+b}+c)\sqrt{a+b+c}$ এর মান নির্ণয় কর।

8. $a=-3, \quad b=5, \quad c=-2$ হইলে $a^3+b^3+c^3-3abc$এর মান নির্ণয় কর।

V

1. সদৃশ পদ কাহাকে বলে? সদৃশ পদসমূহের সমষ্টি নির্ণয় করিবার নিয়ম বল :

সরল কর : $\dfrac{3x^2y^2-8x^2y^2+16x^2y^2-9x^2y^2}{5xy-7xy+6xy-2xy}$.

2. সরল কর : $8x^3y^2z^4 \div 4x^2yz^3 \times 3x^2yz \div 6x^2y^2z^2$.

3. $a=5, b=-7, c=-2$ হইলে

$(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$এর মান নির্ণয় কর।

4. একব্যক্তির নিকট x টাকা আছে। সে উহা হইতে y টাকা ব্যয় করিলে তাহার কত বাকি থাকিবে? সে আরও 10 টাকা বেশী ব্যয় করিলে কত বাকি থাকিত?

5. সরল কর : $a-[a-\{a-(a-\overline{-a})\}]$.

6. সরল কর : $(a)(-2a^2)(3a^3)(-4a^4)$.

7. ভাগের সাধারণ সংজ্ঞা বল। দেখাও যে, 0 (শূন্য) দ্বারা ভাগ অর্থহীন।

8. (i) xকে 3 দ্বারা গুণ করাতে গুণফল 12 হইল ; x কত?

(ii) xকে a দ্বারা গুণ করাতে গুণফল b হইল ; x কত?

VI

1. ধনরাশি এবং ঋণরাশি কাহাকে বলে? দৃষ্টান্ত দ্বারা বুঝাইয়া দাও।

দেখাও যে, $-(-a)=+a$ এবং $+(-a)=-a$.

লৈখিকভাবে প্রমাণ কর যে, $3x+(-2x)+(-5x)+6x=2x$.

2. $a=9, b=16, c=\frac{25}{16}$ হইলে নিম্নলিখিত রাশিটির মান নির্ণয় কর :

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}+\frac{\sqrt{c+a}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}.$$

3. পাটীগণিতীয় সংখ্যা এবং বীজগণিতীয় প্রতীকের মধ্যে পার্থক্য কি?

15কে দুই অংশে বিভক্ত করা হইল। এক ভাগ x হইলে অপর ভাগ কত?

4. সরল কর : $-[-\{-(-a)\}]$.

5. পরম মান কাহাকে বলে? a এবং $-a$এর পরম মান সর্ব্বত্র a হইবে কিনা বুঝাইয়া বল। নিম্নলিখিত রাশিগুলির পরম মান নির্ণয় কর :

$$-3\,;\ -7\,;\ 5\,;\ -11\,;\ -19\,;\ +20.$$

6. $a>b$ দ্বারা কি বুঝায় ? দেখাও যে, (i) $a=3, b=7$ হইলে অথবা (ii) $a=-2,\ b=-4$ হইলে বা (iii) $a=8, b=5$ হইলে প্রত্যেকস্থলে $a^2+b^2>2ab$.

7. প্রমাণ কর যে, $ax\div bx=a\div b$ এবং $a\div b=a\times\frac{1}{b}$.

8. যোগের সংযোগ-নিয়ম ও বিনিময়-নিয়ম বল এবং দৃষ্টান্ত দ্বারা বুঝাইয়া দাও।

VII

1. পাটীগণিত এবং বীজগণিতে গুণফল লিখিবার প্রণালীর কোন পার্থক্য থাকিলে দৃষ্টান্ত দ্বারা বুঝাইয়া দাও।

$a=4, b=9$ হইলে $\frac{ab}{49}-\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{49}}+\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{49}}$এর মান নির্ণয় কর।

2. 'ঘাত' এবং 'সূচক' কাহাকে বলে ? aএর সূচক কত, সহগ কত ? $a^0=$ কত ? $a=1, b=2, c=3$ হইলে $a^{bc}+b^{ca}+c^{ab}$এর মান নির্ণয় কর।

3. $x=3$ অথবা -4 হইলে $2x^4+3x^3-9x^2-6x-30$এর মান কত ?

4. সাধারণ চারি নিয়ম কাহাকে বলে ? ক্রিয়া-সূচক চিহ্নের এবং ভেদচিহ্নের (Signs of affectionএর) পার্থক্য বুঝাইয়া বল।

5. $n=-4$ হইলে $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$এর মান নির্ণয় কর।

6. টেলিগ্রাম করিতে প্রথম a কিংবা উহা অপেক্ষা কম শব্দের জন্য b আনা এবং প্রত্যেক অতিরিক্ত শব্দের জন্য 1 আনা দিতে হয়। টেলিগ্রামে মোট x শব্দ থাকিলে কত খরচ লাগিবে ?

7. কোন ঘরের দৈর্ঘ্য x ফুট এবং প্রস্থ y ফুট, উহার মেঝের ক্ষেত্রফল কত বর্গফুট ? মেঝেতে প্রস্তর বসাইতে প্রতি-বর্গফুটে z টাকা-হিসাবে কত খরচ লাগিবে ?

8. সরল কর : $\frac{xy^2z^3}{xyz\times yz\times z}+\frac{yz^2x^3}{yzx\times zx\times x}+\frac{zx^2y^3}{zxy\times xy\times y}$.

VIII

1. দেখাও যে, (i) $a\div b\times c=a\times c\div b$;
(ii) $a\div b\div c=a\div c\div b$.

2. $s=\frac{v^2-u^2}{2f}$ হইলে sএর মান নির্ণয় কর, যখন

(i) $u=5, v=8, f=2$;

(ii) $u=6, v=9, f=4$;

(iii) $u=8, v=9, f=1$.

3. সরল কর : $\frac{9xyz-8xyz+7xyz-6xyz}{15yz-5yz+10yz-19yz}$.

4. x বৎসর পূর্ব্বে কোন ব্যক্তির বয়স y বৎসর ছিল। z বৎসর পরে তাহার বয়স কত হইবে ?

5. গুণনের সাধারণ সংজ্ঞা বল এবং উহা দ্বারা প্রমাণ কর যে,

$$-5\times(-4)=20,$$

এবং $\quad 4\times3=12.$

6. দেখাও যে, $x=\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ হইলে $8x^3-24x^2+22x-6=0$.

7. মান নির্ণয় কর : $x-[x-\{x-(x-\overline{x-x})\}]$.　　[বো. প্র., 1876]

8. $a=1, b=3, c=5$ হইলে

$\{a-(b-c)\}^2+\{b-(c-a)\}^2+\{c-(a-b)\}^2$এর মান নির্ণয় কর।

[মা. প্র., 1858]

পঞ্চম অধ্যায়

সাধারণ চারি নিয়ম (The Four Simple Rules)

(মিশ্ররাশিমালা-বিষয়ক)

56. **বীজগণিতীয় রাশিমালা (Algebraic Expressions); পদ (Term)।** বীজগণিতীয় সংখ্যা এবং ক্রিয়াসূচক চিহ্নসমূহের যে-কোন অর্থবোধক সংযোগকে **বীজগণিতীয় রাশিমালা** বলে। কখন-কখনও ইহাকে সংক্ষেপে **বীজগণিতীয় রাশি** (Algebraic Quantity) বা **রাশি** (Quantity)ও বলা হয়।

রাশিমালার যে-যে অংশ যোগ (+) অথবা বিয়োগ (−)-চিহ্ন দ্বারা যুক্ত থাকে, তাহাদিগের প্রত্যেকটিকে ঐ রাশিমালার **পদ** (Term) বলে।

যথা, (i) $a+b$, একটি রাশিমালা ; a, b এই দুইটি ইহার পদ।

এইরূপ (ii) $\sqrt{abc}-\frac{bc}{e}+d\div f\times g$ একটি রাশিমালা এবং

$\sqrt{abc}$, $\frac{bc}{e}$, $d\div f\times g$ এই তিনটি ইহার পদ।

রাশিমালা দুই প্রকার, **সরল** (Simple) এবং **মিশ্র** (Compound)। যে রাশিমালায় শুধু একটি পদ থাকে, উহাকে **সরল রাশি** (Simple Expression) অথবা **একপদ রাশি** (Monomial) বলা হয়।

যে-রাশিমালায় দুই বা তদধিক পদ থাকে, উহাকে **মিশ্র রাশিমালা** (Compound Expression) বলা হয়।

যথা, $3x$, $5ab$, $a\div b\times c$, ইহাদের প্রত্যেকটি সরল বা একপদ রাশি।

$3+2y$, একটি মিশ্ররাশিমালা, (যেহেতু ইহার দুইটি পদ) ;

$8abc-2xy+3fgh$, একটি মিশ্ররাশিমালা, (যেহেতু ইহার পদ তিনটি)।

57. ঘাতের উর্দ্ধক্রম বা অধঃক্রম-অনুসারে সজ্জিত রাশিমালা (Expressions arranged in ascending or descending power of a letter)। কোন রাশিমালায় একই অক্ষরের বিভিন্ন ঘাত বর্ত্তমান থাকিলে উহার পদগুলিকে এরূপভাবে সাজান যায়, যেন ঘাতের সূচকগুলি (indices) বামদিক্ হইতে ডানদিকে ক্রমশঃ হ্রাস পায়। এরূপে সজ্জিত রাশিমালাকে ঘাতের অধঃক্রম-অনুসারে সজ্জিত (arranged in descending power) বলা হয়। ইহার বিপরীতভাবে সজ্জিত হইলে অর্থাৎ সূচকগুলি বামদিক্ হইতে ডানদিকে ক্রমশঃ বৃদ্ধি পাইলে রাশিমালাটি ঘাতের উর্দ্ধক্রম-অনুসারে সজ্জিত (arranged in ascending power) বলা হয়।

x যে-কোন সংখ্যা হইলে $x^0=1$. অতএব পদে কোন অক্ষরের উল্লেখ না থাকিলে ঐ পদটিতে অক্ষরটির সূচক 0 ধরা যায়।

(i) $5x^4+2x^3-3x^2+x+3$, এই রাশিমালাটি x-এর ঘাতের অধঃক্রমে সজ্জিত।

(ii) $3+x-3x^2+2x^3+5x^4$, এই রাশিমালাটি x-এর ঘাতের উর্দ্ধক্রমে সজ্জিত।

উদাহরণ। $x^3-3xy^2-2y+5x^2y^4$কে (i) xএর ঊর্দ্ধক্রম-অনুসারে সাজাও ; (ii) yএর ঘাতের অধঃক্রম-অনুসারে সাজাও।

(i) তৃতীয় পদটিতে x নাই, অর্থাৎ উহাতে xএর সূচক $=0$.

অতএব উত্তর $=-2y-3xy^2+5x^2y^4+x^3$.

(ii) প্রথম পদটিতে y নাই, অর্থাৎ উহাতে yএর সূচক $=0$.

অতএব উত্তর $=5x^2y^4-3xy^2-2y+x^3$.

দ্রষ্টব্য। রাশিমালার প্রথম পদটির পূর্ব্বে ধনচিহ্ন (+) থাকিলে ঐ চিহ্নটি সাধারণতঃ লিখিত হয় না।

প্রশ্নমালা 19

নিম্নলিখিত রাশিমালাগুলি xএর ঘাতের (i) অধঃক্রম এবং (ii) ঊর্দ্ধক্রম-অনুসারে সাজাও :

1. $3x+2+x^2$ **2.** $3x^2+15x-9x^3$ **3.** $2x+5+3x^2+6x^3$

4. $8x-9x^2+15x^3-17$ **5.** $3+2x^4+9x^2-15x^3+17x$

6. $20x^2y^2+9xy^3+3y^4+2x^4-3x^3y$

7. $2x^6+y^4+4x^3y^2+20x^5y+3xy^6$

8-9. 6ষ্ঠ এবং 7ম প্রশ্নের রাশিগুলিকে yএর ঘাতের (i) অধঃক্রম এবং (ii) ঊর্দ্ধক্রম-অনুসারে সাজাও।

10. নিম্নলিখিত রাশিমালাকে (i) x, (ii) y, (iii) zএর ঘাতের অধঃক্রম-অনুসারে সাজাও।

$$2x^4-3x^3yz+4x^2y^2z^5+5xy^4z^2+x^5y^3z^4-7x^6y^5z^3.$$

58. মিশ্ররাশিমালার (Compound Expressionsএর) যোগের নিয়ম।*

(1) পদসমূহ অসদৃশ হইলে রাশিমালাগুলিকে শুধু '+' চিহ্ন দ্বারা যুক্ত করিলেই যোগফল লেখা হইবে।

উদাহরণ 1. $a+b+c$ এবং $d+e+f$এর যোগফল নির্ণয় কর।

নির্ণেয় যোগফল $=(a+b+c)+(d+e+f)=a+b+c+d+e+f$.

[ইহা আর সরল করা যায় না]

(2) পদসমূহ অসদৃশ না হইলে রাশিমালাগুলিকে '+' চিহ্ন দ্বারা যুক্ত করিয়া পর-পর লিখিতে হয় এবং উহাদের একই শ্রেণীর সদৃশ পদগুলিকে একত্র করিয়া (36 অণুচ্ছেদোক্ত নিয়মে) যোগ করিতে হয়।

---

* এস্থলে শিক্ষার্থিগণ সদৃশ পদের যোগবিষয়ক 36 অণুচ্ছেদ আবার পাঠ করিয়া লইবে।

এখন প্রাপ্ত যোগফলগুলি নিজ-নিজ চিহ্নের সহিত পাশাপাশি লিখিলেই নির্ণেয় যোগফল পাওয়া যাইবে।

নিম্নের উদাহরণ হইতে এই প্রণালীর যুক্তি বুঝা যাইবে।

উদাহরণ 2. $4a+2b+3c$, $2a+7b+9c$ এবং $5a+9b+8c$ যোগ কর।

নির্ণেয় যোগফল $=(4a+2b+3c)+(2a+7b+9c)+(5a+9b+8c)$

$=4a+2b+3c+2a+7b+9c+5a+9b+8c$,

[যোগের সংযোগ-নিয়ম (40 অনু.)]

$=4a+2a+5a+2b+7b+9b+3c+9c+8c$,

[বিনিময়-নিয়ম (39 অনু.)]

$=(4a+2a+5a)+(2b+7b+9b)+(3c+9c+8c)$,

[সংযোগ-নিয়ম]

$=11a+18b+20c$.

অথবা, উল্লিখিত প্রক্রিয়াটি নিম্নলিখিতভাবেও সম্পন্ন করা যায়:

$$\begin{array}{r} 4a+2b+\ 3c \\ 2a+7b+\ 9c \\ \underline{5a+9b+\ 8c} \\ \text{যোগফল}=11a+18b+20c. \end{array}$$

ব্যাখ্যা। রাশিমালাগুলিকে একটির নীচে একটি করিয়া এরূপভাবে সাজান হইয়াছে, যেন একই রকমের সদৃশ পদগুলি একই পাটিতে (columnএ) থাকে। সকলের নীচে একটি রেখা টানিয়া প্রত্যেক পাটির যোগফল ঐ পাটিতেই রেখাটির নীচে লিখিত হইয়াছে। অতএব যোগের নিম্নলিখিত নিয়ম সুবিধাজনক:

নিয়ম। কতকগুলি মিশ্ররাশিমালার যোগফল নির্ণয় করিতে হইলে উহাদিগকে একটির নীচে একটি করিয়া এরূপভাবে সাজাও, যেন উহাদের একই শ্রেণীর সদৃশ পদগুলি (like terms) একই পাটিতে (columnএ) থাকে। সর্ব্বনিম্নরাশিমালার নীচে একটি রেখা টান; এক্ষণে প্রত্যেক পাটির যোগফল নিজ-নিজ চিহ্নের সহিত রেখাটির নিম্নে স্থাপন করিলেই যোগফল লেখা হইবে।

উদাহরণ 3. $5a+2b+3c$, $3b+2a-3c$ এবং $-7b-3a+4d$এর সমষ্টি নির্ণয় কর।

প্রথম রাশিমালা $= 5a+2b+3c$

দ্বিতীয় রাশিমালা $= 2a+3b-3c$ (পদগুলিকে সাজাইয়া)

তৃতীয় রাশিমালা $= \underline{-3a-7b\quad +4d}$ (পদগুলিকে সাজাইয়া)

যোগফল $= 4a-2b+0+4d=4a-2b+4d$.

[ব্যাখ্যা। যোগফলে aএর সহগ $=5+2-3=4$;
bএর সহগ $=2+3-7=-2$;
cএর সহগ $=3-3=0$.]

উদাহরণ 4. $m=4$, $n=3$, $p=5$, $q=2$ হইলে নিম্নলিখিত রাশিগুলির যোগফলের মান নির্ণয় কর।

$27m^5+48m^3pq-61mn^2pq$, $-33m^5-36m^3pq-23mn^2pq$ এবং $6m^5-12m^3pq+85mn^2pq$.

$$\begin{array}{rrrrr} & 27m^5 & +48m^3pq & -61mn^2pq \\ & -33m^5 & -36m^3pq & -23mn^2pq \\ & 6m^5 & -12m^3pq & +85mn^2pq \\ \hline \text{যোগফল} = & 0 & +\ 0 & +\ mn^2pq \end{array}$$

$=mn^2pq$
$=4\times 3^2\times 5\times 2=360.$

উদাহরণ 5. সরল কর : $a-3b+5c+7b-2a-3c+9a$.

যোগের বিনিময় এবং সংযোগ-নিয়ম দ্বারা একই শ্রেণীর সদৃশ পদগুলিকে একত্র করিলে

প্রদত্ত রাশিমালা $=(a-2a+9a)+(-3b+7b)+(5c-3c)$
$=8a+4b+2c$.

59. পূর্ব্ববর্তী অনুচ্ছেদে প্রদত্ত প্রণালীতে অর্থাৎ একই শ্রেণীর সদৃশ পদগুলিকে একত্র করিয়া উহাদের সমষ্টি-নির্ণয়পূর্ব্বক যোগফল নির্ণয় করিবার নিয়মকে **পদ-সংগ্রহ** (collecting terms) বলে।

প্রশ্নমালা 20

যোগ কর :

1. $\begin{array}{r} 2a+b \\ 3a+2b \\ 5a+3b \\ \hline \end{array}$

2. $\begin{array}{r} x+3y \\ 5x+7y \\ 9x+2y \\ \hline \end{array}$

3. $\begin{array}{r} 3m+7n \\ 2m+3n \\ 8m+12n \\ \hline \end{array}$

4. $\begin{array}{r} 3a+2b+c \\ 2a+3b+5c \\ 6a+b+2c \\ \hline \end{array}$

5. $\begin{array}{r} 7x+8y+3z \\ 2x+3y+5z \\ 9x+y+2z \\ \hline \end{array}$

6. $\begin{array}{r} 2p+3q+6r \\ p+2q+3r \\ 8p+5q+2r \\ \hline \end{array}$

7. $\begin{array}{r} -x+y+z \\ x-y+z \\ x+y-z \\ \hline \end{array}$

8. $\begin{array}{r} 5a-7b+8c \\ 2a+9b-3c \\ 8a+3b-2c \\ \hline \end{array}$

9. $\begin{array}{r} 3f+2g-5h \\ -8f+3g+2h \\ 9f-7g+5h \\ \hline \end{array}$

10.
$$\begin{array}{l} -3x^2+2xy+5y^2 \\ 15x^2-7xy-8y^2 \\ -6x^2+5xy+3y^2 \\ \hline \end{array}$$

11.
$$\begin{array}{l} 2ax+\ 3by-16cz \\ 7ax-12by+\ 9cz \\ 3ax+\ 9by+\ 7cz \\ \hline \end{array}$$

12.
$$\begin{array}{l} \frac{5}{4}qr+\frac{5}{2}rp+\ \frac{2}{7}pq \\ \frac{1}{2}qr+\frac{7}{8}rp+\frac{3}{14}pq \\ \frac{3}{4}qr+\frac{3}{4}rp+\frac{11}{21}pq \\ \hline \end{array}$$

13.
$$\begin{array}{l} \frac{3}{2}a^2+\ \frac{1}{3}b^2+\ \frac{1}{5}c^2+\frac{9}{11}d^2 \\ -\frac{7}{8}a^2+\ \frac{2}{9}b^2+\frac{3}{10}c^2-\frac{8}{33}d^2 \\ \frac{9}{16}a^2-\frac{5}{18}b^2-\frac{7}{20}c^2+\frac{3}{22}d^2 \\ \hline \end{array}$$

14.
$$\begin{array}{llll} 2a^3+3a^2x+5ax^2 & & \\ 3a^3 & +4ax^2+2x^3 \\ \quad 2a^2x+3ax^2+7x^3 & \\ 8a^3+\ a^2x & +9x^3 \\ \hline \end{array}$$

15.
$$\begin{array}{l} x^3+\ y^3-2z^3-3xyz \\ x^3-2y^3+\ z^3-4xyz \\ -2x^3+\ y^3+\ z^3+8xyz \\ \hline \end{array}$$

16.
$$\begin{array}{l} \frac{1}{2}x^4-\ x^3y+2x^2y^2-\frac{1}{3}xy^3 \\ \frac{3}{4}x^4 \qquad -\frac{5}{7}x^2y^2+8xy^3-5y^4 \\ \qquad \frac{9}{5}x^3y+3x^2y^2-\frac{5}{6}xy^3-\frac{2}{3}y^4 \\ \frac{9}{8}x^4+\frac{3}{10}x^3y \qquad +\frac{5}{6}y^4 \\ \hline \end{array}$$

17. $a-b,\ b-c,\ c-a.$

18. $by+cz-2ax,\ cz+ax-2by,\ ax+by-2cz.$

19. $a^2+ab+ca,\ ab+b^2+bc,\ ca+bc+c^2$

20. $2fx+3gy-4hz,\ 2hz-3fx+5gy,\ 8gy-2fx-3hz,$
$3hz+7gy-2fx$

21. $1{\cdot}75ayz+2{\cdot}32bzx+8{\cdot}71cxy-5{\cdot}2xyz,\ -3{\cdot}1bzx-3{\cdot}8ayz$
$-2{\cdot}87xyz,\ 8{\cdot}07xyz+1{\cdot}29cxy+2{\cdot}05ayz+{\cdot}78bzx$

সরল কর :

22. $9x^3+4x^2y-7xy^2-5y^3+8x^3-x^2y+7xy^2+3y^3+12xy^2-$
$11x^2y+8y^3-9x^3$

23. $5x^3+6y^3+7z^3-8xyz-7x^3+3y^3-9z^3+5xyz+2z^3+3x^3-$
$4y^3-2xyz+8y^3-9x^3-2z^3+6xyz.$

$x=3,\ y=2,\ z=4$ হইলে নিম্নলিখিত রাশিগুলির যোগফলের মান নির্ণয় কর :

24. $5x^4+7x^3y+2x^2y^2+y^4$; $\quad 2x^3y-4x^2y^2+7xy^3$;
$-8x^2y^2+xy^3+5y^4$; $-6x^4-9x^3y+10x^2y^2$; $x^4-8xy^3-3y^4$.

25. $16x^5-12x^4y+5x^3y^2+6y^5$; $-4x^5+6x^3y^2-17x^2y^3-8xy^4$;
$16x^4y-11x^3y^2+x^2y^3+7xy^4$; $-4x^4y-12x^5-5y^5+16x^2y^3+xy^4$.

26. $X=a^3-a^2b-a^2c+ab^2-abc+ac^2$; $\quad Y=a^2b-ab^2-abc+$
$b^3-b^2c+bc^2$; $Z=a^2c-abc-ac^2+b^2c-bc^2+c^3.$

$a=2,\ b=3,\ c=1$ হইলে $X+Y+Z$-এর মান নির্ণয় কর।

মিশ্ররাশিমালার বিয়োগ*

60. 37 অণুচ্ছেদে দেখা গিয়াছে যে, বিয়োজ্যের চিহ্ন-পরিবর্ত্তন করিয়া উহাকে বিয়োজনের সহিত যোগ করিলে দুইটি সদৃশ পদের বিয়োগফল পাওয়া যায়। ইহা হইতে মিশ্ররাশিমালার (compound expressionsএর) বিয়োগের নিম্নলিখিত নিয়মের যুক্তি বুঝা যাইবে :

মিশ্ররাশিমালার বিয়োগের সাধারণ নিয়ম।

বিয়োজ্য রাশিমালাটিকে বিয়োজনের নীচে এরূপে সাজাও, যেন উহাদের সদৃশ পদগুলি একই পাটিতে (columnএ) থাকে এবং সর্ব্বনিম্নে একটি রেখা টান। এখন মনে-মনে বিয়োজ্য রাশিমালার পদগুলির চিহ্ন-পরিবর্ত্তন (অর্থাৎ $+$কে $-$ এবং $-$কে $+$) করিয়া প্রত্যেক পাটির যোগফল স্ব-স্ব চিহ্নসহ রেখাটির নীচে লিখিলেই বিয়োগফল পাইবে।

উদাহরণ 1. $5a-3b+2c$ হইতে $2a+b-3c$ বিয়োগ কর।

বিয়োজন $=5a-3b+2c$
বিয়োজ্য $=\underline{2a+\ b-3c}$
বিয়োগফল $=3a-4b+5c.$

ব্যাখ্যা। এস্থলে বিয়োজ্যের চিহ্নগুলি মনে-মনে পরিবর্ত্তিত করিয়া উল্লিখিত নিয়মে যোগ করাতে প্রথম পাটিতে $5a+(-2a)=3a$, দ্বিতীয় পাটিতে $-3b+(-b)=-4b$ এবং তৃতীয় পাটিতে $2c+3c=5c$ পাওয়া গেল।

উদাহরণ 2. $\frac{5}{2}a+3b-12c+6e$ হইতে $2a+3b-4c-5d$ বিয়োগ কর।

বিয়োজন $=\frac{5}{2}a+3b-12c\quad+6e$
বিয়োজ্য $=\underline{2a+3b-4c-5d\qquad}$
বিয়োগফল $=\frac{1}{2}a\qquad-8c+5d+6e.$

ব্যাখ্যা। বিয়োজ্যের চিহ্নগুলি মনে-মনে পরিবর্ত্তিত করিয়া উল্লিখিত নিয়মে যোগ করাতে প্রথম পাটিতে $\frac{5}{2}a+(-2a)=\frac{1}{2}a$, দ্বিতীয় পাটিতে $3b+(-3b)=0$, তৃতীয় পাটিতে $-12c+4c=-8c$, চতুর্থ পাটিতে $+5d$ এবং পঞ্চম পাটিতে $+6e$ পাওয়া গেল।

61. মিশ্ররাশিমালার বিয়োগের বিকল্প (alternative) নিয়ম।

বিয়োজ্য রাশিমালাটির পদগুলির চিহ্ন-পরিবর্ত্তন-পূর্ব্বক উহাদিগকে বিয়োজনের পরে লিখিয়া যাও। এইরূপে লব্ধ রাশিমালাকে সরল করিলেই নির্ণেয় বিয়োগফল পাইবে।

---

* এস্থলে শিক্ষার্থিগণ 37 অণুচ্ছেদ আবার পাঠ করিয়া লইবে।

নিম্নে নিয়মটির যুক্তি প্রদত্ত হইল।

প্রমাণ করিতে পারা যায় যে, (i) $a-(b+c)=a-b-c.$

(ii) $a-(b-c)=a-b+c.$

প্রমাণ। (i) 'a হইতে b এবং cএর সমষ্টি বিয়োগ করা' এবং 'a হইতে প্রথমে b বিয়োগ করিয়া পরে লব্ধ বিয়োগফল হইতে c বিয়োগ করা' একই কথা।

অতএব $a-(b+c)=a-b-c.$

(ii) $a-(b-c)=a-\{b+(-c)\}=a-b-(-c)$, [(i) দ্বারা]

$=a-b+c.$

লক্ষ্য কর যে, (i)এ a হইতে $b+c$ অর্থাৎ $(+b+c)$এর বিয়োগফল নির্ণয় করিতে $(+b+c)$এর $+$ চিহ্নগুলিকে $-$ করিয়া উহা aর পরে লিখিত হইয়াছে। এইরূপ (ii)এও a হইতে $b-c$ অর্থাৎ $(+b-c)$এর বিয়োগফল নির্ণয় করিতে $(+b-c)$এর $+$কে $-$ এবং $-$কে $+$ করিয়া উহা aএর পর লিখিত হইয়াছে।

এইরূপে যে-কোনসংখ্যক পদবিশিষ্ট রাশিমালা লইয়া নিয়মটি প্রমাণ করা যায়।

উদাহরণ 3. $4x^3-12x^2+6x-5$ হইতে $2x^3-9x^2-8x+7$ বিয়োগ কর।

নির্ণেয় বিয়োগফল অর্থাৎ $(4x^3-12x^2+6x-5)-(2x^3-9x^2-8x+7)$

$=4x^3-12x^2+6x-5-2x^3+9x^2+8x-7$, [বিয়োজ্যের পদগুলির চিহ্ন-পরিবর্তন করিয়া]

$=(4x^3-2x^3)+(-12x^2+9x^2)+(6x+8x)+(-5-7)$, [পদ-সংগ্রহ দ্বারা]

$=2x^3-3x^2+14x-12.$

প্রশ্নমালা 21

উপরের রাশি হইতে নীচের রাশি বিয়োগ কর :

1. $\begin{array}{l} 2a+5 \\ \underline{2a+2} \end{array}$

2. $\begin{array}{l} 5a+5b \\ \underline{2a+3b} \end{array}$

3. $\begin{array}{l} 5a+2x \\ \underline{2a+3x} \end{array}$

4. $\begin{array}{l} 3a+6e \\ \underline{5a+7e} \end{array}$

5. $\begin{array}{l} 3p-8q \\ \underline{2p+3q} \end{array}$

6. $\begin{array}{r} -5x-2y \\ \underline{3x-4y} \end{array}$

7. $\begin{array}{l} -2m-3n \\ \underline{-3m-5n} \end{array}$

8. $\begin{array}{l} 3a-4b+5c \\ \underline{2a-3b+4c} \end{array}$

9. $\begin{array}{l} 4x^2-5x+5 \\ \underline{3x^2-9x+9} \end{array}$

10. $\begin{array}{l} \frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}xy+3y^2 \\ \underline{\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{4}xy+\frac{5}{3}y^2} \end{array}$

11. $\begin{array}{l} 2\cdot5x^2-\ y^2+\frac{7}{2}z^2-\ a^2 \\ \underline{1\cdot2x^2-3y^2+\ z^2-2a^2} \end{array}$

12. $\begin{array}{l} 2x^3-3x^2y+3xy^2-4y^3 \\ \underline{\quad -2x^2y \qquad\quad -y^3} \end{array}$

13. $\begin{array}{r} -5x^2+13x \\ \underline{-5x^3 \qquad\quad -8x-5} \end{array}$

14. $\begin{array}{l} 3a^4-5a^3b+6a^2b^2 \qquad\quad -5b^4 \\ \underline{\quad -5a^3b \qquad\quad -3ab^3-6b^4} \end{array}$

বিয়োগ কর :

15. $3ax+2by+3cz$ হইতে $3by+5ax+8cz$

16. $5x^3+7x^2+9x+12$ হইতে $3x+7+8x^2+2x^3$

17. $6x^3-3x^2y+5xy^2+7y^3$ হইতে $5y^3-3xy^2-5x^2y+5x^3$

*18. $a^2+b^2+c^2$ হইতে $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$.

সরল কর :

19. $(17x^2+20xy-29y^2)-(16x^2+15xy-30y^2)$

20. $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3-(x^3-3x^2y+3xy^2-y^3)$

21. $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4-(a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4)$

22. $(2x^2-3xa+4a^2-8x+11a-8)-(-9+10a-9x+x^2-2xa+3a^2)$

23. (i) $10a^2+7ab+8b^2$এর সহিত কত যোগ করিলে যোগফল $11a^2+5ab+9b^2$ হইবে ?

(ii) $xy-3x^2-5y^2$এর সহিত কত যোগ করিলে যোগফল $4x^2+5y^2-3xy$ হইবে ?

24. (i) $28x^3+16x^2+9x+16$, $5x+26x^3+15+15x^2$ হইতে কত বৃহত্তর ?

(ii) $2a^3-5a^2b-7ab^2+5b^3$, $3b^3-3a^2b-6ab^2+a^3$ হইতে কত বৃহত্তর ?

25. (i) $2p^2+2q^2+2r^2$ হইতে কত বিয়োগ করিলে $p^2+q^2+r^2+2qr+2rp+2pq$ অবশিষ্ট থাকিবে ?

(ii) $2x^2+3y^2+4z^2-5x-3y-2z-6$ হইতে কত বিয়োগ করিলে $x^2+2y^2+3z^2-4x-2y-z-5$ অবশিষ্ট থাকিবে ?

মিশ্ররাশিমালার গুণন *

62. গুণনের বিচ্ছেদ-নিয়ম (Distributive Law)।

প্রমাণ করিতে পারা যায় যে, $(a+b)x=ax+bx$.

মনে কর, x একটি অখণ্ড ধনরাশি। তাহা হইলে গুণনের সংজ্ঞানুসারে

$(a+b)x=(a+b)\times x=(a+b)+(a+b)+(a+b)+\cdots(x\text{-বার})$

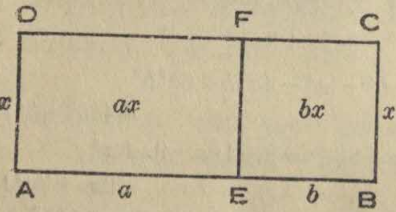
$=(a+a+a+\cdots x\text{-বার})+(b+b+b+\cdots x\text{-বার})$,

[যোগের বিনিময় এবং সংযোগ-নিয়ম দ্বারা]

$=a\times x+b\times x=ax+bx$.

এস্থলে xকে অখণ্ড ধনসংখ্যা ধরা হইয়াছে, কিন্তু উহা অপর যে-কোন সংখ্যা হইলেও সিদ্ধান্তটি সত্য।

63. '$(a+b)x=ax+bx$'এর জ্যামিতিক দৃষ্টান্ত।



মনে কর, ABCD একটি আয়তাকার ভূমি এবং EF সরল-রেখা দ্বারা উহাকে দুইটি আয়তাকার অংশে বিভক্ত করা হইয়াছে (চিত্র)। যদি AE $=a$ ফুট, EB $=b$ ফুট এবং AD $=x$ ফুট হয়, তাহা হইলে AB $=(a+b)$ ফুট। এবং

সম্পূর্ণ ABCD ভূমির ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ

$=(a+b)\times x$ বা $(a+b)x$ বর্গফুট ;

এইরূপ AEFD অংশের ক্ষেত্রফল $=ax$ বর্গফুট,

এবং EBCF অংশের ক্ষেত্রফল $=bx$ বর্গফুট।

যেহেতু ABCD ভূমি = AEFD + EBCF ;

অতএব $(a+b)x$ বর্গফুট $=ax$ বর্গফুট $+\,bx$ বর্গফুট ;

অর্থাৎ $(a+b)x=ax+bx$.

অনুসিদ্ধান্ত। (i) $(a-b)x=ax-bx$

[যেহেতু $(a-b)x=\{a+(-b)\}x=ax+(-b)x=ax-bx$.]

(ii) $(a+b+c)x=ax+bx+cx$.

* এস্থলে শিক্ষার্থিগণ (50 অনুচ্ছেদে প্রদত্ত) এক সরল রাশিকে অপর একটি সরল রাশি দ্বারা গুণনের নিয়মটি আবার পাঠ করিয়া লইবে।

[যেহেতু $(a+b+c)x=\{(a+b)+c\}x=(a+b)x+cx=ax+bx+cx.$]

এইরূপ **(iii)** $(a-b+c-\cdots)x=ax-bx+cx-\cdots$

অর্থাৎ একটি মিশ্ররাশিমালাকে কোন রাশি দ্বারা গুণ করিলে যত হয়, মিশ্র-রাশিমালার পদগুলিকে উক্ত রাশি দ্বারা পৃথক্-পৃথক্ গুণ করিয়া গুণফলগুলির বীজগণিতীয় সমষ্টি লইলেও ঠিক তত হয়।

ইহাকে গুণনের **বিচ্ছেদ নিয়ম** (Distributive Law) বলে। ইহা হইতে একটি মিশ্ররাশিমালাকে কোন সরল রাশি দ্বারা গুণনের নিম্নলিখিত নিয়ম পাওয়া যায়ঃ

64. মিশ্ররাশিমালাকে সরল রাশি (monomial) দ্বারা গুণনের নিয়মঃ—

মিশ্ররাশিমালার প্রত্যেক পদকে সরল রাশিটি দ্বারা গুণ কর। লব্ধ গুণফলগুলির বীজগণিতীয় সমষ্টিই নির্ণেয় গুণফল।

উদাহরণ 1. $2x+3y$কে $4xy$ দ্বারা গুণ কর।

$$(2x+3y)\times 4xy=2x\times 4xy+3y\times 4xy$$
$$=8x^2y \quad +12xy^2. \qquad \text{[নিয়ম, 50 অনু.]}$$

উদাহরণ 2. $5a^2b-3ab^2-2b^3$কে $-3ab$ দ্বারা গুণ কর।

$$(5a^2b-3ab^2-2b^3)\times(-3ab)$$
$$=5a^2b\times(-3ab)-3ab^2\times(-3ab)-2b^3\times(-3ab)$$
$$=-15a^3b^2+9a^2b^3+6ab^4. \qquad \text{[নিয়ম, 50 অনু.]}$$

অথবা গুণ্যের প্রথম পদের নীচে গুণককে নিম্নলিখিতরূপে স্থাপন করিয়াও গুণফল 50 অনুচ্ছেদের নিয়মে নির্ণয় করা যায়।

$$\text{গুণ্য} = \quad 5a^2b-3ab^2-2b^3$$
$$\text{গুণক} = -3ab$$
$$\text{গুণফল} = -15a^3b^2+9a^2b^3+6ab^4.$$

উদাহরণ 3. সরল কর : $5x^2(2x+3)-6x(4x^2-7x)+8x^2(x+9)$

$$\text{প্রদত্ত রাশিমালা}=(10x^3+15x^2)-(24x^3-42x^2)+(8x^3+72x^2)$$
$$=10x^3+15x^2-24x^3+42x^2+8x^3+72x^2$$
$$=-6x^3+129x^2. \qquad \text{[সরল করিয়া]}$$

উদাহরণ 4. সরল কর : $2{\cdot}678\times 568{\cdot}3+3{\cdot}313\times 568{\cdot}3+4{\cdot}009\times 568{\cdot}3.$

যেহেতু $ax+bx+cx=(a+b+c)\times x$

অতএব প্রদত্ত $\text{রাশি}=(2{\cdot}678+3{\cdot}313+4{\cdot}009)\times 568{\cdot}3$

$$=10\times 568{\cdot}3=5683.$$

প্রশ্নমালা 22

গুণ কর :

1. $x+2y$ কে 3 দ্বারা
2. $2x+3y$ কে $4a$ দ্বারা
3. $7a-5b$কে $6x$ দ্বারা
4. $2x+3y$ কে $-4a$ দ্বারা
5. $-7a+3b$কে $-5a$ দ্বারা
6. $-5x-2y$ কে $3x$ দ্বারা
7. $-3x-4y$কে $-5y$ দ্বারা
8. $4x-5y$ কে $3xy$ দ্বারা
9. $2a-3b$কে $-7ab$ দ্বারা
10. $9x^2y-5xy^2$কে $-3xy$ দ্বারা
11. $2a^2-3ab+5b^2$কে $6ab$ দ্বারা
12. $-3m^2-6mn+2n^2$কে $-4mn$ দ্বারা
13. $x^6-3x^4+2x^2-5$কে $4x^2$ দ্বারা
14. $3yz-2zx-4xy$কে $-6xyz$ দ্বারা
15. $2a^2x^2-3b^2y^2-5c^2z^2$কে $4abc$ দ্বারা
16. $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$কে $-2x^2y^2$ দ্বারা
17. $-x^4y^3z+3x^2y^4z^5-8xy^6z^2$কে $-9x^2y^2z^3$ দ্বারা।

সরল কর :

18. $2a^2(5a^4-3)-5a^4(2a^2-3)-3a^2(5a^2-2)$
19. $-2x^2(4-3x)+4x(3+2x)-12(x-1)$
20. $7m^3(m-2)-4m(5-m)-2m^2(2-7m)+5(4m-1)$
21. $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)$
22. $2x^2(3y^2-5z^2)-3y^2(z^2+2x^2)+5z^2(2x^2-3y^2)$
23. $3762\times5789+6795\times5789+9443\times5789$
24. $3{\cdot}57829\times879{\cdot}56+4{\cdot}89725\times879{\cdot}56+1{\cdot}52446\times879{\cdot}56$
25. $X=5x-3y-7z$, $Y=2x-6y-8z$, $Z=4x-2y-5z$ হইলে $xX+yY+zZ$এর মান নির্ণয় কর।

65. মিশ্ররাশিমালাকে (Compound Expressionকে) মিশ্ররাশিমালা দ্বারা গুণন।

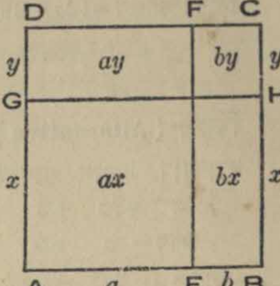
প্রমাণ করিতে পারা যায় যে, $\boldsymbol{(a+b)(x+y)=ax+ay+bx+by}$.

প্রমাণ। $(x+y)$কে একটি রাশি ধরিয়া 62 অনু. দ্বারা

$$(a+b)(x+y)=a(x+y)+b(x+y)$$
$$=ax+ay+bx+by. \qquad [\text{62 অনু.}]$$

66. '$(a+b)(x+y)=ax+ay+bx+by$'এর জ্যামিতিক দৃষ্টান্ত।

মনে কর, ABCD একটি আয়তাকার ক্ষেত্র এবং উহা EF ও GH সরলরেখা দ্বারা চারিটি আয়তাকার অংশে বিভক্ত হইয়াছে (চিত্র)। যদি AE $=a$ ফুট, EB $=b$ ফুট, AG $=x$ ফুট এবং GD $=y$ ফুট হয়, তাহা হইলে AB $=(a+b)$ ফুট এবং AD $=(x+y)$ ফুট।



সম্পূর্ণ ABCDএর ক্ষেত্রফল

$=$ দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ $=(a+b)(x+y)$ বর্গফুট ;

চিত্র হইতে স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, ABCDএর আয়তাকার অংশগুলির ক্ষেত্রফল ax, ay, bx, by বর্গফুট। যেহেতু

ABCD ক্ষেত্র $=$ উহার অংশগুলির সমষ্টি ;

অতএব $(a+b)(x+y)$ বর্গফুট $=ax$ বর্গফুট $+ay$ বর্গফুট $+bx$ বর্গফুট $+by$ বর্গফুট।

অর্থাৎ $(a+b)(x+y)=ax+ay+bx+by.$

দ্রষ্টব্য। লক্ষ্য কর যে, এস্থলে গুণ্যের প্রত্যেক পদ দ্বারা গুণকের পদগুলিকে

$(a+b)(x+y)$ এইরূপ ধারায় গুণ করা হইল এবং লব্ধ গুণফলগুলির বীজগণিতীয়

সমষ্টিই হইল নির্ণেয় গুণফল।

অনুসিদ্ধান্ত 1. $(a+b+c)(x+y)=ax+ay+bx+by+cx+cy.$

2. $(a+b+c)(x+y+z)=ax+ay+az$
$+bx+by+bz$
$+cx+cy+cz.$

অতএব নিম্নলিখিত নিয়ম পাওয়া গেল :

নিয়ম। এক মিশ্ররাশিমালাকে অপর এক মিশ্ররাশিমালা দ্বারা গুণ করিতে হইলে গুণ্যের প্রত্যেক পদ দ্বারা গুণকের প্রত্যেক পদকে পৃথক্-পৃথক্ গুণ কর ; প্রাপ্ত ফলগুলির বীজগণিতীয় সমষ্টি হইবে নির্ণেয় গুণফল।

বিশেষ দ্রষ্টব্য। মিশ্ররাশিমালাগুলিকে উহাদের অন্তর্গত কোন সাধারণ অক্ষরের ঘাতের একই ক্রম (হয় অধঃক্রম, না হয় ঊর্দ্ধক্রম)-অনুসারে সাজাইয়া লওয়া সুবিধাজনক।

উদাহরণ 1. $2a+3$কে $a+5$ দ্বারা গুণ কর।

নির্ণেয় গুণফল $=(2a+3)(a+5)=2a(a+5)+3(a+5)$

$=2a^2+10a+3a+15$

$=2a^2+13a+15.$

বিকল্প (Alternative) প্রণালী :

ব্যাখ্যা। এস্থলে গুণ্যের নীচে গুণককে রাখিয়া গুণ্যকে গুণকের পদগুলি দ্বারা বামদিক হইতে পৃথক্-পৃথক্ গুণ করা হইল এবং এই আংশিক গুণফলগুলিকে একটির নীচে একটি এরূপভাবে সাজান হইল, যেন উহাদের সদৃশ পদগুলি একই পাটিতে থাকে। সর্ব্বশেষে উহাদের যোগফল নির্ণয় করিয়া গুণফল পাওয়া গেল।

গুণ্য $=2a \quad +3$

গুণক $=\ a \quad +5$

গুণ্য $\times a=2a^2 \quad +3a$

গুণ্য $\times 5= \qquad +10a+15$

নির্ণেয় গুণফল $=2a^2 \quad +13a+15.$

উদাহরণ 2. $2a^2-5ab-3b^2$কে $4a-7b$ দ্বারা গুণ কর।

গুণ্য $=2a^2-5ab-3b^2$

গুণক $=4a \quad -7b$

গুণ্য $\times 4a=8a^3-20a^2b-12ab^2$

গুণ্য $\times(-7b)= \qquad -14a^2b+35ab^2+21b^3$

গুণফল $=8a^3-34a^2b+23ab^2+21b^3.$

উদাহরণ 3. $4x^2-2xy+3y^2$কে $3x^2+4xy+2y^2$ দ্বারা গুণ কর।

গুণ্য $=\ 4x^2-\ 2xy+3y^2$

গুণক $=\ 3x^2+\ 4xy+2y^2$

$12x^4-\ 6x^3y+9x^2y^2$

$+16x^3y-8x^2y^2+12xy^3$

$+8x^2y^2-\ 4xy^3+6y^4$

গুণফল $=12x^4+10x^3y+9x^2y^2+\ 8xy^3+6y^4.$

প্রশ্নমালা 23

গুণ কর :

1. $x+2$কে $x+3$ দ্বারা

2. $x-4$কে $x+2$ দ্বারা

3. $x+5$কে $x-7$ দ্বারা

4. $x-3$কে $x-8$ দ্বারা

5. $2x+3$কে $4x+5$ দ্বারা
6. $3x-5$কে $4x+7$ দ্বারা
7. $4x+3$কে $3x-2$ দ্বারা
8. $8x-5$কে $3x-7$ দ্বারা
9. $-7x+2y$কে $2x-y$ দ্বারা
10. $-8x-11y$কে $-5x+6y$ দ্বারা
11. a^2-2a+3কে $a+2$ দ্বারা
12. $2a^2-3a+4$কে $3a+2$ দ্বারা
13. $3x^2-4x-2$কে $2x-3$ দ্বারা
14. $3x^2-7x-5$কে $-3x+4$ দ্বারা
15. $-11x^2+7x-4$কে $-3x-2$ দ্বারা
16. $2a^2-3ab+b^2$কে $3a+2b$ দ্বারা
17. $6x^2-7xy-3y^2$কে $4x-5y$ দ্বারা
18. $7m^2-2mn+3n^2$কে $2m-3n$ দ্বারা
19. $-6x^2+7xy-2y^2$কে $-2x-3y$ দ্বারা
20. $x^3-x^2y+xy^2-y^3$কে $x+y$ দ্বারা
21. a^2+ab+b^2কে a^2-ab+b^2 দ্বারা
22. $x+y+z$কে $x+y+z$ দ্বারা
23. $3x+2y+4z$কে $2x+3y+5z$ দ্বারা
24. $2x^2-3xy+y^2$কে $3x^2-2xy+5y^2$ দ্বারা
25. $2a^2+3ab-4b^2$কে $-3a^2+4ab-2b^2$ দ্বারা।

মিশ্ররাশিমালার ভাগ *

67. ভাগের বিচ্ছেদ নিয়ম (Distributive Law)।

পাটীগণিতে $$\frac{2+5+4}{7}=\frac{2}{7}+\frac{5}{7}+\frac{4}{7}.$$

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{2}{3}}{5}=\frac{\frac{1}{2}}{5}+\frac{\frac{3}{4}}{5}+\frac{\frac{2}{3}}{5}.$$

এইরূপ বীজগণিতে

$$\frac{a+b+c+\cdots}{x}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x}+\cdots$$

অর্থাৎ $(a+b+c+\cdots)\div x=a\div x+b\div x+c\div x+\cdots$

* এস্থলে শিক্ষার্থিগণ 55 অনুচ্ছেদটি আবার পাঠ করিয়া লইবে।

অতএব একটি মিশ্ররাশিমালাকে কোন এক রাশি দ্বারা ভাঁগ করিলে ভাগফল যত হয়, মিশ্ররাশিমালার পদগুলিকে উক্ত রাশি দ্বারা পৃথক্-পৃথক্ ভাগ করিয়া ভাগফল-গুলির বীজগণিতীয় সমষ্টি লইলেও ঠিক তত হয়।

ইহাকে ভাগের **বিচ্ছেদ নিয়ম** (Distributive Law) বলে। ইহা হইতে একটি মিশ্ররাশিমালাকে যে-কোন সরল রাশি দ্বারা ভাগের নিম্নলিখিত নিয়ম পাওয়া যায় :

68. মিশ্ররাশিমালাকে সরল রাশি (monominal) দ্বারা ভাগের নিয়ম। মিশ্ররাশিমালার প্রত্যেক পদকে সরল রাশি দ্বারা পৃথক্-পৃথক্ ভাগ কর; লব্ধ ভাগফলগুলির বীজগণিতীয় সমষ্টি হইবে নির্ণেয় ভাগফল।

উদাহরণ 1. $2a^2b+6ab^2+4abc$কে $2ab$ দ্বারা ভাগ কর।

$$\text{নির্ণেয় ভাগফল} = \frac{2a^2b+6ab^2+4abc}{2ab}$$

$$= \frac{2a^2b}{2ab}+\frac{6ab^2}{2ab}+\frac{4abc}{2ab}$$

$$= a+3b+2c.$$ [নিয়ম, 55 অণু.]

অথবা পাটীগণিতের হ্রস্ব-ভাগের প্রণালীতেও ভাগ সম্পন্ন করা যায় :

$$2ab)\underline{2a^2b+6ab^2+4abc}$$
$$a+3b\quad+2c.$$

উদাহরণ 2. $3x^3y^2z^2-5x^2y^3z^2-6x^2y^2z^3$কে $-12x^2y^2z^2$ দ্বারা ভাগ কর।

$$\text{নির্ণেয় ভাগফল} = \frac{3x^3y^2z^2-5x^2y^3z^2-6x^2y^2z^3}{-12x^2y^2z^2}$$

$$= \frac{3x^3y^2z^2}{-12x^2y^2z^2}+\frac{-5x^2y^3z^2}{-12x^2y^2z^2}+\frac{-6x^2y^2z^3}{-12x^2y^2z^2}$$

$$= -\frac{1}{4}x \quad +\frac{5}{12}y \quad +\frac{1}{2}z.$$ [নিয়ম, 55 অণু.]

প্রশ্নমালা 24

ভাগ কর :

1. a^2+2aকে a দ্বারা
2. $2b^2+3b$কে b দ্বারা
3. $3x^2-4x$কে x দ্বারা
4. $2y^2-5y$কে y দ্বারা
5. x^2+xyকে x দ্বারা
6. x^2-2xyকে x দ্বারা

7. $2a^2-6ab$কে $2a$ দ্বারা

8. $6a^3-3a^2b$কে $3a^2$ দ্বারা

9. $2a^4-3a^3b$কে $2a^3$ দ্বারা

10. $12x^4y-16x^3y^2$কে $4x^3y$ দ্বারা

11. $-20x^2yz+30xy^2z$কে $-10xyz$ দ্বারা

12. a^3-2a^2+aকে a দ্বারা

13. $2a^2b-6ab^2-4abc$কে $2ab$ দ্বারা

14. $2a^4-4a^3b-6a^2b^2$কে $2a^2$ দ্বারা

15. $2a^4b^4-4a^3b^2+6ab^3$কে $-2ab$ দ্বারা

16. $3x^3y-9x^2y^2-12xy^3$কে $3xy$ দ্বারা

17. $-3x^4-6x^3y-2x^2y^2$কে $-3x^2$ দ্বারা

18. $-4a^5b^2-12a^4b^3+8a^3b^4$কে $-4a^3b^2$ দ্বারা

19. $6a^4b^2c-9a^3b^3c-3a^3b^2c^2+12a^3b^2c$কে $3a^3b^2c$ দ্বারা

20. $-4x^5y^3z^4-8x^4y^4z^4+12x^3y^4z^5+2x^3y^3z^6$কে $-4x^3y^3z^4$ দ্বারা।

69. **একটি মিশ্ররাশিমালাকে (Compound Expressionকে) অপর এক মিশ্ররাশিমালা দ্বারা ভাগ।** এইরূপ ভাগে পাটীগণিতের প্রণালী অবলম্বিত হয়। নিম্নে উহার বর্ণনা এবং যুক্তি প্রদত্ত হইল।

65 অণুচ্ছেদে দেখা গিয়াছে যে, $(a+b)(x+y)=ax+ay+bx+by$.

অতএব ভাগের সংজ্ঞানুসারে $(ax+ay+bx+by)$কে $(a+b)$ দ্বারা ভাগ করিলে $(x+y)$ ভাগফল হইবে। স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, এস্থলে (1) ভাজ্য এবং ভাজক উভয়েই aএর ঘাতের অধঃক্রমে সাজান আছে ; (2) ভাজ্যের প্রথম অঙ্ক axকে ভাজকের প্রথম অঙ্ক a দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফলের প্রথম অঙ্ক x পাওয়া যায়। (3) এখন ভাজ্য হইতে 'ভাজক $\times x$' বিয়োগ করিলে

$$\text{অবশিষ্ট}=ax+ay+bx+by-(a+b)x$$
$$=ax+ay+bx+by-ax-bx=ay+by.$$

এই অবশিষ্টের প্রথম অঙ্ক ayকে ভাজকের প্রথম অঙ্ক a দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফলের দ্বিতীয় অঙ্ক y পাওয়া যায়। সম্পূর্ণ প্রণালীটি নিম্নলিখিতরূপে প্রদর্শিত হইতে পারে :

$$a+b)ax+ay+bx+by(x+y$$
$$\underline{ax\quad +bx}$$
$$+ay\quad +by$$
$$\underline{+ay\quad +by}$$

ইহা হইতে নিম্নলিখিত নিয়ম পাওয়া যায় :

নিয়ম। কোন মিশ্ররাশিমালাকে অপর এক মিশ্ররাশিমালা দ্বারা ভাগ করিতে হইলে

(1) উভয় রাশিমালাকে উহাদের অন্তর্গত কোন সাধারণ অক্ষরের ঘাতের একই ক্রম-(হয় অধঃক্রম, না হয় উৰ্দ্ধক্রম)-অনুসারে সাজাও।

(2) ভাজ্যের প্রথম পদকে ভাজকের প্রথম পদ দ্বারা ভাগ করিলে লব্ধ ফল হইবে নির্ণেয় ভাগফলের প্রথম পদ।

(3) সম্পূর্ণ ভাজকটিকে ভাগফলের এই প্রথম পদ দ্বারা গুণ করিয়া যে-গুণফল পাওয়া যায়, উহাকে ভাজ্য হইতে বিয়োগ কর এবং লব্ধ বিয়োগফলকে নূতন ভাজ্য ধরিয়া আবার পূর্ব্বোক্ত প্রক্রিয়া প্রয়োগ কর; বিয়োগফল শূন্য না হওয়া পর্য্যন্ত এইরূপে কার্য্য করিতে থাক। লব্ধ আংশিক ভাগফলগুলিকে স্ব-স্ব চিহ্নসহ পাশাপাশি লিখিলেই সম্পূর্ণ ভাগফল পাইবে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য। ভাজ্য-হিসাবে ব্যবহৃত বিয়োগফলগুলিকেও পূর্ব্বনির্ব্বাচিত অক্ষরের ঘাতের একই ক্রম-অনুসারে সাজাইবে।

পরবর্তী উদাহরণগুলি হইতে প্রক্রিয়াটি সুস্পষ্ট হইবে।

উদাহরণ 1. $6a^2+11a+4$কে $2a+1$ দ্বারা ভাগ কর।

$$
\begin{array}{r|l}
2a+1\,) & 6a^2+11a+4\;(\,3a+4 \\
 & \underline{6a^2+\;3a\quad} \\
 & \qquad 8a+4 \\
 & \qquad \underline{8a+4}
\end{array}
$$

ব্যাখ্যা। (1) এস্থলে ভাজ্য এবং ভাজক উভয়েই aএর ঘাতের অধঃক্রমে সজ্জিত আছে; (2) ভাজ্যের প্রথম পদ $=6a^2$ এবং ভাজকের প্রথম পদ $=2a$; অতএব ভাগফলের প্রথম পদ $=6a^2\div 2a=3a$.

(3) এখন ভাজককে ভাগফলের প্রথম পদ $3a$ দ্বারা গুণ করিয়া গুণফল $(6a^2+3a)$কে ভাজ্য হইতে বিয়োগ করাতে নূতন ভাজ্য $8a+4$ পাওয়া গেল। ইহার প্রথম পদ $8a$কে ভাজকের প্রথম পদ $2a$ দ্বারা ভাগ করাতে ভাগফলের দ্বিতীয় পদ $=8a\div 2a=4$ পাওয়া গেল। ভাজককে 4 দ্বারা গুণ করিয়া গুণফলকে নূতন ভাজ্য হইতে বিয়োগ করাতে বিয়োগফল শূন্য হইল।

অতএব নির্ণেয় ভাগফল $=3a+4$.

উদাহরণ 2. $-5xy^2+y^3+9x^3+3x^2y$কে $-y+3x$ দ্বারা ভাগ কর।

এস্থলে ভাজ্য এবং ভাজককে xএর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া পূর্ব্বোক্ত নিয়মে ভাগ করা হইল।

$$
\begin{array}{l}
3x-y)\ 9x^3+3x^2y-5xy^2+y^3\,(3x^2+2xy-y^2 \\
\qquad\quad \underline{9x^3-3x^2y} \\
\qquad\qquad\quad 6x^2y-5xy^2+y^3 \\
\qquad\qquad\quad \underline{6x^2y-2xy^2} \\
\qquad\qquad\qquad -3xy^2+y^3 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-3xy^2+y^3}
\end{array}
$$

∴ নির্ণেয় ভাগফল $=3x^2+2xy-y^2$.

উদাহরণ 3. $6x^3-5x^2+9x+10$কে $2x^2-3x+5$ দ্বারা ভাগ কর।

$$
\begin{array}{l}
2x^2-3x+5)\ 6x^3-5x^2+\ 9x+10\ (3x+2 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{6x^3-9x^2+15x} \\
\qquad\qquad\qquad\quad +4x^2-\ 6x+10 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{+4x^2-\ 6x+10}
\end{array}
$$

∴ নির্ণেয় ভাগফল $=3x+2$.

প্রশ্নমালা 25

ভাগ কর :

1. x^2+2xকে $x+2$ দ্বারা
2. $2x^2+6x$কে $x+3$ দ্বারা
3. a^2+3a+2কে $a+2$ দ্বারা
4. x^2-5x+6কে $x-3$ দ্বারা
5. $6x^2+19x+10$কে $3x+2$ দ্বারা
6. $5x^2+7xy+2y^2$কে $x+y$ দ্বারা
7. $3x^2-5ax-2a^2$কে $3x+a$ দ্বারা
8. $5a^2-2ax-7x^2$কে $5a-7x$ দ্বারা
9. $15x^2-4xy-4y^2$কে $5x+2y$ দ্বারা
10. $6x^2-19xa+15a^2$কে $5a-3x$ দ্বারা
11. $25x^2-60xy+36y^2$কে $5x-6y$ দ্বারা
12. $x^3+9x^2+26x+24$কে $x+4$ দ্বারা
13. $x^3-2x^2-13x-10$কে $x-5$ দ্বারা
14. $6x^3-x^2y-14xy^2+3y^3$কে $2x-3y$ দ্বারা
15. $6a^3-17a^2b+7ab^2-5b^3$কে $2a-5b$ দ্বারা [ক. প্র, 1866]

16. $3a-7a^2+15-4a^3$কে $5-4a$ দ্বারা
17. $6+x^2-19x+6x^3$কে $2+x$ দ্বারা [ক. প্র., '16]
18. $48a^6-4a^4-28a^2+3$কে $4a^2-3$ দ্বারা
19. $6x^4-2x^3-23x^2+5x+20$কে $2x^2-5$ দ্বারা [ক, প্র., 1913]
20. $16x^4+32x^3+24x^2+8x+1$কে $2x+1$ দ্বারা
21. $16a^4-80a^3b+140a^2b^2-100ab^3+24b^4$কে $2a-3b$ দ্বারা
22. $81x^4-270x^3y+315x^2y^2-150xy^3+24y^4$কে $3x-4y$ দ্বারা
23. x^3+2x^2+2x+1কে x^2+x+1 দ্বারা
24. $x^4+x^2y^2+y^4$কে x^2+xy+y^2 দ্বারা
25. $6x^4+5x^3y-19x^2y^2+13xy^3-5y^4$কে $2x^2+3xy-5y^2$ দ্বারা।

বন্ধনী-অপসারণ (removal) এবং সংস্থাপন (insertion)

70. বন্ধনী (Brackets)। বন্ধনী-বিষয়ক নিয়ম বীজগণিত এবং পাটীগণিতে একই। —, ( ), { }, [ ], এই চারিটি চিহ্নের নাম বন্ধনী। ইহাদিগকে যথাক্রমে **রেখাবন্ধনী** (Vinculum), **লঘুবন্ধনী** (First Brackets), **ধনুর্ব্বন্ধনী** (Second Brackets) এবং **গুরুবন্ধনী** (Third Brackets) বলে। সাধারণতঃ গুরুবন্ধনীর মধ্যে ধনুর্ব্বন্ধনী, ধনুর্ব্বন্ধনীর মধ্যে লঘুবন্ধনী এবং লঘুবন্ধনীর মধ্যে রেখাবন্ধনী ব্যবহৃত হইয়া থাকে।

বন্ধনীর অন্তর্গত রাশিমালাকে একটি রাশি বলিয়া গণ্য করিতে হয়। যথা, '$a-(b+c)$'এ বুঝায় যে, b এবং cর যোগফলকে a হইতে বিয়োগ করিতে হইবে।

যোগের সংযোগ নিয়ম (Associative Law) হইতে দেখা গিয়াছে যে,

$$a+(b+c)=a+b+c\ ;$$

এবং $$a+(b-c)=a+\{b+(-c)\}=a+b+(-c)=a+b-c.$$

বিপরীতক্রমে $a+\ b+c\ =a+(b+c)$;

এবং $a+\ b-c\ =a+(b-c)$,

অতএব বন্ধনী-অপসারণের এবং সংস্থাপনের নিম্নলিখিত নিয়ম পাওয়া গেল :

নিয়ম 1. কোন বন্ধনীর পূর্ব্বে + চিহ্ন থাকিলে বন্ধনীর অন্তর্গত রাশিমালার চিহ্নের পরিবর্ত্তন না করিয়াই বন্ধনীটি অপসারিত করা যায়।

বিপরীতক্রমে, একটি রাশিমালার যে-কোন-সংখ্যক পদকে চিহ্ন-পরিবর্ত্তন না করিয়াই + চিহ্নযুক্ত বন্ধনীর মধ্যে স্থাপন করা চলে।

যথা, $a+b-c-e+f=a+(b-c-e+f)$.

এইরূপ $x-y+z-w=x+(-y+z-w)$

71. পূর্ব্বেই (61 অনুচ্ছেদে) প্রমাণিত হইয়াছে যে,

$$a-(b+c)=a-b-c$$

এবং $\quad a-(b-c)=a-b+c.$

বিপরীতক্রমে $\quad a-b-c=a-(b+c)$

এবং $\quad a-b+c=a-(b-c).$

ইহা হইতে বন্ধনী-অপসারণ এবং সংস্থাপনের নিম্নলিখিত নিয়ম পাওয়া গেল ঃ

নিয়ম 2. কোন বন্ধনীর পূর্ব্বে — চিহ্ন থাকিলে বন্ধনীর অন্তর্গত রাশিমালার চিহ্ন-পরিবর্ত্তন (অর্থাৎ '+কে —' এবং '—কে +') করিয়া বন্ধনী অপসারিত করা যায়।

বিপরীতক্রমে, একটি রাশিমালার যে-কোন-সংখ্যক পদকে চিহ্ন-পরিবর্ত্তন-পূর্ব্বক — চিহ্নযুক্ত বন্ধনীর মধ্যে স্থাপিত করা যায়।

যথা, $a+b-c-d+e-f=a-[-b+c+d-e+f]$
$\qquad\qquad =a-[-b-\{-c-d+e-f\}].$

$x-y-z+a+b=x-[y+z-a-b]=x-[y-\{-z+a+b\}].$

72. বন্ধনী-অপসারণের ক্রম (order)। যদি কোন রাশিমালায় একাধিক বন্ধনী থাকে, তবে উহাদিগকে অপসারিত করিবার প্রয়োজন হইলে সকলের ভিতরের বন্ধনী হইতে আরম্ভ করিয়া ক্রমশঃ এক-একটি বন্ধনী অপসারিত করিতে হয়। প্রথম শিক্ষার্থিগণের পক্ষে এইরূপ ক্রম অবলম্বন করাই সুবিধাজনক। তবে ইহার বিপরীত ক্রমও অবলম্বন করা চলে ; অর্থাৎ সর্ব্বাপেক্ষা বাহিরের বন্ধনী হইতে আরম্ভ করিয়া এক-একটি বন্ধনী অপসারিত করাও যায়।

উদাহরণ 1. সরল কর ঃ $a-[b+\{c-(d-\overline{e+f})\}].$

(সকলের ভিতরের বন্ধনী হইতে আরম্ভ করিয়া এক-একটি বন্ধনী অপসারিত করিলে)

প্রদত্ত রাশিমালা $=a-[b+\{c-(d-e-f)\}]$
$\qquad =a-[b+\{c-d+e+f\}]$
$\qquad =a-[b+c-d+e+f]$
$\qquad =a-b-c+d-e-f.$

অথবা সকলের বাহিরের বন্ধনী হইতে আরম্ভ করিয়া এক-একটি বন্ধনী অপসারিত করিলে

প্রদত্ত রাশিমালা $=a-b-\{c-(d-\overline{e+f})\}$
$\qquad =a-b-c+(d-\overline{e+f})$
$\qquad =a-b-c+d-\overline{e+f}$
$\qquad =a-b-c+d-e-f.$

উদাহরণ 2. সরল কর : $6x-[2x-\{3y-(4x-5y)\}]$.

সকলের ভিতরের বন্ধনী হইতে আরম্ভ করিয়া বন্ধনীগুলিকে ক্রমশঃ অপসারিত করিলে

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশিমালা} &= 6x-[2x-\{3y-4x+5y\}] \\ &= 6x-[2x-\{8y-4x\}] && [\text{ সরল করিয়া }] \\ &= 6x-[2x-8y+4x] \\ &= 6x-[6x-8y] && [\text{ সরল করিয়া }] \\ &= 6x-6x+8y \\ &= 8y. && [\text{ সরল করিয়া }] \end{aligned}$$

দ্রষ্টব্য। লক্ষ্য কর যে, প্রত্যেকস্থলে কোন বন্ধনীর অপসারণের পূর্ব্বে উহার পদগুলিকে সরল করা হইয়াছে।

অথবা সকলের বাহিরের বন্ধনী হইতে আরম্ভ করিয়া বন্ধনীগুলিকে ক্রমশঃ অপসারিত করিলে

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশিমালা} &= 6x-2x+\{3y-(4x-5y)\} \\ &= 4x+\{3y-(4x-5y)\} && [\text{ সরল করিয়া }] \\ &= 4x+3y-(4x-5y) \\ &= 4x+3y-4x+5y \\ &= 8y. && [\text{ সরল করিয়া }] \end{aligned}$$

73. পূর্ব্বোক্ত উদাহরণগুলিতে বন্ধনীগুলিকে এক-একটি করিয়া অপসারিত করা হইয়াছে, কিন্তু নিম্নলিখিত প্রণালীতে উহাদিগকে একসঙ্গেও অপসারিত করা যায়।

পূর্ব্বেই দেখা গিয়াছে যে, $+(+a)=+a$;

$$+(-a)=-a;$$
$$-(+a)=-a;$$
$$-(-a)=+a;$$

অথবা $\quad +\{+(+a)\}=+\{+a\}=+a$;

$$+[+\{+(+a)\}]=+[+a]=+a;$$

এইরূপ $\quad -\{-(+a)\}=-\{-a\}=+a$;

$$-[-\{-(+a)\}]=-[+a]=-a;$$

এবং $\quad -\{-(-a)\}=-\{+a\}=-a.$

স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, বন্ধনীসমূহের অন্তর্গত কোন পদের পূর্ব্বে + চিহ্ন কিংবা যুগ্মসংখ্যক − চিহ্ন থাকিলে বন্ধনী অপসারিত করিলে

উহার পূর্ব্বে + চিহ্ন বসিবে ; কিন্তু ঐ পদের পূর্ব্বে অযুগ্মসংখ্যক − চিহ্ন থাকিলে বন্ধনী অপসারিত করিলে উহার পূর্ব্বে − চিহ্ন বসিবে।

কোন রাশিমালায় একাধিক বন্ধনী থাকিলে উল্লিখিত চিহ্ন-বিষয়ক নিয়ম দ্বারা বন্ধনীগুলিকে একসঙ্গে অপসারিত করা চলে। নিম্নলিখিত উদাহরণ হইতে বিষয়টি সুস্পষ্ট হইবে।

উদাহরণ 3. সরল কর : $-(-(-(-(-a))))$.

যেহেতু aএর পূর্ব্বে পাঁচটি − চিহ্ন আছে, সুতরাং বন্ধনী অপসারিত করিতে aএর পূর্ব্বে − চিহ্ন বসিবে। অতএব

$$\text{প্রদত্তরাশি} = -a.$$

উদাহরণ 4. সরল কর : $-a-[-b-\{-c-(-a-\overline{c-b})\}]$.

$$\text{প্রদত্ত রাশিমালা} = -a+b-c+a+c-b=0,$$

[**ব্যাখ্যা।** এখানে দ্বিতীয় পদ bএর পূর্ব্বে − চিহ্ন-সংখ্যা মোট দুইটি, অতএব বন্ধনী-অপসারণের পর উহার পূর্ব্বে + বসিয়াছে। তৃতীয় পদ cএর পূর্ব্বে − চিহ্নের সংখ্যা তিনটি, অতএব বন্ধনীমুক্ত হওয়াতে উহার পূর্ব্বে − চিহ্ন বসিয়াছে ইত্যাদি।]

প্রশ্নমালা 26

সরল কর :

1. $a+(b-a)$
2. $a-(a-b)$
3. $(a+b)+(a-b)$
4. $(a+b)-(a-b)$
5. $(b-c)+(c-a)+(a-b)$
6. $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)$
7. $(b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)$
8. $x-\{y-(x-y)\}$
9. $a-\{a-(a-\overline{a-2})\}$
10. $2x-\{3y-(2x-\overline{3y-2x})\}$
11. $a-[b-\{c-(a-\overline{b-c})\}]$
12. $2x-[3y-\{5z-(2x-\overline{3y-5z})\}]$
13. $a-[b-\{a-(b-\overline{a-b})\}]$
14. $[x-\{x+(x-\overline{x-z})\}]-[x+\{x-(x-\overline{z-x})\}]$
15. $(a+b)-[(b+c)-\{(c+a)-(\overline{a+b}-\overline{b+c}+\overline{c+a})\}]$
16. $(y-z)-[(z-x)-\{(x-y)-(\overline{y-z}-\overline{z-x}-\overline{y-x})\}]$
17. $10(x+2y-3x)-5(4x+7y)+5(3y+6z+2x)$

18. $2(b+c-a)-4\{a-2b-2(a+b-c)\}+3(c+2a-3b)$

19. $2y-3(z-x)-4[y-x-z-2\{z+x-3(x-y)\}]$

প্রশ্ন 20 – 23এ $X=b+c-a$, $Y=c+a-b$, $Z=a+b-c$ হইলে সরল কর :

20. $\{-(-X)\}+\{-(-Y)\}+\{-(-Z)\}$

21. $\{(Y+Z)-(Y-Z)\}+\{(Z+X)-(Z-X)\}+\{(X+Y)-(X-Y)\}$

22. $5X-[6Y-\{7Z-(5X-\overline{6Y-7Z})\}]$

23. $241X-3[60Y-5\{20Z-4(4X-3\overline{Y-5Z})\}]$

বন্ধনীস্থাপনের নিয়ম দ্বারা দেখাও যে, $a-b+c-d+e-f$ রাশিমালাটি নিম্নলিখিত রাশিমালাগুলির প্রত্যেকটির সমান :

24. $(a-b)+(c-d)+(e-f)$ **25.** $(a-b+c)-(de-+f)$.

26. $a-(b-c+d-e+f)$ **27.** $a-(b-c)-(d-e+f)$.

ষষ্ঠ অধ্যায়

সূত্রাবলী (Formula) এবং উহাদের প্রয়োগ

74. বীজগণিতীয় প্রতীকের সাহায্যে সংক্ষিপ্ত এবং সুন্দররূপে প্রকাশিত কোন সিদ্ধান্তকে (resultকে) **বীজগণিতীয় সূত্র (Algebraic Formula)** বা শুধু **সূত্র (Formula)** বলা হয়।

নিম্নে কতকগুলি অতি প্রয়োজনীয় গুণফলের সূত্র প্রদত্ত হইল। ইহাদের সাহায্যে বহু পাটীগণিতীয় গুণফল সহজে নির্ণয় করা যায় এবং বীজগণিতের বিবিধ প্রক্রিয়াতেও এইগুলি ব্যবহার করা হয়। অতএব সূত্রগুলি উত্তমরূপে মনে রাখা দরকার।

75. প্রথম সূত্র : $\boldsymbol{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$.

অর্থাৎ দুইটি রাশির সমষ্টির বর্গ নির্ণয় করিতে হইলে উহাদের বর্গদ্বয়ের সমষ্টির সহিত রাশি-দুইটির গুণফলের দ্বিগুণ যোগ করিতে হয়।

[প্রমাণ।

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)\times(a+b)\\ &= a(a+b)+b(a+b)\\ &= a^2+ab+ab+b^2\\ &= a^2+2ab+b^2.\end{aligned}$$

অথবা

$$\begin{array}{r} a+b\\ a+b\\ \hline a^2+ab\\ ab+b^2\\ \hline a^2+2ab+b^2.\end{array}$$]

বিপরীতক্রমে $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$.

অনুসিদ্ধান্ত। $a^2+b^2=(a^2+2ab+b^2)-2ab=(a+b)^2-2ab$.

উদাহরণ 1. 56এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$56^2=(50+6)^2=50^2+2\times 50\times 6+6^2$$
$$=2500+600+36=3136.$$

উদাহরণ 2. $3a+4x$এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$(3a+4x)^2=(3a)^2+2\ (3a).(4x)+(4x)^2$$
$$=9a^2\ \ +24ax+16x^2.$$

উদাহরণ 3. সরল কর : $(5x-3y)^2+(3y-x)^2+2(5x-3y)(3y-x)$

$(5x-3y)$এর পরিবর্তে a এবং $(3y-x)$এর পরিবর্তে b লিখিলে

প্রদত্ত রাশিমালা $=a^2+b^2+2ab=(a+b)^2=\{(5x-3y)+(3y-x)\}^2$
$$=\{4x\}^2=16x^2.$$

উদাহরণ 4. $x=26$ এবং $y=-43$ হইলে $25x^2+30xy+9y^2$এর মান নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=(5x)^2+2(5x)(3y)+(3y)^2=(5x+3y)^2$
$$=\{5\times 26+3\times(-43)\}^2=(130-129)^2=1^2=1.$$

উদাহরণ 5. $a+\frac{1}{a}=5$ হইলে $a^2+\left(\frac{1}{a}\right)^2$এর মান নির্ণয় কর।

$$a^2+\left(\frac{1}{a}\right)^2=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2a\frac{1}{a}. \qquad \text{[অনুসিদ্ধান্ত, 75 অনু.]}$$
$$=5^2-2, \quad \text{[যেহেতু } a.\frac{1}{a}=a\times\frac{1}{a}=a\div a=1 \text{]}$$
$$=25-2=23.$$

প্রশ্নমালা 27

সূত্র দ্বারা নিম্নলিখিত রাশিগুলির বর্গ নির্ণয় কর :

1. 51	2. 62	3. 81	4. 102
5. 225	6. $a+3$	7. $2x+5$	8. $3m+2n$
9. $4a+5x$	10. $3c+5z$	11. $9x+8y$	12. $5p+7q$
13. $2ab+3bc$	14. $3bc+4ca$	15. $2a^2+3b^2$.	

সরল কর :

16. $(a+5)^2+2(a+5)(5-a)+(5-a)^2$

17. $(2x-7)^2+2(2x-7)(9-2x)+(9-2x)^2$

18. $(2a+3b)^2+2(2a+3b)(a-3b)+(a-3b)^2$

19. $(2x+3y-5)^2+2(2x+3y-5)(x-3y+6)+(x-3y+6)^2$

20. $(4a+8b-7c)^2+2(4a+8b-7c)(2a-8b+7c)+(2a-8b+7c)^2$

21. $(4x-3y+2z-10)^2+2(4x-3y+2z-10)(2x+3y-2z+10)$
$+(2x+3y-2z+10)^2$

সরল কর :

22. $5{\cdot}327\times5{\cdot}327+2\times5{\cdot}327\times4{\cdot}673+4{\cdot}673\times4{\cdot}673$

23. $67{\cdot}21\times67{\cdot}21+2\times67{\cdot}21\times32{\cdot}79+32{\cdot}79\times32{\cdot}79$

24. $\dfrac{58273\times58273+2\times58273\times46821+46821\times46821}{58273+46821}$

25. $x=12,\ y=7,\ z=3$ হইলে $(2x+3y+4z)^2+2(2x+3y+4z)\times$
$(x-8y-3z)+(x-8y-3z)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

26. $x=36,\ y=25,\ z=14$ হইলে $(3x-4y+6z)^2+2(3x-4y+6z)\times$
$(2y-2x-5z)+(2y-2x-5z)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

27. $x+\dfrac{1}{x}=3$ হইলে দেখাও যে, (i) $x^2+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2=7$;

(ii) $x^4+\left(\dfrac{1}{x}\right)^4=47.$

28. $p+\dfrac{1}{p}=4$ হইলে দেখাও যে, (i) $p^2+\left(\dfrac{1}{p}\right)^2=14$;

এবং (ii) $p^4+\left(\dfrac{1}{p}\right)^4=194.$

29. $x+\dfrac{1}{x}=a$ হইলে দেখাও যে, $x^2+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2=a^2-2.$

30. $x+y=5$ এবং $xy=6$ হইলে x^2+y^2 এর মান নির্ণয় কর।
[সঙ্কেত : $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy.$]

31. $x+y=a$ এবং $xy=b$ হইলে দেখাও যে, $x^2+y^2=a^2-2b.$

76. দ্বিতীয় সূত্র : $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

অর্থাৎ দুইটি রাশির বিয়োগফলের বর্গ নির্ণয় করিতে হইলে উহাদের বর্গদ্বয়ের সমষ্টি হইতে রাশি-দুইটির গুণফলের দ্বিগুণ বিয়োগ করিতে হয়।

[প্রমাণ। $(a-b)^2=(a-b)(a-b)$
$=a(a-b)-b(a-b)$
$=a^2-ab-ab+b^2$
$=a^2-2ab+b^2$.

অথবা
$$\begin{array}{r} a-b \\ a-b \\ \hline a^2-ab \\ -ab+b^2 \\ \hline a^2-2ab+b^2. \end{array}$$]

বিকল্প প্রমাণ (alternative proof) :

এই সূত্রটি '$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$' সূত্র দ্বারাও প্রমাণ করা যায় :
$(a-b)^2=\{a+(-b)\}^2=a^2+2a(-b)+(-b)^2=a^2-2ab+b^2$.
বিপরীতক্রমে $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.

অনুসিদ্ধান্ত 1. $a^2+b^2=(a^2-2ab+b^2)+2ab=(a-b)^2+2ab$.

অনুসিদ্ধান্ত 2. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=(a^2-2ab+b^2)+4ab$.
$=(a-b)^2+4ab$.
এবং $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2=(a^2+2ab+b^2)-4ab$
$=(a+b)^2-4ab$.

অনুসিদ্ধান্ত 3. যেহেতু $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ ...(1)
এবং $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ ...(2)

অতএব (1) এর সহিত (2) যোগ করিয়া $\boldsymbol{2(a^2+b^2)=(a+b)^2+(a-b)^2}$
এবং (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া $\boldsymbol{4ab=(a+b)^2-(a-b)^2}$.

উদাহরণ 1. 97এর বর্গ নির্ণয় কর।
$97^2=(100-3)^2=100^2-2.100.3+3^2$
$=10000-600+9=9409$.

উদাহরণ 2. $2x-3a$এর বর্গ নির্ণয় কর।
$(2x-3a)^2=(2x)^2-2(2x)(3a)+(3a)^2=4x^2-12xa+9a^2$.

উদাহরণ 3. সরল কর : $(5x+3y)^2-2(5x+3y)(2x+3y)+(2x+3y)^2$.
$(5x+3y)$এর পরিবর্তে a এবং $(2x+3y)$এর পরিবর্তে b লিখিলে
প্রদত্ত রাশিমালা $=a^2-2ab+b^2$
$=(a-b)^2$
$=\{(5x+3y)-(2x+3y)\}^2=\{3x\}^2=9x^2$.

উদাহরণ 4. $x=26, y=32$ হইলে $25x^2-40xy+16y^2$এর মান নির্ণয় কর।

$$25x^2-40xy+16y^2=(5x)^2-2(5x)(4y)+(4y)^2=(5x-4y)^2$$
$$=(5\times 26-4\times 32)^2=(130-128)^2=2^2=4.$$

উদাহরণ 5. $x-\frac{1}{x}=3$ হইলে দেখাও যে, (i) $x^2+\left(\frac{1}{x}\right)^2=11$

এবং (ii) $x^4+\left(\frac{1}{x}\right)^4=119.$

(i) $x^2+\left(\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2x.\frac{1}{x}.$ [অনুসিদ্ধান্ত 1, অণু. 76]

$=3^2+2,$ [যেহেতু $x.\frac{1}{x}=x\times\frac{1}{x}=x\div x=1$]

$=11.$

(ii) $x^4+\left(\frac{1}{x}\right)^4=(x^2)^2+\left\{\left(\frac{1}{x}\right)^2\right\}^2=\left\{x^2+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right\}^2-2x^2\left(\frac{1}{x}\right)^2$

[অনুসিদ্ধান্ত, অণু. 75]

$=11^2-2,$ [যেহেতু (i) দ্বারা $x^2+\left(\frac{1}{x}\right)^2=11,$

এবং $x^2.\left(\frac{1}{x}\right)^2=\left(x.\frac{1}{x}\right)^2=1^2=1.$]

$=119.$

প্রশ্নমালা 28

সূত্র দ্বারা নিম্নলিখিত রাশিগুলির বর্গ নির্ণয় কর :

1. 39 **2.** 99 **3.** 89 **4.** 197

5. 996 **6.** $x-5$ **7.** $2x-5$ **8.** $3m-2n$

9. $4a-5n$ **10.** $3c-5x$ **11.** $9x-8y$ **12.** $2ab-3bc.$

13. $3bc-4ca$ **14.** $2a^2-3b^2.$

সরল কর :

15 $(a+5)^2-2(a+5)(a+3)+(a+3)^2$

16. $(2x+9)^2-2(2x+9)(2x+5)+(2x+5)^2$

17. $(2a+3b)^2-2(2a+3b)(a+3b)+(a+3b)^2$

18. $(3x+2y)^2-2(3x+2y)(x+2y)+(x+2y)^2$

19. $(3x+2y+4z)^2-2(3x+2y+4z)(2x+y+4z)+(2x+y+4z)^2$

20. $89567\times 89567-2\times 89567\times 89565+89565\times 89565$

21. $3{\cdot}1254\times 3{\cdot}1254-2\times 3{\cdot}1254\times 2{\cdot}7254+2{\cdot}7254\times 2{\cdot}7254$

22. $\dfrac{157289\times 157289-2\times 157289\times 82346+82346\times 82346}{157289-82346}$

23. $a=20, x=15$ হইলে $16x^2-24ax+9a^2$এর মান নির্ণয় কর।

24. $x=16, y=42$ হইলে $64x^2-48xy+9y^2$এর মান নির্ণয় কর।

25. $x=20{\cdot}7, y=25{\cdot}3$ হইলে $(2x+3y+8)^2-2(2x+3y+8)\times (x+2y+4)+(x+2y+4)^2$এর মান নির্ণয় কর।

26. $x=7{\cdot}21, \quad y=3{\cdot}12, \quad z=9{\cdot}67$ হইলে $(8x+9y-5z)^2-2(8x+9y-5z)(7x+8y-6z)+(7x+8y-6z)^2$এর মান নির্ণয় কর।

27. $x-\dfrac{1}{x}=3$ হইলে (i) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2$, (ii) $x^2+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2$ এবং (iii) $x^4+\left(\dfrac{1}{x}\right)^4$ এর মান নির্ণয় কর।

28. $x-\dfrac{1}{x}=a$ হইলে দেখাও যে, (i) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=a^2+4$;

(ii) $x^2+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2=a^2+2$ এবং (iii) $x^4+\left(\dfrac{1}{x}\right)^4=a^4+4a^2+2.$

29. $x+\dfrac{1}{x}=p$ হইলে (i) $x^2+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2$এর মান নির্ণয় কর।

এবং দেখাও যে, $x^4+\left(\dfrac{1}{x}\right)^4=p^4-4p^2+2.$

30. $x-y=3, xy=10$ হইলে (i) x^2+y^2, (ii) $(x+y)^2$ এবং (iii) $x+y$ এর মান নির্ণয় কর।

31. $x+y=7, \ xy=10$ হইলে (i) $(x-y)^2$ এবং (ii) $(x-y)$এর মান নির্ণয় কর।

32. $x+y=15, \ x-y=7$ হইলে (i) $2x^2+2y^2$ এবং (ii) $4xy$এর মান নির্ণয় কর।

77. তৃতীয় সূত্র : $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

অর্থাৎ দুইটি রাশির যোগফল এবং বিয়োগফলের গুণফল উক্ত রাশি-দুইটি বর্গের বিয়োগফলের সমান।

[প্রমাণ।

$$(a+b)(a-b)=a(a-b)+b(a-b)$$
$$=a^2-ab+ab-b^2$$
$$=a^2-b^2.$$

অথবা,
$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \\ -ab-b^2 \\ \hline a^2 \quad -b^2. \end{array}$$]

অনুসিদ্ধান্ত 1. $xy=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$.

অর্থাৎ **দুইটি রাশির গুণফল**

=(রাশিদ্বয়ের সমষ্টির অর্দ্ধ)^2 − (রাশিদ্বয়ের অন্তরের অর্দ্ধ)^2.

প্রমাণ। তৃতীয় সূত্রে $a+b$এর স্থলে x এবং $a-b$এর স্থলে y লিখিলে

$$\frac{x+y}{2}=\frac{(a+b)+(a-b)}{2}=\frac{2a}{2}=a$$

এবং $\frac{x-y}{2}=\frac{(a+b)-(a-b)}{2}=\frac{2b}{2}=b$;

যেহেতু $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$;

অতএব $xy=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$.

এই অনুসিদ্ধান্তের সাহায্যে **যে-কোন দুইটি রাশির গুণফলকে দুইটি বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ করা যায়।**

বিপরীতক্রমে $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$; অর্থাৎ $(a+b)$ এবং $(a-b)$ ইহারা প্রত্যেকে a^2-b^2এর উৎপাদক। অতএব কোন রাশিকে অপর দুইটি রাশির বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ করিতে পারিলে প্রথমোক্ত রাশিটিকে এই সূত্রের সাহায্যে **উৎপাদকে বিশ্লেষণ** (Resolve) করা যায়।

উদাহরণ 1. $4x+3a$ এবং $4x-3a$এর গুণফল নির্ণয় কর।

$$(4x+3a)(4x-3a)=(4x)^2-(3a)^2=16x^2-9a^2.$$

উদাহরণ 2. $a-x$, $a+x$, a^2+x^2এর ক্রমিক গুণফল নির্ণয় কর।

$$(a-x)(a+x)(a^2+x^2)=(a^2-x^2)(a^2+x^2)$$
$$=(a^2)^2-(x^2)^2=a^4-x^4.$$

উদাহরণ 3. সরল কর : $87\times87-85\times85$.

প্রদত্ত রাশি $=87^2-85^2=(87+85)(87-85)=172\times2=344.$

উদাহরণ 4. $(3a+4b)(a+2b)$কে দুইটি বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ কর।

77 অণুচ্ছেদের অনুসিদ্ধান্ত 1 দ্বারা

$$(3a+4b)(a+2b)=\left\{\frac{(3a+4b)+(a+2b)}{2}\right\}^2-\left\{\frac{(3a+4b)-(a+2b)}{2}\right\}^2$$
$$=(2a+3b)^2-(a+b)^2.$$

প্রশ্নমালা 29

সূত্রের সাহায্যে গুণফল নির্ণয় কর [প্রথম দশটি অঙ্কের উত্তর মুখে-মুখে বল] :

1. $(a+2)(a-2)$
2. $(a+x)(a-x)$
3. $(2a+3x)\ 2a-3x)$
4. $(5m+7n)(5m-7n)$
5. $(ax+by)(ax-by)$
6. $(x^2-yz)(x^2+yz)$
7. $(2a^2+3b^2)(2a^2-3b^2)$
8. $(5ab-3bc)(5ab+3bc)$
9. $(x^m+a^n)(x^m-a^n)$
10. $(2x^m-3a^n)(2x^m+3a^n)$
11. $(x+y+z)(x-y+z)$
12. $(x-1)(x+1)(x^2+1)$
13. $(1-a)(1+a)(1+a^2)$
14. $(2a-3b)(2a+3b)(4a^2+9b^2)$
15. $(x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$

তৃতীয় সূত্রের সাহায্যে সরল কর :

16. $37\times37-35\times35$
17. $732\times732-729\times729$
18. $6932\times6932-6927\times6927$
19. $582{\cdot}73\times582{\cdot}73-417{\cdot}27\times417{\cdot}27$
20. $678{\cdot}921\times678{\cdot}921-321{\cdot}079\times321{\cdot}079$
21. $\dfrac{28573\times28573-13569\times13569}{28573+13569}$
22. $\dfrac{89723\times89723-36521\times36521}{89723-36521}$

23. $(a+5)^2-(a+3)^2$ 24. $(3x+9y)^2-(2x+9y)^2$

25. $(3a+2b+5)^2-(5a-2b-5)^2$

26. $(7x-2y-8z)^2-(3x+2y+8z)^2$

27. $(2m-3n-7p)^2-(-2m+4n+7p)^2$.

দুইটি রাশির বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ কর :

28. $(x+7)(x+3)$ 29. $(2a+5)(2a+3)$ 30. $(3a+5b)(a+3b)$.

***78 (ক) চতুর্থ সূত্র : $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$.**

প্রমাণ।

$$(x+a)(x+b)=x(x+b)+a(x+b)$$
$$=x^2+bx+ax+ab$$
$$=x^2+(a+b)x+ab.$$

অথবা

$$\begin{array}{l} x+a \\ x+b \\ \hline x^2 \quad +ax \\ \qquad +bx+ab \\ \hline x^2+(a+b)x+ab. \end{array}$$

নিম্নলিখিত গুণফলগুলিও চতুর্থ সূত্র হইতে পাওয়া যায় :

1. $(x+a)(x-b)=x^2+(a-b)x-ab$.
2. $(x-a)(x+b)=x^2+(b-a)x-ab$.
3. $(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab$.

যথা, $(x-a)(x-b)=\{x+(-a)\}\{x+(-b)\}$
$$=x^2+\{(-a)+(-b)\}x+(-a)(-b)$$
$$=x^2-(a+b)x+ab.$$

এইরূপে অন্য গুণফলগুলিও প্রমাণ করা যায়।

অতএব চতুর্থ সূত্র এবং উহার অনুসিদ্ধান্তগুলি নিম্নলিখিতরূপে কথায় প্রকাশ (enunciate) করা যায় :

দুইটি দ্বিপদ রাশিমালার প্রথম পদ একইরূপ হইলে

উহাদের গুণফল $=$ (প্রথম পদ)^2 $+$ স্ব-স্ব চিহ্নযুক্ত দ্বিতীয় পদগুলির সমষ্টি $\times$ প্রথম পদ $+$ স্ব-স্ব চিহ্নযুক্ত দ্বিতীয় পদগুলির গুণফল।

দ্রষ্টব্য। বিপরীতক্রমে $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$.

অতএব এই সূত্রের দ্বারা '$x^2+(a+b)x+ab$'রূপে প্রকাশিত রাশিমালাগুলিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করাও যায়।

নিম্নে চতুর্থ সূত্রের সাহায্যে গুণফল লিখিবার কয়েকটি দৃষ্টান্ত দেওয়া হইল :

উদাহরণ 1. $(x+2)(x+3)=x^2+(2+3)x+2.3=x^2+5x+6$.

* পাঠ্যতালিকায় এই সূত্রটির উল্লেখ নাই, কিন্তু বীজগণিতে ইহা বহুস্থলে ব্যবহার করিতে হয়; এইহেতু সূত্রটি এইস্থলে সন্নিবিষ্ট হইল।

উদাহরণ 2. $(2x+5)(2x-3)=(2x)^2+\{5+(-3)\}(2x)+(5)(-3)$
$=4x^2+4x-15.$

উদাহরণ 3. $(3x-10)(3x+4)$
$=(3x)^2+\{(-10)+4\}(3x)+(-10)\times 4$
$=9x^2-18x-40.$

উদাহরণ 4. $(4x-9)(4x-7)=(4x)^2+\{(-9)+(-7)\}(4x)$
$+(-9)(-7)$
$=16x^2-64x+63.$

উদাহরণ 5. $(2-x)(x+5) \quad =-(x-2)(x+5)$
$=-\{x^2+(-2+5)x+(-2)(5)\}$
$=-\{x^2+3x-10\}=-x^2-3x+10.$

উদাহরণ 6. $(3-x)(4-x) \quad =\{(-x)+3\}\{(-x)+4\}$
$=(-x)^2+(3+4)(-x)+3.4$
$=x^2-7x+12.$

প্রশ্নমালা 30 (ক)

[মৌখিক]

সূত্র দ্বারা গুণফল নির্ণয় কর :

1. $(x+1)(x+2)$ 2. $(x+2)(x+3)$ 3. $(a+2)(a+4)$
4. $(m+9)(m+5)$ 5. $(x+9)(x+8)$ 6. $(n+3)(n-1)$
7. $(y+5)(y-2)$ 8. $(x-3)(x+7)$ 9. $(x-9)(x+11)$
10. $(x-15)(x+4)$ 11. $(x-11)(x+4)$ 12. $(y+3)(y-8)$
13. $(a+2)(a-10)$ 14. $(x-2)(x-3)$ 15. $(c-7)(c-3)$
16. $(m-5)(m-6)$ 17. $(n-7)(n-8)$ 18. $(2+x)(x+3)$
19. $(2-x)(x+5)$ 20. $(x-2)(5+x)$ 21. $(1-p)(2-p)$
22. $(3-m)(5-m)$ 23. $(5-x)(x-2)$ 24. $(7+x)(3-x)$
25. $(2x+1)(2x+3)$ 26. $(3x+2)(3x+5)$ 27. $(4a-3)(4a+7)$
28. $(5a+2)(5a-9)$ 29. $(7x-3)(7x-8)$ 30. $(2b-3)(5-2b)$
31. $(3c-4)(5-3c)$ 32. $(4x+9)(11-4x)$ 33. $(5x-8)(9-5x)$
34. $(5-3a)(4-3a)$ 35. $(7-4y)(8-4y)$

***78. (খ) পঞ্চম সূত্র : $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$.**

প্রমাণ। $(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$=a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)$

$=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3$

$=a^3+b^3$.

বিপরীতক্রমে $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

অতএব এই সূত্রের সাহায্যে দুইটি রাশির ত্রিঘাতের সমষ্টিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ (resolve) করা যায়।

উদাহরণ 1. সরল কর : $(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$.

$2x$এর স্থলে a এবং $3y$এর স্থলে b ধরিলে $2x+3y=a+b$;

এবং $4x^2-6xy+9y^2=(2x)^2-(2x)(3y)+(3y)^2=a^2-ab+b^2$.

অতএব প্রদত্ত রাশি $=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

$=a^3+b^3=(2x)^3+(3y)^3=8x^3+27y^3$.

উদাহরণ 2. সরল কর : $(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^3-b^3)$.

$(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^3-b^3)=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$

$=(a^3)^2-(b^3)^2$, [তৃতীয় সূত্র]

$=a^6-b^6$.

প্রশ্নমালা 30 (খ)

সরল কর :

1. $(x+1)(x^2-x+1)$
2. $(x+2)(x^2-2x+4)$
3. $(3+a)(9-3a+a^2)$
4. $(2x+a)(4x^2-2xa+a^2)$
5. $(3m+2n)(9m^2-6mn+4n^2)$
6. $(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$
7. $(4p+3q)(9q^2-12pq+16p^2)$
8. $(4x^2-14xy+49y^2)(7y+2x)$
9. $(x+1)(x^2-x+1)(x^3-1)$
10. $(x+2)(x^2-2x+4)(x^3-8)$
11. $(2x+1)(4x^2-2x+1)(8x^3-1)$
12. $(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)(x^6-y^6)$
13. $\dfrac{68\times68\times68+32\times32\times32}{68\times68-68\times32+32\times32}$

* পাঠ্যতালিকায় এই সূত্রটির উল্লেখ নাই ; কিন্তু বীজগণিতে ইহা বহুস্থলে ব্যবহার করিতে হয়, এইহেতু সূত্রটি এইস্থলে প্রদত্ত হইল।

14. $\dfrac{567\times567\times567+693\times693\times693}{567\times567-567\times693+693\times693}$.

***78 (গ) ষষ্ঠ সূত্র : $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.**

প্রমাণ। $(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$=a(a^2+ab+b^2)-b(a^2+ab+b^2)$

$=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3=a^3-b^3$.

বিপরীতক্রমে $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

অতএব এই সূত্রের সাহায্যে দুইটি রাশির ত্রিঘাতের বিয়োগফলকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়।

উদাহরণ। সরল কর : $(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$.

$2x$এর স্থলে a এবং $3y$এর স্থলে b ধরিলে $2x-3y=a-b$;

$4x^2+6xy+9y^2=(2x)^2+(2x)(3y)+(3y)^2=a^2+ab+b^2$.

অতএব প্রদত্ত রাশি $=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$=a^3-b^3=(2x)^3-(3y)^3=8x^3-27y^3$.

প্রশ্নমালা 30 (গ)

সরল কর :

1. $(x-1)(x^2+x+1)$
2. $(x-2)(x^2+2x+4)$
3. $(3-a)(9+3a+a^2)$
4. $(2x-a)(4x^2+2xa+a^2)$
5. $(3m-2n)(9m^2+6mn+4n^2)$
6. $(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$
7. $(4p-3q)(9q^2+12pq+16p^2)$
8. $(x-1)(x^2+x+1)(x^3+1)$
9. $(x-2)(x^2+2x+4)(x^3+8)$
10. $(2x-1)(4x^2+2x+1)(8x^3+1)$
11. $(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)(x^6+y^6)$
12. $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$
13. $(y-z)(y^2+yz+z^2)+(z-x)(z^2+zx+x^2)+(x-y)(x^2+xy+y^2)$
14. $\dfrac{1727\times1727\times1727-985\times985\times985}{1727\times1727+1727\times985+985\times985}$
15. $\dfrac{98{\cdot}7\times98{\cdot}7\times98{\cdot}7-97{\cdot}7\times97{\cdot}7\times97{\cdot}7}{98{\cdot}7\times98{\cdot}7+98{\cdot}7\times97{\cdot}7+97{\cdot}7\times97{\cdot}7}$.

---

* এই সূত্রটি পাঠ্যতালিকায় উল্লিখিত না হইলেও বীজগণিতে বহুস্থানে ইহা ব্যবহার করিতে হয়। এইজন্য সূত্রটি এইস্থলে প্রদত্ত হইল।

সপ্তম অধ্যায়

সরল-সমীকরণ-বিষয়ক প্রশ্ন

(Problems leading to simple equations)

79. পূর্ব্বেই উল্লিখিত হইয়াছে যে, গণিত-শাস্ত্রের বিবিধ প্রশ্নের সহজ সমাধান-প্রণালী-আবিষ্কারের প্রেরণা হইতেই বীজগণিতের উৎপত্তি হয়। বস্তুতঃ বীজগণিতের সাহায্যে গণিতের বহু প্রশ্ন সহজে সমাধান করা যায়। বর্ত্তমান অধ্যায়ে সহজ সহজ-প্রশ্ন-সমাধানের বীজগণিতীয় প্রণালী প্রদত্ত হইল, জটিল প্রশ্নের বিষয় পরে আলোচিত হইবে।

বীজগণিতে সমীকরণের (equationএর) সাহায্যে প্রশ্ন সমাধান করা হয়। সমীকরণ কাহাকে বলে, তাহা পরবর্ত্তী অণুচ্ছেদে বিবৃত হইল।

80. সমীকরণ; সমীকরণের পক্ষ; বীজ (Root)।

দুইটি রাশির মধ্যে (=) সাম্য-চিহ্ন বসিলে রাশি-দুইটি পরস্পর সমান বুঝায়। সাম্য-চিহ্নের দ্বারা একটি রাশির সহিত অপর এক রাশির সংযোগকে **সমীকরণ (equation)** বলে। চিহ্নটির উভয় পার্শ্বে অবস্থিত রাশিদ্বয়কে সমীকরণের **পার্শ্ব (side)** বা **পক্ষ (member)** বলা হয়। তন্মধ্যে বামপার্শ্বে অবস্থিত রাশিকে **বামপক্ষ (left side)** এবং ডানদিকে অবস্থিত রাশিকে **দক্ষিণপক্ষ (right side)** বলে।

যথা, $3x=12$, একটি সমীকরণ; $3x$ ইহার বামপক্ষ; 12 ইহার দক্ষিণপক্ষ।

প্রত্যেক সমীকরণে অজ্ঞাত সংখ্যাসূচক এক বা একাধিক অক্ষর থাকে, সমীকরণ দ্বারা ইহাদের মান নির্ণয় করিতে হয়; অর্থাৎ এই অক্ষর বা অক্ষরগুলির কোন্-কোন্ মান সমীকরণের উভয় পক্ষকে সমান করে, তাহা নির্ণয় করিতে হয়। সমীকরণ হইতে সংখ্যাসূচক অক্ষরগুলির লব্ধ মানকে সমীকরণের **বীজ (root, solution)** বলে। কোন **সমীকরণ সমাধান করা (solve)** বলিলে উহার বীজ-নির্ণয় করা বুঝায়।

যদি কোন সমীকরণ এরূপভাবে লিখা যায় যে, উহাতে প্রথম ঘাতবিশিষ্ট একটি-মাত্র অজ্ঞাত-সংখ্যাসূচক অক্ষর থাকে, তাহা হইলে তাহাকে **সরল সমীকরণ (simple equation)** বলা হয়। যথা,

(i) $3x=12$, একটি সরল সমীকরণ।

(ii) $3x-2=2x+7$, একটি সরল সমীকরণ।

81. সমীকরণের দুই পক্ষকে তুলাদণ্ডের দুই পাল্লায় স্থাপিত সমান-সমান ওজনের সহিত তুলনা করা যায়। শিক্ষার্থিগণ এই কথাটি মনে রাখিলে সমীকরণের বিষয়-বস্তু সহজে বুঝিতে পারিবে।

82. **গণিত-শাস্ত্রে ব্যবহৃত স্বতঃসিদ্ধ।** গণিত-শাস্ত্রে বিশেষতঃ সমীকরণের সাহায্যে প্রশ্ন-সমাধানে নিম্নলিখিত সহজ সিদ্ধান্ত অর্থাৎ স্বতঃসিদ্ধগুলি ব্যবহৃত হয়।

(1) সমান-সমান রাশির সহিত সমান-সমান (বা একই) রাশি যোগ করিলে যোগফলগুলি পরস্পর সমান হইবে।

(2) সমান-সমান রাশি হইতে সমান-সমান (বা একই) রাশি বিয়োগ করিলে বিয়োগফলগুলি পরস্পর সমান হইবে।

(3) সমান-সমান রাশিকে সমান-সমান (বা একই) রাশি দ্বারা গুণ করিলে গুণফলগুলি পরস্পর সমান হইবে। [যথা, সমান-সমান বস্তুর দ্বিগুণগুলি পরস্পর সমান।]

(4) সমান-সমান রাশিকে সমান-সমান (বা একই) রাশি দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফলগুলি পরস্পর সমান হইবে। [যথা, সমান-সমান রাশির অর্দ্ধেকগুলি পরস্পর সমান।]

সমীকরণের উভয় পক্ষ পরস্পর সমান। অতএব সমীকরণের উভয় পক্ষের বেলায়ও উল্লিখিত স্বতঃসিদ্ধগুলি প্রয়োগ করা যায়।

83. **সরল সমীকরণের সমাধান।**

উদাহরণ 1. সমাধান কর : $3x=18$.

[অর্থাৎ x কত হইলে $3x=18$ হয়, স্থির কর]

$$3x=18$$

উভয় পক্ষকে (xএর সহগ অর্থাৎ) 3 দ্বারা ভাগ করিলে

$$\frac{3x}{3}=\frac{18}{3} \qquad [\text{ স্বতঃসিদ্ধ } 4]$$

$$\therefore \quad x = \mathbf{6}.$$

[উত্তরের বিশুদ্ধি-পরীক্ষা : $3x=3\times x=3\times 6=18.$*]

এস্থলে $x=6$ প্রদত্ত সমীকরণ $3x=18$এর **বীজ**।

---

* প্রত্যেক স্থলে উত্তরের বিশুদ্ধি পরীক্ষা করিবে।

উদাহরণ 2. সমাধান কর : $4x+2=14$.

$$4x+2=14.$$

উভয় পক্ষ হইতে 2 বিয়োগ করিলে

$$4x+2-2=14-2. \qquad [\text{স্বতঃসিদ্ধ } 2]$$

অর্থাৎ $4x=12$,

উভয় পক্ষকে (xএর সহগ অর্থাৎ) 4 দ্বারা ভাগ করিলে

$$\frac{4x}{4}=\frac{12}{4} \qquad [\text{স্বতঃসিদ্ধ } 4]$$

$$\therefore \; x=3.$$

[উত্তরের বিশুদ্ধি-পরীক্ষা : $4x+2=4\times3+2=14$.]

উদাহরণ 3. সমাধান কর : $\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}x+\frac{3}{4}x=1\frac{1}{6}$.

$$\tfrac{1}{2}x-\tfrac{2}{3}x+\tfrac{3}{4}x=1\tfrac{1}{6}=\tfrac{7}{6}.$$

(সহগসমূহের হরগুলির অর্থাৎ) 2, 3, 4 এবং 6এর ল. সা. গু. $=12$; উভয় পক্ষকে 12 দ্বারা গুণ করিয়া

$$6x-8x+9x=14 \qquad [\text{স্বতঃসিদ্ধ } 3].$$

সরল করিয়া $7x=14$

উভয় পক্ষকে (xএর সহগ অর্থাৎ) 7 দ্বারা ভাগ করিয়া

$$\frac{7x}{7}=\frac{14}{7} \qquad [\text{স্বতঃসিদ্ধ } 4]$$

$$\therefore \; x=2.$$

[সমাধানের বিশুদ্ধি-পরীক্ষা : $\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}x+\frac{3}{4}x=\frac{1}{2}\times2-\frac{2}{3}\times2+\frac{3}{4}\times2$

$=1-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}=1\frac{1}{6}$.]

প্রশ্নমালা 31

মৌখিক সমাধান কর :

1. $2x=6$ 2. $3x=12$ 3. $4x=32$ 4. $15x=45$

5. $14x=154$ 6. $\frac{1}{2}x=3$ 7. $\frac{1}{4}x=5$ 8. $\frac{1}{7}x=14$

9. $\frac{1}{10}x=6$ 10. $\frac{x}{12}=8$ 11. $x+5=7$ 12. $x+10=22$

13. $x+17=19$ **14.** $x-2=3$ **15.** $x-7=10$
16. $x-12=18$ **17.** $2x+1=5$ **18.** $3x+2=14$
19. $7x+12=40$ **20.** $3x-2=4$ **21.** $7x-8=41$
22. $9x-161=19$ **23.** $5x-14=46$ **24.** $\frac{1}{3}x+1=2$
25. $\frac{1}{2}x+3=5$ **26.** $\frac{1}{5}x+5=7$ **27.** $\frac{1}{4}x-2=1$
28. $\frac{1}{5}x-3=2$ **29.** $\frac{1}{3}x-2=3$ **30.** $2x+3x=15$
31. $5x-2x=6$ **32.** $\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}x=3$ **33.** $2\frac{1}{2}x-1\frac{3}{4}x=1\frac{1}{2}$
34. $2x+7x+x=10$ **35.** $5x-2x+3x=12$
36. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x=5.$

84. সরল-সমীকরণ-বিষয়ক প্রশ্ন।

উদাহরণ 1. কোন্ সংখ্যার দ্বিগুণের সহিত 3 যোগ করিলে যোগফল 11 হইবে ?

মনে কর, অজ্ঞাত সংখ্যাটি $=x$.
উহার দ্বিগুণ $=x\times 2=2x$.
অতএব প্রশ্ন হইতে $2x+3=11$.
ইহার উভয় পক্ষ হইতে 3 বিয়োগ করিলে

$$2x+3-3=11-3 \qquad \text{[স্বতঃসিদ্ধ 2]}$$

অর্থাৎ $2x=8$

উভয় পক্ষকে (xএর সহগ অর্থাৎ) 2 দ্বারা ভাগ করিয়া

$$\frac{2x}{2}=\frac{\overset{4}{8}}{2} \qquad \text{[স্বতঃসিদ্ধ 4]}$$

$$\therefore x=4.$$

অতএব নির্ণেয় সংখ্যা $=$ **4.**

[সমাধানের বিশুদ্ধি-পরীক্ষা : $4\times 2=8$; $8+3=11.$]*

উদাহরণ 2. পিতার বয়স এবং পুত্রের বয়সের সমষ্টি 60 বৎসর এবং অন্তর 24 বৎসর। উহাদের বয়স কত ?

মনে কর, পিতার বয়স $=x$ বৎসর ; তাহা হইলে পুত্রের বয়স $=(60-x)$ বৎসর। অতএব প্রশ্নের সর্তানুসারে

*প্রত্যেকস্থলে উত্তরের বিশুদ্ধি পরীক্ষা করিতে হইবে।

x বৎসর $-(60-x)$ বৎসর $=24$ বৎসর ;
অর্থাৎ $x-(60-x)=24$;
সরল করিয়া $2x-60=24$;
উভয় পক্ষে 60 যোগ করিয়া
$$2x-60+60=24+60 \qquad [\text{স্বতঃসিদ্ধ } 1]$$
অর্থাৎ $2x=84$;
উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করিয়া
$$x=\tfrac{84}{2}=42\ ; \qquad [\text{স্বতঃসিদ্ধ } 4]$$
অতএব পিতার বয়স = **42** বৎসর এবং পুত্রের বয়স $=(60-42)$ বা **18** বৎসর।
[বিশুদ্ধি-পরীক্ষা : $42+18=60$; $42-18=24$.]

মন্তব্য। এস্থলে পুত্রের বয়সকে x ধরিয়াও সমাধান নির্ণয় করা চলে।

উদাহরণ 3. তিনটি ক্রমিক (consecutive) অখণ্ড সংখ্যার সমষ্টি 51 হইলে সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর।

মনে কর, মধ্যম সংখ্যাটি $=x$; তাহা হইলে উহার ঠিক পূর্ব্ববর্ত্তী সংখ্যা $=x-1$ এবং ঠিক পরবর্ত্তী সংখ্যা $=x+1$, (যেহেতু দুইটি ক্রমিক সংখ্যার অন্তর $=\mathbf{1}$)। অতএব সংখ্যা-তিনটির সমষ্টি $=(x-1)+x+(x+1)=3x$.

সুতরাং প্রশ্নের সর্ত্তানুসারে $3x=51$;
উভয় পক্ষকে 3 দ্বারা ভাগ করিলে $x=\frac{51}{3}=17$.
অতএব নির্ণেয় সংখ্যাগুলি যথাক্রমে $17-1$, 17, $17+1$ বা **16, 17, 18.**
[বিশুদ্ধি-পরীক্ষা : $16+17+18=51$.]

মন্তব্য। এস্থলে ক্ষুদ্রতম কিংবা বৃহত্তম সংখ্যাকে x ধরিয়াও সমাধান নির্ণয় করা যায়।

প্রশ্নমালা 32

অনু. 84-প্রদর্শিত প্রণালীতে বীজগণিতের সাহায্যে সমাধান কর :

1. কোন্ সংখ্যার সহিত 12 যোগ করিলে যোগফল 18 হয় ?
2. কোন্ সংখ্যা হইতে 15 বিয়োগ করিলে বিয়োগফল 12 হয় ?
3. কোন্ সংখ্যার 6 গুণ 42 ?
4. কোন্ সংখ্যার এক-তৃতীয়াংশ 15 ?

5. কোন্ সংখ্যার 4 গুণের সহিত 5 যোগ করিলে যোগফল 33 হয় ?

6. কোন্ সংখ্যার 3 গুণের সহিত 2 যোগ করিলে যোগফল 80 হয় ?

7. কোন্ সংখ্যার 8 গুণ হইতে 3 বিয়োগ করিলে বিয়োগফল 45 হয় ?

8. কোন সংখ্যার দ্বিগুণের সহিত উহার পাঁচগুণ যোগ করিলে যোগফল 77 হয়, সংখ্যাটি কত ?

9. একটি সংখ্যার পাঁচগুণ হইতে উহার দ্বিগুণ বিয়োগ করাতে বিয়োগফল 39 হইল, সংখ্যাটি কত ?

10. কোন সংখ্যার $\frac{1}{5}$এর সহিত 7 যোগ করাতে যোগফল 32 হইল, সংখ্যাটি কত ?

11. 6এর সহিত কোন্ সংখ্যার $\frac{2}{3}$ যোগ করিলে যোগফল 24 হইবে ?

12. কোন্ সংখ্যার এক-চতুর্থাংশের সহিত 5 যোগ করিলে যোগফল 15 হয় ?

13. এমন একটি সংখ্যা নির্ণয় কর, যেন উহার $\frac{1}{4}$ হইতে 3 বিয়োগ করিলে বিয়োগফল 5 হয়।

14. এমন একটি সংখ্যা নির্ণয় কর, যেন উহার এক-তৃতীয়াংশ এবং দুই-পঞ্চমাংশের সমষ্টি 44 হয়।

15. কোন্ সংখ্যার অর্দ্ধেক হইতে উহার এক-তৃতীয়াংশ বিয়োগ করিলে বিয়োগফল 16 হয় ?

16. এমন একটি সংখ্যা নির্ণয় কর, যেন উহার $\frac{1}{4}$ এবং $\frac{3}{28}$ এর অন্তর 8 হয়।

17. কোন্ সংখ্যার $\frac{2}{5}$ উহার $\frac{3}{8}$ অপেক্ষা 2 বেশী ?

18. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 32 এবং অন্তর 16, সংখ্যাদ্বয় কত ?

19. পিতা ও পুত্রের বর্ত্তমান বয়সের সমষ্টি 70 বৎসর, পিতার 24 বৎসর বয়সে পুত্রের জন্ম হইয়া থাকিলে পুত্রের বয়স কত ?

20. একটি ঘড়ি ও একটি কলমের দাম মোট 150 টাকা ; ঘড়ির দাম কলমের দাম অপেক্ষা 90 টাকা বেশী হইলে ঘড়ির দাম কত ?

21. 300 টাকা A এবং Bএর মধ্যে এরূপে ভাগ করিয়া দাও, যেন A B হইতে 100 টা. বেশী পায়।

22. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 60 ; একটি অপরটির দ্বিগুণ হইলে লঘুতর সংখ্যাটি কত ?

23. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 70 ; একটি অপরটির তিনগুণ অপেক্ষা 10 বেশী হইলে সংখ্যাদ্বয় কত ?

24. 80কে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর, যেন এক অংশের 8 গুণ এবং অপর অংশের 4 গুণের সমষ্টি 400 হয়।

25. 100কে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর, যেন এক অংশের 8 গুণ অপর অংশের 14 গুণ অপেক্ষা 30 বেশী হয়।

26. 35 টাকা A এবং Bএর মধ্যে এরূপে ভাগ করিয়া দাও, যেন Aএর অংশের 10 গুণ Bএর অংশের 15 গুণ অপেক্ষা 25 টাকা কম হয়।

27. পিতা ও পুত্রের বয়সের সমষ্টি 80 বৎসর, পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ অপেক্ষা 5 বৎসর বেশী হইলে কাহার বয়স কত ?

28. একব্যক্তি তাঁহার প্রথম পুত্রকে দ্বিতীয় পুত্রের দ্বিগুণ এবং দ্বিতীয় পুত্রকে তৃতীয় পুত্রের তিনগুণ টাকা দিলেন। যদি উহারা মোট 10,000 টাকা পাইয়া থাকে, তবে কে কত পাইল ?

[সঙ্কেত : ক্ষুদ্রতম অংশকে x টাকা ধর।]

29. একব্যক্তি 525 টাকায় চারিটিঘড়ি এবং একটি কলম ক্রয় করিল, যদি প্রত্যেক ঘড়ির মূল্য কলমের মূল্যের পাঁচ গুণ হয়, তবে কাহার মূল্য কত ?

30. একখানি গাড়ী ও একটি বাড়ীর দাম একত্রযোগে 20,000 টাকা। গাড়ীর দামের বিশগুণ বাড়ীর দাম অপেক্ষা 1000 টাকা বেশী হইলে গাড়ীর দাম কত ?

31. পিতার বর্ত্তমান বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ। পুত্রের বর্ত্তমান বয়সের 8 গুণ পিতার 10 বৎসর পূর্ব্বের বয়সের 3 গুণ অপেক্ষা 90 বৎসর বেশী হইলে উহাদের বর্ত্তমান বয়স কত ?

32. তিনটি ক্রমিক সংখ্যার সমষ্টি 54 ; সংখ্যাগুলি কত ?

33. তিনটি ক্রমিক যুগ্মসংখ্যার সমষ্টি 72 ; সংখ্যাগুলি কত ?

34. তিনটি ক্রমিক অযুগ্মসংখ্যার সমষ্টি 93 ; সংখ্যাত্রয় নির্ণয় কর।

35. 50 টাকা A, B এবং Cএর মধ্যে এরূপে ভাগ করিয়া দাও, যেন A B অপেক্ষা 10 টাকা এবং B C অপেক্ষা 5 টাকা বেশী পায়।

[সঙ্কেত : ক্ষুদ্রতম অংশকে x টাকা ধর।]

36. 85কে এরূপ তিন অংশে বিভক্ত কর, যেন প্রথম অংশ দ্বিতীয় অংশ অপেক্ষা 10 বেশী হয় এবং দ্বিতীয় অংশ তৃতীয় অংশের দ্বিগুণ হয়।

37. 120টি আম A, B ও Cএর মধ্যে এইরূপে ভাগ করিয়া দাও, যেন A Bএর তিনগুণ অপেক্ষা 10টি বেশী পায় এবং B Cএর দ্বিগুণ অপেক্ষা 5টি বেশী পায়।

38. 350টি লেবু 100 জন বালক এবং বালিকার মধ্যে ভাগ করিয়া দেওয়াতে প্রত্যেক বালক 5টি এবং প্রত্যেক বালিকা 3টি লেবু পাইল, বালকের সংখ্যা কত ?

39. 100কে এরূপ তিন অংশে বিভক্ত কর, যেন প্রথম অংশের অর্দ্ধেক দ্বিতীয় অংশের এক-তৃতীয়াংশ এবং চতুর্থ অংশের এক-পঞ্চমাংশ পরস্পর সমান হয়।

[সঙ্কেত : মনে কর, প্রথম অংশের অর্দ্ধেক $=x$.]

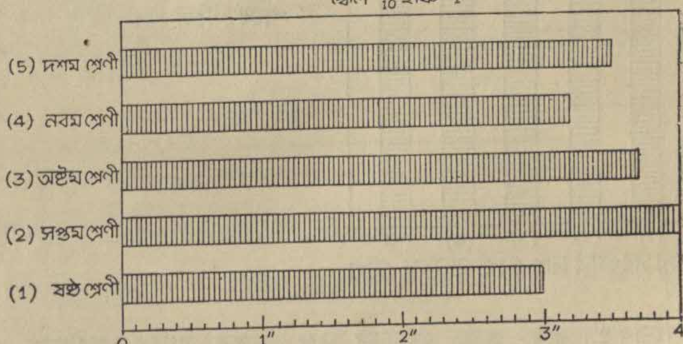
40. 120 টাকা A, B এবং Cএর মধ্যে এরূপে ভাগ করিয়া দাও, যেন Aএর অংশের এক-তৃতীয়াংশ Bএর অংশের এক-চতুর্থাংশ এবং Cএর অংশের এক-পঞ্চমাংশ পরস্পর সমান হয়।

অষ্টম অধ্যায়

দণ্ডলেখ (Bar-Graph) : স্তম্ভলেখ (Column-Graph)

85. মনে কর, কোন বিদ্যালয়ের বার্ষিক পরীক্ষায় ষষ্ঠ, সপ্তম, অষ্টম, নবম এবং দশম শ্রেণী হইতে যথাক্রমে 30, 40, 37, 32 এবং 35 জন ছাত্র পাস করিল। এই সংখ্যাগুলিকে সরলরেখা দ্বারা সূচিত করা যায়। যদি $\frac{1}{10}$ ইঞ্চি দৈর্ঘ্য দ্বারা 1 (এক) সংখ্যাটি সূচিত করা হয়, তাহা হইলে 30 সূচিত হইবে ($30 \times \frac{1}{10}$ বা) 3 ইঞ্চি দৈর্ঘ্য দ্বারা। এইরূপভাবে 40, 37, 32 এবং 35 যথাক্রমে 4, 3·7, 3·2 এবং 3·5 ইঞ্চি দৈর্ঘ্য দ্বারা সূচিত হইবে। এখন নিম্নের চিত্রে প্রদর্শিত প্রণালীতে 3 ইঞ্চি, 4 ইঞ্চি, 3·7 ইঞ্চি, 3·2 ইঞ্চি এবং 3·5 ইঞ্চি দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট পাঁচটি স্থূল অনুভূমিক (horizontal) রেখা বা দণ্ড টান। তাহা হইলে পাশের সংখ্যাগুলি এই সরলরেখা-গুলির দৈর্ঘ্য দ্বারা সূচিত হইবে।

উদাহরণ 1.

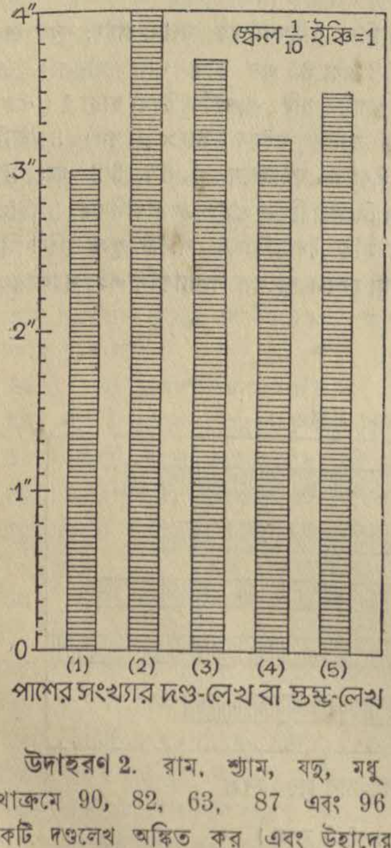


পাশের সংখ্যার দণ্ড-লেখ

এইরূপ চিত্রকে **দণ্ডলেখ** (Bar-Graph) বলে।

দণ্ডলেখ দ্বারা কোন রাশি-সমাবেশে রাশিগুলির মান সহজে তুলনা করা যায়, উহাদের মধ্যে কোন্‌টি বৃহত্তম ও কোন্‌টি ক্ষুদ্রতম, তাহা লেখ দেখিয়াই বলা যায় ; রাশিগুলিকে মানের ক্রমানুসারে সহজে সাজান যায়। যথা, উল্লিখিত প্রশ্নে দণ্ডলেখ দেখিয়া বলা যায় যে, পাসের সংখ্যার নিম্নগ-ক্রমে সাজাইলে

সপ্তম, অষ্টম, দশম, নবম এবং ষষ্ঠশ্রেণী
যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুর্থ এবং পঞ্চম স্থানে থাকিবে;



পাশের সংখ্যার দণ্ড-লেখ বা স্তম্ভ-লেখ

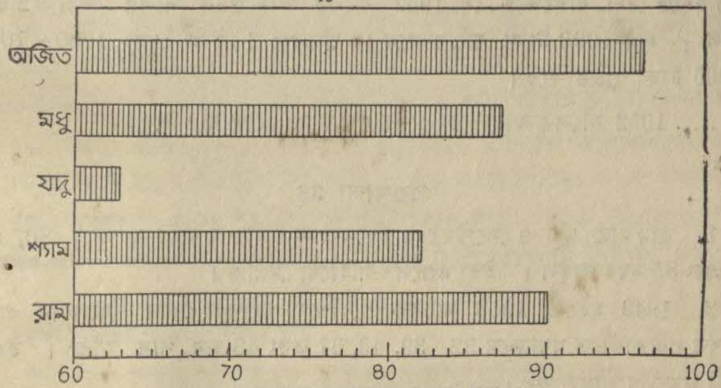
পাসের সংখ্যা সপ্তম শ্রেণীর বৃহত্তম এবং ষষ্ঠ শ্রেণীর ক্ষুদ্রতম।

দণ্ডলেখ অঙ্কিত করিতে রেখা-গুলিকে উল্লম্বভাবে (vertically) স্তম্ভাকারেও অঙ্কিত করা চলে। (পার্শ্বের চিত্র দেখ)

উদাহরণ 2. রাম, শ্যাম, যদু, মধু এবং অজিত বার্ষিক পরীক্ষায় অঙ্কে যথাক্রমে 90, 82, 63, 87 এবং 96 নম্বর পাইল। প্রাপ্ত নম্বরগুলির একটি দণ্ডলেখ অঙ্কিত কর এবং উহাদের মধ্যে অঙ্কে কে প্রথম, দ্বিতীয় এবং তৃতীয় হইল, তাহা লেখ হইতে স্থির কর।

এস্থলে $\frac{1}{10}$ ইঞ্চিকে 1 নম্বর ধরিয়া উক্ত স্কেলে দণ্ডলেখ অঙ্কিত হইল। ন্যূনতম নম্বর 60এর অধিক বলিয়া স্কেলে 60এর নীচের নম্বর-চিহ্নগুলি প্রদর্শিত হইল না। এস্থলে দণ্ডলেখগুলির যে-যে অংশ 60-নম্বর চিহ্নের ডানদিকে

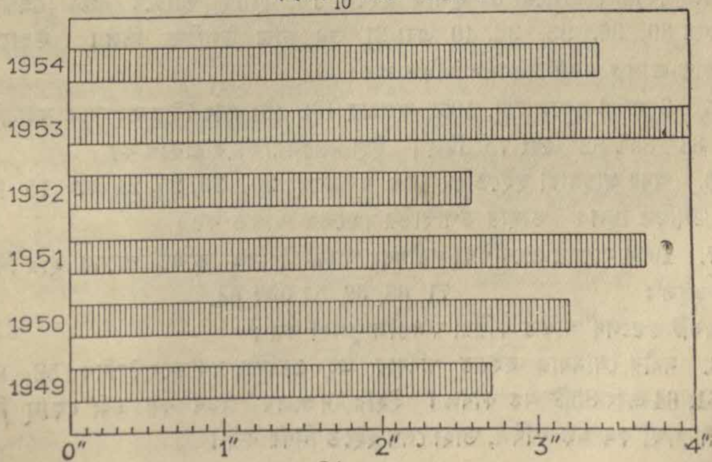
অবস্থিত, শুধু সেই অংশগুলিই প্রদর্শিত হইল। কারণ ফলগুলি পরস্পর তুলনা করিবার জন্য এই অংশগুলিরই প্রয়োজন।



অঙ্কের নম্বরের দণ্ড-লেখ

দণ্ডলেখ হইতে সুস্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে অজিত, রাম এবং মধুই যথাক্রমে অঙ্কে প্রথম, দ্বিতীয় এবং তৃতীয় হইয়াছে।

উদাহরণ 3. নিম্নে একটি বিদ্যালয়ের 1949 হইতে 1954 সালের বার্ষিক



বার্ষিক আয়ের দণ্ড-লেখ

আয় দণ্ডলেখ-সাহায্যে প্রদর্শিত হইল। উহার আয় কোন্ সালে সর্ব্বাপেক্ষা বেশী ছিল এবং উহা 1952 সালে কত ছিল, তাহা লেখ দ্বারা নির্ণয় কর।

লেখ হইতে দেখা যাইতেছে যে, 1953 সালের আয়ই সর্ব্বাপেক্ষা বেশী। স্কেল হইতে দেখা যাইতেছে যে, 1952 সালের আয়-সূচক দণ্ডের দৈর্ঘ্য $= 2\cdot6''$; স্কেলে $\frac{1}{10}$ ইঞ্চি 1000 টাকা সূচিত করে। সুতরাং 1 ইঞ্চি দৈর্ঘ্য 1000×10 বা 10000 টাকা সূচিত করে।

$\therefore$ 1952 সালের আয় $= 2\cdot6 \times 10000$ টাকা $= 26000$ টাকা।

প্রশ্নমালা 33

1. রাম মার্চ্চ, জুন ও সেপ্টেম্বর ও ডিসেম্বরের পরীক্ষায় অঙ্কে যথাক্রমে 80, 60, 75 এবং 85 নম্বর পাইল। ইহা দণ্ডলেখ-সাহায্যে দেখাও।

2. 1949 হইতে 1953 সালের প্রবেশিকা-পরীক্ষায় কোন বিদ্যালয়ের প্রতি একশত পরীক্ষার্থীতে যথাক্রমে 32, 39, 43, 37 এবং 48 জন পাস করিল। ইহার একটি স্তম্ভলেখ অঙ্কিত কর।

3. শ্যামল, অজিত, বিমল, চারু এবং অসীম 1954 সালের স্কুল-ফাইন্যাল পরীক্ষায় যথাক্রমে ইতিহাসে 54, 48, 60, 78 ও 82 নম্বর পাইল। ফলগুলি দণ্ডলেখাকারে প্রকাশ কর এবং উহাদের মধ্যে কে প্রথম, দ্বিতীয় এবং তৃতীয় স্থান অধিকার করিল, তাহা লেখ হইতে স্থির কর।

4. কোন বিদ্যালয়ে 5 জুলাই হইতে 10 জুলাই তারিখে সপ্তম শ্রেণীতে যথাক্রমে 30, 38, 33, 36, 40 এবং 31 জন ছাত্র উপস্থিত ছিল। উহাদের উপস্থিতি-জ্ঞাপক একটি দণ্ডলেখ অঙ্কিত কর।

5. 3 আগষ্ট সকাল 7টা, 10টা, অপরাহ্ণ 1টা, 4টা এবং 7টায় তাপমাত্রা যথাক্রমে $81°, 83°, 85°, 82°$ এবং $75°$ ছিল। ইহা দণ্ডলেখাকারে প্রকাশ কর।

6. অমর জানুয়ারী হইতে মে মাসে যথাক্রমে 20, 23, 25, 21 এবং 15 দিন স্কুলে উপস্থিত ছিল। তাহার উপস্থিতির দণ্ডলেখ অঙ্কিত কর।

7. 1954 সালের প্রবেশিকা-পরীক্ষায় পাঁচটি বিভিন্ন স্কুলের পাসের হার নিম্নে প্রদত্ত হইল : 71, 68, 62, 57 এবং 64.

একটি স্তম্ভলেখ অঙ্কিত করিয়া ফলগুলি তুলনা কর।

8. সমীর সোমবার হইতে শনিবার এই ছয়দিনে যথাক্রমে দৈনিক 52, 64, 75, 61, 64 এবং 85টি অঙ্ক কষিল। ইহার দণ্ডলেখ অঙ্কন কর এবং কোন্ দিন সে সর্ব্বাপেক্ষা কম অঙ্ক কষিল, তাহা লেখ হইতে নির্ণয় কর।

9. কোন স্কুলে ষষ্ঠ হইতে দশম শ্রেণীর ছাত্রসংখ্যা যথাক্রমে 82, 103, 79, 93 এবং 102। ইহা স্তম্ভলেখাকারে প্রকাশ কর এবং লেখসাহায্যে শ্রেণীগুলিকে ছাত্রসংখ্যার নিম্নগ-ক্রমে সাজাও।

10. ভারত, চীন, জাপান, রাশিয়া, ইউনাইটেড ষ্টেট্স্, পাকিস্তান এবং গ্রেট-বৃটেনের লোকসংখ্যা যথাক্রমে 36 কোটি, 46 কোটি, 8 কোটি, 19 কোটি 15 কোটি, 7 কোটি এবং 5 কোটি। ইহা স্তম্ভলেখ দ্বারা প্রকাশ করিয়া দেখাও।

11. বাংলা, হিন্দী, চীনা, জাপানী, ইংরেজি এবং রাশিয়ান ভাষাভাষীদের সংখ্যা যথাক্রমে 6, 7, 40, 7, 20 এবং 18 কোটি। ইহা একটি দণ্ডলেখাকারে প্রকাশ কর।

12. মাধ্যমিক শিক্ষাপর্ষতের স্বাস্থ্যপরীক্ষা-বিভাগ কোন বিদ্যালয়ের দশম শ্রেণীর পাঁচজন ছাত্রের উচ্চতা-পরীক্ষার ফলগুলি নিম্নলিখিতভাবে লিপিবদ্ধ করিলেন ঃ

5′ 6″ ; 5′ 8″ ; 6′ 1″ ; 5′ 4″ ও 6′ 2″।

ইহার একটি স্তম্ভলেখ অঙ্কন কর।

13. কলিকাতার স্কুলসমূহের হাই-জাম্প-প্রতিযোগিতায় কোন এক বৎসরের খেলার ফল নিম্নে লিখিত হইল ঃ

হিন্দুস্কুল 5′ 7″ ; হেয়ারস্কুল 5′ 4″ ; সংস্কৃত-কলেজিয়েট 5′ 3″ ; কলিকাতা মাদ্রাসা 5′ 8″ ; সরস্বতী-ইন্ষ্টিটিউসন 5′ 9″ ও পার্ক-ইন্ষ্টিটিউসন 5′ 2″। ইহার একটি স্তম্ভলেখ অঙ্কিত কর।

14. কলিকাতার স্কুলসমূহের এক মাইল দৌড়-প্রতিযোগিতায় কোন এক বৎসরের ফল নিম্নে লিখিত হইল ঃ সাউথ সাবারবান 4 মি. 45 সে., মিত্র-ইন্ষ্টিটিউসন 4 মি. 48 সে., পদ্মপুকুর 5 মি. 2 সে., কালিধন-ইন্ষ্টিটিউসন 4 মি. 46 সে., তীর্থপতি-ইন্ষ্টিটিউসন 4 মি. 41 সে., চেতলা-বয়েজ 4 মি. 41 সে. এবং বাগবাজার-হাই 4 মি. 48 সে.। ইহার একটি স্তম্ভলেখ অঙ্কিত কর।

15. কলিকাতার স্কুলসমূহের কোন এক বৎসরের লঙ্‌জাম্প-প্রতিযোগিতার ফল নিম্নে প্রদত্ত হইল ঃ

স্কটিশচার্চ্চ 18′ 5″, সেণ্ট্রাল কলেজিয়েট 17′ 6″ ; টাউনস্কুল 19′ 2″ ; মেট্রোপলিটন 18′ 9″, সেণ্টবার্ণাবাস 18′ 11″ ও ওরিয়েণ্টাল সেমিনারি 19′ 5″। এই প্রতিযোগিতার ফলগুলির একটি দণ্ডলেখ অঙ্কিত কর।

16. নূতন ছাত্র ভর্ত্তি হইবার সময় যে-ফি দিতে হয়, তাহা হইতে কোন স্কুলের বার্ষিক আয় 1945 হইতে 1950 সাল পর্য্যন্ত যথাক্রমে নিম্নলিখিতরূপ ছিল ঃ

450 টাকা, 400 টাকা, 800 টাকা, 950 টাকা, 900 টাকা, 1000 টাকা। ইহার দণ্ডলেখ অঙ্কিত কর।

[সঙ্কেত : স্কেল $\frac{1}{10}$ ইঞ্চি $=25$ টাকা ধর।]

17. কোন স্কুলের বার্ষিক আয় 1949 সাল হইতে 1953 সাল পর্য্যন্ত যথাক্রমে 18000 টাকা, 17500 টাকা, 16500 টাকা, 23000 টাকা এবং 25000 টাকা ছিল। ইহার দণ্ডলেখ অঙ্কিত কর এবং বার্ষিক আয় কোন্ সালে বৃহত্তম এবং কোন্ সালে ক্ষুদ্রতম ছিল, তাহা লেখ হইতে স্থির কর।

বিবিধ প্রশ্নমালা (খ)

I

1. $2a^2-2a+7$, $3a^2+5a-6$, $8-4a^2-8a$ এবং $5a-9-a^2$এর যোগফল নির্ণয় কর।

2. $7x^2-8xy-5y^2$এর সহিত কত যোগ করিলে $5x^2+2xy-3y^2$ হইবে ?

3. $2x-5x^3+7x^2+9x^4-2$কে xএর ঘাতের (i) অধঃক্রমে, (ii) উর্দ্ধক্রমে সাজাও।

4. গুণের নিম্নলিখিত সূত্রটি জ্যামিতিক প্রণালীতে প্রমাণ কর :

$$(a+b+c)x=ax+bx+cx.$$

5. $2x^3-9ax^2+11a^2x-6a^3$কে $x-3a$ দ্বারা ভাগ কর।

[মা, প্র., 1865.]

6. সরল কর : $6x^2(7x+3)-3x(5x^2-8x+2)-9(3x^3+4x^2+2x-2)-(3x-3)(2x-6)$.

7. $x+\frac{1}{x}=p$ হইলে দেখাও যে, $x^2+\left(\frac{1}{x}\right)^2=p^2-2$.

8. সরল কর : $1{\cdot}237\times1{\cdot}237+2\times1{\cdot}237\times3{\cdot}763+3{\cdot}763\times3{\cdot}763$.

II

1. সরল কর : $32{\cdot}571\times32{\cdot}571-29{\cdot}571\times29{\cdot}571$.

2. $A=5a^4+3a^3b+2ab^2-3b^3$, $B=7a^4+8a^3b-7ab^2-5b^3$ এবং $C=2a^4+5a^3b-9ab^2-2b^3$ হইলে

$$A-B+C=\text{কত ?}$$

3. জ্যামিতিক চিত্র-সাহায্যে প্রমাণ কর :

$$(x+a)(x+b)=x^2+ax+bx+ab.$$

4. $27x^3+9x^2a-3xa^2-10a^3$কে $3x-2a$ দ্বারা ভাগ কর।

5. একসঙ্গে যাবতীয় বন্ধনী অপসারিত করিয়া সরল কর :

$$2x-[3y-\{-4z-(2x-\overline{4z+3y})\}].$$

6. $x=2{\cdot}371$, $y=3{\cdot}528$, $z=4{\cdot}101$ হইলে
$(x-y+2z)^2+2(x-y+2z)(2y-z)+(2y-z)^2=$ কত ?

7. প্রমাণ কর যে, $ax\div bx=a\div b$.

8. এমন একটি সংখ্যা নির্ণয় কর, যেন উহার দ্বিগুণের সহিত 5 যোগ করিলে যোগফল 17 হয়।

III

1. সমীকরণ কাহাকে বলে ?
সমাধান কর : $2x+3(x+1)=8$.

2. m, n ও p অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$a^m\times a^n\times a^p=a^{m+n+p}.$$

3. মান নির্ণয় কর :

$$7\tfrac{31}{128}\times7\tfrac{31}{128}-2\times7\tfrac{31}{128}\times5\tfrac{31}{128}+5\tfrac{31}{128}\times5\tfrac{31}{128}.$$

4. সরল কর : $(y+z)(y-z)+(z+x)(z-x)+(x+y)(x-y)$.

5. $3x^3-2x^2+5x-4$কে $2x^2+3x-5$ দ্বারা গুণ কর।

6. $2x^4-5x^3y+7x^2y^2-xy^3-3y^4$কে $x^2-2xy+3y^2$ দ্বারা ভাগ কর।

7. একসঙ্গে সমুদয় বন্ধনী অপসারিত করিয়া সরল কর :

$$3a-[5b-\{7c-(3a-\overline{5b-7c})\}].$$

8. 32কে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর, যেন প্রথম অংশ দ্বিতীয় অংশের 4 গুণ অপেক্ষা 2 বেশী হয়।

IV

1. $x=a^2-bc$, $y=b^2-ca$ এবং $z=c^2-ab$ হইলে প্রমাণ কর যে,
(i) $ax+by+cz=a^3+b^3+c^3-3abc$
এবং (ii) $bx+cy+az=0$; $cx+ay+bz=0$. [পা. প্র., 1900]

2. সরল কর : $(y^2-z^2)(y^2+z^2)+(z^2-x^2)(z^2+x^2)$
$+(x^2-y^2)(x^2+y^2)$.

. $x+y=5$, $xy=6$ হইলে $(x-y)^2=$ কত ?

4. সরল কর : $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
$+a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$.

5. প্রমাণ কর যে, $(a+b)^2+2(a+b)(c+d)+(c+d)^2$
$=(a+d)^2+2(a+d)(b+c)+(b+c)^2$.

[সঙ্কেত : দেখাও যে, প্রত্যেক পক্ষ $=(a+b+c+d)^2$.]

6. $3cx^2y^2+5bx^3y^3+ax^4+9ey^5+4dxy^4$কে (i) xএর ঘাতের অধঃক্রমে এবং (ii) yএর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাও।

7. সমাধান কর : $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=\frac{5}{6}$.

8. একব্যক্তির বয়সের দ্বিগুণের সহিত ঐ বয়সের অর্দ্ধেক এবং এক-চতুর্থাংশ যোগ করিয়া এক বৎসর বাড়াইলে এক শতাব্দী হয়। উহার বয়স নির্ণয় কর।

V

1. যোগ কর : $(x-1)(x+2)$, $(x-2)(x+3)$ এবং $(x-3)(x+1)$.

2. $x=b-c$, $y=c-a$, $z=a-b$ হইলে
$x^2-y^2+z^2+2zx$এর মান নির্ণয় কর। [ক. প্র., 1922]

3. $a+b=17$, $a-b=7$ হইলে $2a^2+2b^2=$ কত ?

4. x^3-2x^2+3x-4কে $2x^2-5x+6$ দ্বারা গুণ কর।

5. $2x^5-11x^4+16x^3-23x^2+32x-16$কে x^2-5x+4 দ্বারা ভাগ কর।

6. $x-\frac{1}{x}=q$ হইলে দেখাও যে, $x^2+\left(\frac{1}{x}\right)^2=q^2+2$.

7. (i) তিনটি ক্রমিক সংখ্যার যোগফল 135; সমীকরণ দ্বারা সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর।

(ii) দুইটি ক্রমিক সংখ্যার বর্গের অন্তর 19 ; সংখ্যাদ্বয় নির্ণয় কর।

8. কোন বৎসর কলিকাতার কতিপয় স্কুলের সাইকেল ক্রীড়া-প্রতিযোগিতায় নিম্নলিখিত ফলগুলি লিপিবদ্ধ করা হইল :

ওরিয়েন্টাল সেমিনারি 3 মি. 5 সে., সরস্বতী-ইন্‌ষ্টিটিউসন 3 মি. 10 সে., বাগবাজার হাই 3 মি. 15 সে., কাশিমবাজার-পলিটেক্‌নিক 3 মি. 4 সে., পার্ক-ইন্‌ষ্টিটিউসন 3 মি. 20 সে.।

স্তম্ভলেখ-সাহায্যে ফলগুলি প্রকাশ কর।

VI

1. $x+y=12$, $x-y=4$ হইলে $4xy=$ কত ?

2. সরল কর : $3a-[4b-\{8c-(2a-\overline{4b-8c})\}]$

3. $x=b+c-2a$, $y=c+a-2b$, $z=a+b-2c$ হইলে $x^2+y^2-z^2+2xy$এর মান নির্ণয় কর। [ক. প্র., 1919]

4. $(3x+1)(x+5)$কে দুইটি বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ কর।

5. কোন্ রাশিকে x^4+2x^2+3 দ্বারা ভাগ করিলে $2x^4-3x^2+1$ ভাগফল পাওয়া যায়।

6. $4+11a+27a^2+17a^3+5a^4$কে $4+3a+a^2$ দ্বারা ভাগ কর।

7. সমাধান কর : $14x-5(2-x)=9$.

8. কোন বালকের বর্ত্তমান বয়সের চারিগুণ হইতে তাহার 6 বৎসর পূর্ব্বের বয়সের তিনগুণ বিয়োগ করিলে 27 বৎসর বাকী থাকে। বালকটির বর্ত্তমান বয়স কত ?

VII

1. প্রমাণ কর যে, (i) বিয়োজন = বিয়োজ্য + বিয়োগফল

এবং (ii) বিয়োজন − বিয়োগফল = বিয়োজ্য।

নিম্নলিখিত অঙ্কগুলিতে শূন্যস্থান পূর্ণ কর।

(i) $(2x^2+3xy+5y^2)-(\cdots\cdots)=x^2-2y^2-3xy$.

(ii) $(\cdots\cdots)-(5p^2-3pq-2q^2)=2pq-3p^2-4q^2$.

2. (i) সরল কর : $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$.

(ii) দেখাও যে, $(a+b)(a^2+b^2)=\dfrac{a^4-b^4}{a-b}$.

3. সরল কর : $3a-[a+b-2\{a+b+c-(a-b+c-d)\}+a]$. [ক. প্র., 1876]

4. $6x^5-17x^4+42x^3-66x^2+72x-72$কে $2x^2-3x+6$ দ্বারা ভাগ কর। [ক. প্র., 1912]

5. $x-\frac{1}{x}=n$ হইলে দেখাও যে, $x^4+\left(\frac{1}{x}\right)^4=n^4+4n^2+2$.

6. $2\cdot537\times2\cdot537-2\times2\cdot537\times1\cdot537+1\cdot537\times1\cdot537=$ কত ?

7. সমাধান কর : $\frac{2}{3}x-\frac{3}{7}x+\frac{3}{14}x=\frac{19}{21}$. [ক. প্র., 1889]

8. একটি খুঁটির $\frac{1}{4}$ কাদায়, $\frac{1}{3}$ জলে এবং 10 ফুট জলের উপরে আছে। খুঁটির দৈর্ঘ্য কত ? [ক. প্র., 1863]

VIII

1. সরল কর : $\frac{34\cdot6279\times34\cdot6279-33\cdot6279\times33\cdot6279}{34\cdot6279+33\cdot6279}$.

2. $x=2a-b+c$, $y=b-c+a$ হইলে $x^2+2xy+y^2$এর মান নির্ণয় কর।

3. কোন রাশিকে $3x^2-2xy-y^2$ দ্বারা ভাগ করায় $2x^2y-x^3-4xy^2+y^3$ ভাগফল হইল ; রাশিটি নির্ণয় কর।

4. $a+a^5+a^6$কে a^2+a+1 দ্বারা ভাগ কর। [ক. প্র., 1918]

5. সরল কর : $3x-2[y-z-5\{x-z-4(x-2\overline{y-z})\}]$.

6. সমাধান কর :

$[2x-\{3x-4(x-3)\}]^2-[3(x+10)-4\{(x+3)-(x-4)\}]^2=56$.

7. প্রসিদ্ধ গণিতজ্ঞ ডাইওফেন্টস্ তাঁহার জীবনের $\frac{1}{6}$ বাল্যে এবং $\frac{1}{12}$ যৌবনে অতিবাহিত করেন। ইহার পর জীবনের $\frac{1}{7}$ হইতেও 5 বৎসর বেশী কাল গত হইলে তাঁহার এক পুত্র জন্মে। পুত্র পিতার বয়সের অর্দ্ধেককাল জীবিত ছিল এবং পুত্রের মৃত্যুর 4 বৎসর পরেই পিতার মৃত্যু হয়। ডাইওফেন্টসের মৃত্যুকালীন বয়স নির্ণয় কর। [বো. প্র., 1886]

8. বিখ্যাত ক্রিকেট-খেলোয়াড় ব্রাডমানের কোন একটি টেষ্টম্যাচে রানের সংখ্যাগুলি নিম্নে লিপিবদ্ধ হইল :

210, 159, 221, 187, 176.

ফলগুলি স্তম্ভলেখাকারে প্রকাশ কর।

নবম অধ্যায়

সাধারণ চারি নিয়মের পুনরালোচনা

দুরূহ যোগ (Harder Addition)

86. মিশ্ররাশিমালার যোগের নিয়ম 58 অণুচ্ছেদে আলোচিত হইয়াছে। নিম্নে উহা জটিল (hard) মিশ্ররাশিমালাসমূহের যোগে প্রযুক্ত হইল।

উদাহরণ 1. যোগ কর : $2(b-c)+3(c-a)-4(a-b)$, $4(b-c)-2(c-a)+7(a-b)$ এবং $-5(b-c)+4(c-a)-2(a-b)$.

প্রথমতঃ রাশিমালাগুলিকে একটির নীচে একটি এরূপে সাজাও, যেন $(b-c)$, $(c-a)$ এবং $(a-b)$-যুক্ত পদগুলি যথাক্রমে এক-এক স্তম্ভে থাকে। এখন উহাদিগকে যোগ করিয়া লব্ধ যোগফলকে পদ-সংগ্রহ দ্বারা সরল কর।

প্রথম রাশিমালা = $2(b-c)+3(c-a)-4(a-b)$
দ্বিতীয় রাশিমালা = $4(b-c)-2(c-a +7(a-b)$
তৃতীয় রাশিমালা = $-5(b-c)+4(c-a)-2(a-b)$

নির্ণেয় যোগফল = $(b-c)+5(c-a)+(a-b)$
= $b-c+5c-5a+a-b$
= $-4a+4c$. [পদসংগ্রহ দ্বারা]

দ্রষ্টব্য। এস্থলে যোজ্যরাশিমালাগুলিকে প্রথমে সরল করিয়া এবং পরে উহাদিগকে একটির নীচে একটি সাজাইয়াও যোগফল নির্ণয় করা যায়।

87. আক্ষরিক-সহগ-বিশিষ্ট রাশিমালার (expressions with literal co-efficients এর) যোগফল।

উদাহরণ 1. যোগ কর : $ax+py+lz$, $bx+qy+mz$ এবং $cx+ry+nz$

যোগফল $=(ax+py+lz)+(bx+qy+mz)+(cx+ry+nz)$
$=(ax+bx+cx)+(py+qy+ry)+(lz+mz+nz)$

[x, y এবং z-যুক্ত পদগুলিকে যথাক্রমে এক-একটি বন্ধনীতে রাখিয়া]

$=(a+b+c)x+(p+q+r)y+(l+m+n)z.$ [63 অণু.]

অথবা, রাশিমালাগুলিকে একটির নীচে একটি এরূপভাবে সাজাও, যেন x, y এবং z-যুক্ত পদগুলি যথাক্রমে এক-এক স্তম্ভে থাকে। এখন প্রত্যেক স্তম্ভের যোগফল নির্ণয় করিয়া উহাদিগকে + চিহ্ন দিয়া সংযুক্ত কর।

$$ax+py+lz$$
$$bx+qy+mz$$
$$cx+ry+nz$$

যোগফল $=(a+b+c)x+(p+q+r)y+(l+m+n)z.$

উদাহরণ 2. যোগ কর : $(b-c)x^2+(c-a)y^2+(a-b)z^2+pyz$, $(b-c)y^2+(c-a)z^2+(a-b)x^2+qzx$ এবং

$$(b-c)z^4+(c-a)x^2+(a-b)y^2+rxy.$$

এস্থলে x^2, y^2, z^2, yz, zx এবং xy-যুক্ত পদগুলিকে যথাক্রমে পৃথক্-পৃথক্ ভাবে সাজাইয়া যোগফল নির্ণয় করা হইল।

$$\begin{aligned}
\text{যোগফল} &= \{(b-c)x^2+(c-a)y^2+(a-b)z^2+pyz\} \\
&\quad +\{(b-c)y^2+(c-a)z^2+(a-b)x^2+qzx\} \\
&\quad +\{(b-c)z^2+(c-a)x^2+(a-b)y^2+rxy\} \\
&= \{(b-c)x^2+(a-b)x^2+(c-a)x^2\}+\{(c-a)y^2+(b-c)y^2 \\
&\quad +(a-b)y^2\}+\{(a-b)z^2+(c-a)z^2+(b-c)z^2\} \\
&\quad +pyz+qzx+rxy \\
&= \{(b-c)+(a-b)+(c-a)\}x^2+\{(c-a)+(b-c)+(a-b)\}y^2+ \\
&\quad \{(a-b)+(c-a)+(b-c)\}z^2+pyz+qzx+rxy \\
&= \{\cancel{b}-\cancel{c}+\cancel{a}-\cancel{b}+\cancel{c}-\cancel{a}\}x^2+\{\cancel{c}-\cancel{a}+\cancel{b}-\cancel{c}+\cancel{a}-\cancel{b}\}y^2 \\
&\quad +\{\cancel{a}-\cancel{b}+\cancel{c}-\cancel{a}+\cancel{b}-\cancel{c}\}z^2+pyz+qzx+rxy \\
&= pyz+qzx+rxy.
\end{aligned}$$

উদাহরণ 3. সরল কর : $(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)+(b^3-3b^2c+3bc^2-c^3)+(c^3-3c^2a+3ca^2-a^3)+3\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\}$.

কোন রাশিমালা সরল করিতে হইলে উহাকে উহার অক্ষর বা অক্ষরগুলির ঘাতের অধঃক্রমে (কিংবা ঊর্দ্ধক্রমে) সাজানই সুবিধাজনক। এস্থলে a সমন্বিত পদগুলিকে aএর ঘাতের এবং অবশিষ্ট পদগুলিকে bএর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইলে

$$\begin{aligned}
\text{প্রদত্ত রাশিমালা} &= \{a^3-a^3\}+\{-3a^2b+3ca^2+3a^2(b-c)\} \\
&\quad +\{3ab^2-3c^2a-3b^2a+3c^2a\}+\{-b^3+b^3\} \\
&\quad +\{-3b^2c+3b^2c\}+\{3bc^2-3bc^2\}+\{-c^3+c^3\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

[প্রত্যেক ধন্থর্ব্বন্ধনীর অন্তর্গত রাশিমালা সরল করিয়া]

প্রশ্নমালা 34

যোগ কর :

1. $\frac{5}{11}x^2+\frac{2}{9}xy+\frac{1}{7}y^2$
   $\frac{4}{11}x^2+\frac{5}{9}xy+\frac{2}{7}y^2$
   $\frac{2}{11}x^2+\frac{2}{9}xy+\frac{4}{7}y^2$

2. $\frac{2}{5}(x+y)+\frac{2}{7}(x-y)$
   $\frac{1}{5}(x+y)+\frac{3}{7}(x-y)$
   $\frac{2}{5}(x+y)+\frac{2}{7}(x-y)$

3. $\frac{3}{8}(b-c)-\frac{1}{5}(b+c)$
$-\frac{1}{8}(b-c)+\frac{2}{5}(b+c)$
$-\frac{3}{4}(b-c)+\frac{3}{10}(b+c)$

4. $\frac{5}{17}(b-c)+\frac{10}{21}(c-a)+\frac{4}{13}(a-b)$
$\frac{8}{17}(b-c)+\frac{7}{21}(c-a)+\frac{8}{13}(a-b)$
$\frac{4}{17}(b-c)+\frac{4}{21}(c-a)+\frac{1}{13}(a-b)$

5. $\frac{1}{6}(2x-y)+\frac{2}{7}(2y-z)+\frac{3}{4}(2z-x)$
$-(2x-y)+\frac{3}{7}(2y-z)-1\frac{1}{2}(2z-x)$
$\frac{5}{6}(2x-y)+\frac{2}{7}(2y-z)+\frac{3}{4}(2z-x)$

6. $1{\cdot}21\sqrt{bc}-1{\cdot}27\sqrt{ca}+2\frac{3}{4}\sqrt{ab}$
$5{\cdot}83\sqrt{bc}-2{\cdot}58\sqrt{ca}-1\frac{1}{2}\sqrt{ab}$
$2{\cdot}96\sqrt{bc}+3{\cdot}85\sqrt{ca}-1\frac{1}{4}\sqrt{ab}$

7. $(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z$
$(c-a)x+(a-b)y+(b-c)z$
$(a-b)x+(b-c)y+(c-a)z$

8. $a^2x+b^2y+c^2z$
$ax+by+cz$
$x+y+z$

9. $(b+c)y^2+(c+a)yz+(a+b)z^2$
$(c+a)y^2+(a+b)yz+(b+c)z^2$
$(a+b)y^2+(b+c)yz+(c+a)z^2$

10. $2a(b-c)+5b(c-a)-7{\cdot}2c(a-b)$
$3a(b-c)-7b(c-a)+5{\cdot}7c(a-b)$
$-4a(b-c)+3b(c-a)+2{\cdot}5c(a-b)$

11. $(p+q+1)x^3+ax^2+bcx$
$-px^3 \quad +cax+3abc$
$-qx^3+bx^2+abx$
$cx^2 \quad -2abc$

12. $(b-c)(b+c)(b^2+c^2)$, $(c-a)(c+a)(c^2+a^2)$ এবং $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$

সরল কর :

13. $\dfrac{x+2y}{20}-\dfrac{3x-2y}{12}-\frac{1}{8}(y-x)$

14. $\frac{1}{10}(x-3y)-\frac{1}{4}(x+7y)-\frac{1}{4}\left(\dfrac{x}{5}+\dfrac{3y}{4}\right)+\frac{1}{8}(3x-4y)$

15. $(6x^5-9x^4y+15x^3y^2-21x^2y^3)+(4x^4y-6x^3y^2+10x^2y^3-14xy^4)+(-2x^3y^2+3x^2y^3-5xy^4+y^5)$

16. $(a^3-a^2b-a^2c+ab^2-abc+ac^2)+(a^2b-ab^2-abc+b^3-b^2c+bc^2)+(a^2c-abc-ac^2+b^2c-bc^2+c^3)$

17. $(2x^4-7x^3y-4x^2y^2+xy^3-4y^4)+(-40xy^3-22x^2y^2+16x^3y-2x^4)+(72x^2y^2-99xy^3-180y^4-9x^3y)+(138xy^3+184y^4-46x^2y^2)$

18. $a(b^2+2bc+c^2)+b(c^2+2ca+a^2)+c(a^2+2ab+b^2)-a^2(b+c)-b^2(c+a)-c^2(a+b)-6abc$

19. $(a^4+a^2b^2-2a^2bc-a^2c^2)+(b^4+2b^3c+b^2c^2-a^2b^2)+(2a^2bc-2b^3c-4b^2c^2-2bc^3)+(b^2c^2+2bc^3+c^4+a^2c^2)$

20. $\{(x-1)^2+2(x+2)(x-5)+7(x^2-4x-5)\}$
$+\{(2x-3)^2-2(3x-5)(x-3)-4(5x-3)^2\}$
$+\{-6(2x-3)^2+7x(2x-9)+3(5x-2)^2\}$.

দুরূহ বিয়োগ (Harder Subtraction)

88. এক মিশ্ররাশিমালা হইতে অপর এক রাশিমালার বিয়োগের নিয়ম 60-61 অণুচ্ছেদে বিবৃত হইয়াছে। নিম্নে জটিল বিয়োগের কতকগুলি উদাহরণ দেওয়া হইল।

উদাহরণ 1. $3(b-c)-4(c-a)-6(a-b)$ হইতে $-6(c-a)-7(a-b)+5(b-c)$ বিয়োগ কর।

বিয়োজ্যকে বিয়োজনের নীচে এরূপে স্থাপন কর, যেন $(b-c)$, $(c-a)$ এবং $(a-b)$-যুক্ত পদগুলি এক-এক স্তম্ভে থাকে। এখন মনে-মনে বিয়োজ্যের পদগুলির চিহ্ন পরিবর্তিত করিয়া বিয়োজনের সহিত যোগ কর এবং লব্ধ ফলকে সরল কর।

বিয়োজন $=3(b-c)-4(c-a)-6(a-b)$
বিয়োজ্য $=5(b-c)-6(c-a)-7(a-b)$

বিয়োগফল $=-2(b-c)+2(c-a)+(a-b)$
$=-2b+2c+2c-2a+a-b$
$=-a-3b+4c.$

উদাহরণ 2. $(2x+3a)(5x+4a)$ হইতে $(3x+2a)(3x+5a)$ বিয়োগ কর।
এস্থলে প্রথমে বিয়োজন এবং বিয়োজ্যকে সরল করিয়া পরে বিয়োগ করা হইল।

$$(2x+3a)(5x+4a)=10x^2+8xa+15xa+12a^2$$
$$=10x^2+23xa+12a^2.$$

$$(3x+2a)(3x+5a)=9x^2+15xa+6xa+10a^2$$
$$=9x^2+21xa+10a^2.$$

বিয়োজন $=10x^2+23xa+12a^2$
বিয়োজ্য $=\ 9x^2+21xa+10a^2$
বিয়োগফল $=\ x^2+2xa\ +2a^2.$

উদাহরণ 3. $(a+b)x^2+(m+n)xy+(p+q)y^2$ হইতে $nxy+qy^2+bx^2$ বিয়োগ কর।

বিয়োজ্যকে বিয়োজনের নীচে এরূপভাবে সাজাও, যেন উভয়ের x^2, xy এবং y^2-যুক্ত পদগুলি এক-এক স্তম্ভে থাকে। এখন মনে-মনে বিয়োজ্যের চিহ্ন-পরিবর্তন করিয়া উহাকে বিয়োজনের সহিত যোগ কর।

বিয়োজন $=(a+b)x^2+(m+n)xy+(p+q)y^2$
বিয়োজ্য $=\quad bx^2+\quad nxy+\quad qy^2$
বিয়োগফল $=\quad ax^2+\quad mxy+\quad py^2.$

[**ব্যাখ্যা।** বিয়োগফলে x^2এর সহগ $=a+b-b=a$;
xyএর সহগ $=m+n-n=m$;
y^2এর সহগ $=p+q-q=p.$]

প্রশ্নমালা 35

উপরের রাশি হইতে নীচের রাশি বিয়োগ কর :

1. $3(x+y)+2(x-y)$
   $2(x+y)+3(x-y)$

2. $3(2a-b)-4(a-5b)$
   $2(2a-b)-3(a-5b)$

3. $2(b+c)+7(c+a)+5(a+b)$
   $5(b+c)+4(c+a)+3(a+b)$

4. $\frac{3}{7}(8p-5q)-\frac{2}{9}(3q-4r)-\frac{1}{5}(5r-2p)$
   $\frac{5}{14}(8p-5q)-\frac{7}{18}(3q-4r)+\frac{3}{10}(5r-2p)$

5. $(2a+l)x+(2b+m)y+(2c+n)z$
   $ax+\quad by+\quad cz$

6. $(a+b)x^2+2abxy+(b+a)y^2$
   $bx^2+\ abxy+\quad ay^2$

7. $(2m+n)x^2+(3p+2q)y^2+(4c+5d)z^2$
$(m-l+2n)x^2+(4p-3q)y^2+(3c+4d)z^2$

বিয়োগ কর :

8. $\frac{1}{2}(3a+4b)+\frac{1}{3}(5a+7b)$ হইতে $\frac{1}{6}(2a+3b)+\frac{1}{5}(4a+5b)$

9. $\frac{1}{8}(4x-5y)x+\frac{3}{4}(2y+3x)y$ হইতে $\frac{1}{2}(5x+3y)x-\frac{5}{8}(7y-5x)y$

10. $(2x+y)(3x+2y)$ হইতে $(x+y)(2x+3y)$

11. $(2x+1)(x+5)+3(x-2)^2+5(x^2+3x+2)$ হইতে
$(3x-1)(x-3)-(2x+3)^2+7(x-4)^2$

12. $(x-3)^3+5x^2(x-2)-7x(2x^2-3x-4)+8(x^3-2x+5)$
হইতে $(3x+2)(4x^2-5x+3)-7(2x^2+4)x+2(5x-1)^3$

[সঙ্কেত : প্রত্যেক রাশিমালাকে প্রথমে xএর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া সরল কর।]

13. $\{(a+b)x^2+(c+d)xy+(e+f)y^2\}$ হইতে $(bx^2+dxy+fy^2)$

নিম্নের প্রশ্নগুলিতে শূন্যস্থান পূর্ণ কর :

14. $\{\cdots\cdots\}+\{2pa^2+3qb^2+4(p+q)ab\}$
$=4pa^2+5qb^2+(3p+5q)ab$

15. $(a+1)(a^2-a+1)x+(b+1)(b^2-b+1)y$
$+(c+1)(c^2-c+1)z-\{(a-1)(a^2+a+1)x$
$+(b-1)(b^2+b+1)y+(c-1)(c^2+c+1)z$
$-\{\cdots\cdots\cdots\}=0.$

দুরূহ গুণন (Harder Multiplication)

89. এক মিশ্ররাশিমালাকে অপর এক মিশ্ররাশিমালা দ্বারা গুণনের নিয়ম 65 অণুচ্ছেদে বিবৃত হইয়াছে। নিম্নে কতকগুলি জটিল গুণনে উক্ত নিয়ম প্রযুক্ত হইল।*

উদাহরণ 1. $2x^3-5xy^2+3x^2y-y^3$কে $-4x^2y-3xy^2+6x^3+2y^3$ দ্বারা গুণ কর।

উভয় রাশিমালাকে xএর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া উহাদিগকে নিম্নলিখিতরূপে গুণ করা হইল।

* এস্থলে শিক্ষার্থিগণ 50 এবং 65 অণুচ্ছেদ আবার পাঠ করিয়া লইবে।

$$\begin{array}{rl}
\text{গুণ্য} & = 2x^3 + 3x^2y - 5xy^2 - y^3 \\
\text{গুণক} & = 6x^3 - 4x^2y - 3xy^2 + 2y^3 \\
\hline
& 12x^6 + 18x^5y - 30x^4y^2 - 6x^3y^3 \\
& \quad - 8x^5y - 12x^4y^2 + 20x^3y^3 + 4x^2y^4 \\
& \qquad - 6x^4y^2 - 9x^3y^3 + 15x^2y^4 + 3xy^5 \\
& \qquad\quad + 4x^3y^3 + 6x^2y^4 - 10xy^5 - 2y^6 \\
\hline
\text{গুণফল} & = 12x^6 + 10x^5y - 48x^4y^2 + 9x^3y^3 + 25x^2y^4 - 7xy^5 - 2y^6.
\end{array}$$

উদাহরণ 2. $-\frac{4}{5}a^2 + \frac{3}{2}a^4 - \frac{1}{4} + \frac{7}{6}a$কে $\frac{3}{8} + \frac{2}{5}a^3 - \frac{3}{4}a^2$ দ্বারা গুণ কর।

উভয় রাশিমালাকে aএর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া উহাদিগকে নিম্নলিখিতরূপে গুণ করা হইল :

$$\begin{array}{rl}
\text{গুণ্য} & = \frac{3}{2}a^4 + 0.a^3 - \frac{4}{5}a^2 + \frac{7}{6}a - \frac{1}{4} \\
\text{গুণক} & = \frac{2}{5}a^3 - \frac{3}{4}a^2 + 0.a + \frac{3}{8} \\
\hline
& \frac{3}{5}a^7 + 0.a^6 - \frac{8}{25}a^5 + \frac{7}{15}a^4 - \frac{1}{10}a^3 \\
& \quad - \frac{9}{8}a^6 - 0.a^5 + \frac{3}{5}a^4 - \frac{7}{8}a^3 + \frac{3}{16}a^2 \\
& \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
& \qquad \frac{9}{16}a^4 + 0.a^3 - \frac{3}{10}a^2 + \frac{7}{16}a - \frac{3}{32} \\
\hline
\text{গুণফল} & = \frac{3}{5}a^7 - \frac{9}{8}a^6 - \frac{8}{25}a^5 + 1\frac{151}{240}a^4 - \frac{39}{40}a^3 - \frac{9}{80}a^2 + \frac{7}{16}a - \frac{3}{32}.
\end{array}$$

দ্রষ্টব্য। লক্ষ্য কর যে, গুণ্যে a^3 নাই এবং গুণ্যকে লিখিবার সময় উহার সহগ 0 (শূন্য) ধরা হইয়াছে। এইরূপ গুণকে 'a' নাই এবং উহার সহগও 0 ধরা হইয়াছে। ইহা দ্বারা আংশিক গুণফলসমূহের সদৃশ পদগুলিকে সহজে একই স্তম্ভে লিখা গেল এবং উহাদিগকে যোগ করা সহজ হইল।

উদাহরণ 3. $a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab$কে $a + b + c$ দ্বারা গুণ কর।

এস্থলে গুণ্য ও গুণক এই উভয়কে প্রথমে a, b, c ইত্যাদি বর্ণমালার অক্ষরক্রমে সাজান হইল; পরে a-যুক্ত রাশিগুলিকে aএর ঘাতের অধঃক্রমে এবং অবশিষ্ট পদগুলিকে bএর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া উহাদিগকে গুণ করা হইল।

$$\begin{array}{rl}
\text{গুণ্য} & = a^2 - ab - ac + b^2 - bc + c^2 \\
\text{গুণক} & = a + b + c \\
\hline
& a^3 - a^2b - a^2c + ab^2 - abc + ac^2 \\
& \quad + a^2b - ab^2 - abc + b^3 - b^2c + bc^2 \\
& \qquad + a^2c - abc - ac^2 + b^2c - bc^2 + c^3 \\
\hline
\text{গুণফল} & = a^3 - 3abc + b^3 + c^3 \\
& = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.
\end{array}$$

অন্য প্রকার

[গুণ্য এবং গুণককে aএর ঘাতের-অধঃক্রমে সাজাইয়া এবং aএর বিভিন্ন ঘাতের সহগগুলিকে bএর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া ও বন্ধনীর মধ্যে স্থাপন করিয়া]

গুণ্য $= a^3 - a(b+c) + (b^2 - bc + c^2)$

গুণক $= a + (b+c)$

$$a^3 - a^2(b+c) + a(b^2 - bc + c^2)$$
$$+ a^2(b+c) - a(b^2 + 2bc + c^2) + (b^3 + c^3)$$

গুণফল $= a^3 \quad - 3abc \quad + (b^3 + c^3)$ [78 (খ) অণু.]

$= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$

উদাহরণ 4. $ax^3 + bx^2 + cx + d$কে $px^2 + qx + r$ দ্বারা গুণ কর।

গুণ্য $= ax^3 + bx^2 + cx + d$

গুণক $= px^2 + qx + r$

$$apx^5 + bpx^4 + cpx^3 + dpx^2$$
$$+ aqx^4 + bqx^3 + cqx^2 + dqx$$
$$+ arx^3 + brx^2 + crx + dr$$

গুণফল $= apx^5 + (bp + aq)x^4 + (cp + bq + ar)x^3 + (dp + cq + br)x^2 + (dq + cr)x + dr.$

90. তিন বা তদধিক রাশির গুণফলকে রাশিগুলির **ক্রমিক গুণফল (continued product)** বলে। কতকগুলি রাশির ক্রমিক গুণফল নির্ণয় করিতে হইলে উহাদিগকে সুবিধামত সাজাইয়া গুণ করিতে হয়।

উদাহরণ 1. $x+a$, $x+b$ এবং $x+c$এর ক্রমিক গুণফল নির্ণয় কর।

এস্থলে প্রথমে $x+a$কে $x+b$ দ্বারা গুণ করা হইল এবং লব্ধ গুণফলকে $x+c$ দ্বারা গুণ করা হইল।

$$\begin{array}{l} x+a \\ x+b \\ \hline x^2 + ax \\ \quad + bx + ab \\ \hline x^2 + (a+b)x + ab. \end{array} \qquad \begin{array}{l} x^2 + (a+b)x + ab \\ x + c \\ \hline x^3 + (a+b)x^2 + abx \\ \quad + cx^2 + (a+b)cx + abc \\ \hline x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x + abc. \end{array}$$

অতএব নির্ণেয় গুণফল $= x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x + abc.$

উদাহরণ 2. $a+b+c$, $b+c-a$, $c+a-b$ এবং $a+b-c$এর ক্রমিক গুণফল নির্ণয় কর।

এস্থলে a, b, c ইত্যাদি বর্ণমালার অক্ষরক্রমে উৎপাদকগুলিকে লিখিয়া প্রথমটিকে দ্বিতীয়টি দ্বারা এবং তৃতীয়টিকে চতুর্থটি দ্বারা গুণ করা হইল; অবশেষে লব্ধ গুণফল-দ্বয়কে গুণ করিয়া নির্ণেয় গুণফল পাওয়া গেল।

$$\begin{array}{ll}
a+(b+c) & \\
-a+(b+c) & \\ \hline
-a^2-a(b+c) & \\
\qquad +a(b+c)+(b^2+c^2+2bc) & \\ \hline
-a^2 \qquad\qquad +(b^2+c^2+2bc) &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
a-(b-c) & \\
a+(b-c) & \\ \hline
a^2-a(b-c) & \\
\qquad +a(b-c)-(b^2+c^2-2bc) & \\ \hline
a^2 \qquad\qquad -(b^2+c^2-2bc) &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
-a^2+(b^2+c^2+2bc) \\
\quad a^2-(b^2+c^2-2bc) \\ \hline
-a^4+a^2(b^2+c^2+2bc) \\
\qquad +a^2(b^2+c^2-2bc)-\{(b^2+c^2)^2-4b^2c^2\} \\ \hline
\end{array}$$

নির্ণেয় গুণফল $=-a^4+2a^2b^2+2a^2c^2-\{b^4+c^4-2b^2c^2\}$

$$=2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4.$$

91. গুণফলে কোন নির্দ্দিষ্ট পদের সহগ-নির্ণয়।

কোন গুণনে গুণ্যের প্রত্যেক পদকে গুণকের প্রত্যেক পদ দ্বারা গুণ করিয়া লব্ধ গুণফলগুলি যোগ করিলেই নির্ণেয় গুণফল পাওয়া যায়। অতএব গুণফলের কোন নির্দ্দিষ্ট পদের সহগ নির্ণয় করিতে হইলে গুণ্যের যে-যে-পদকে গুণকের যে-যে-পদ দ্বারা গুণ করিলে গুণফলের উক্ত নির্দ্দিষ্ট পদ পাওয়া যায়, শুধু সেই গুণনগুলি দ্বারাই সংক্ষেপে এবং সহজে নির্ণেয় সহগ পাওয়া যাইবে; এস্থলে সম্পূর্ণ গুণফল-নির্ণয় অনাবশ্যক। নিম্নলিখিত উদাহরণ হইতে প্রক্রিয়াটি বুঝা যাইবে।

উদাহরণ। অনাবশ্যক গুণ না করিয়া $5x^3+2x^2-7x-8$ এবং $2x^3-3x^2-10x+4$এর গুণফলে x^3এর সহগ নির্ণয় কর। [পা. প্র., 1917]

স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, গুণ্যের $5x^3, +2x^2, -7x, -8$কে যথাক্রমে গুণকের $4, -10x, -3x^2$ এবং $2x^3$ দ্বারা গুণ করিলে গুণফলের x^3-বিশিষ্ট পদগুলি উৎপন্ন হয়।

অতএব নির্ণেয় সহগ $=5.4+2.(-10)+(-7)(-3)+(-8).2$

$$=20-20+21-16=5.$$

92. গুণনের বিচ্ছিন্ন-সহগ-প্রণালী (method of detached co-efficients)। যে-কোন গুণনে গুণ্য, গুণক এবং আংশিক গুণফলগুলির শুধু সহগ-গুলিকে লিখিয়া গুণফলের সহগগুলি সংক্ষেপে এবং সহজে পাওয়া যায় ; সুতরাং গুণফলও সহজে নির্ণয় করা যায়। এই প্রণালীকে **বিচ্ছিন্ন-সহগ-প্রণালী** বলে। গুণন-প্রক্রিয়ার সহিত সামান্য পরিচয় থাকিলে এইরূপে গুণফল-নির্ণয় সুবিধাজনক। এই প্রণালী-ব্যবহারে মনে রাখিতে হইবে যে,

(1) গুণ্য এবং গুণক উভয়কে উহাদের অন্তর্গত কোন সাধারণ (common) অক্ষরের ঘাতের একই ক্রমে (হয় অধঃক্রমে, না হয় উর্দ্ধক্রমে) সাজান দরকার এবং

(2) গুণ্য এবং গুণকের মধ্যে উক্ত সাধারণ অক্ষরের কোন ঘাতবিশিষ্ট পদ না থাকিলে ঐ পদের সহগকে 0 (শূন্য) লিখিতে হয়।

উদাহরণ 1. $2x^2-3x+4$কে $5x-7$ দ্বারা গুণ কর।

সাধারণ প্রণালী :

$$\begin{array}{rrrr} & 2x^2 & -3x & +4 \\ & & 5x & -7 \\ \hline 10x^3 & -15x^2 & +20x & \\ & -14x^2 & +21x & -28 \\ \hline 10x^3 & -29x^2 & +41x & -28. \end{array}$$

গুণফল $=10x^3-29x^2+41x-28.$

বিচ্ছিন্ন-সহগ-প্রণালী ঃ

$$\begin{array}{rrrr} 2 & -3 & +4 & \\ 5 & -7 & & \\ \hline 10 & -15 & +20 & \\ & -14 & +21 & -28 \\ \hline 10 & -29 & +41 & -28. \end{array}$$

$\therefore$ গুণফল $=10x^3-29x^2+41x-28.$

উদাহরণ 2. $2x^3-y^3-3x^2y$কে $6y^3-5xy^2+4x^3$ দিয়া গুণ কর।

গুণ্য এবং গুণক উভয়কে xএর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাও। গুণ্যে xy^2 এবং গুণকে x^2y নাই ; অতএব উহাদের সহগকে 0 (শূন্য) ধর। তাহা হইলে

গুণ্য হইবে $2x^3-3x^2y+0.xy^2-y^3$

এবং গুণক হইবে $4x^3+0.x^2y-5xy^2+6y^3$.

$$\begin{array}{lrrrrrrr} (\text{গুণ্যে}) & 2 & -3 & +0 & -1 & & & \\ (\text{গুণকে}) & 4 & +0 & -5 & +6 & & & \\ \hline & 8 & -12 & +0 & -4 & & & \\ & & 0 & -0 & +0 & -0 & & \\ & & & -10 & +15 & -0 & +5 & \\ & & & & +12 & -18 & +0 & -6 \\ \hline (\text{গুণফলে}) & 8 & -12 & -10 & +23 & -18 & +5 & -6. \end{array}$$

$\therefore$ গুণফল $=8x^6-12x^5y-10x^4y^2+23x^3y^3-18x^2y^4+5xy^5-6y^6$.

93. **গুণনের বিশুদ্ধি-পরাক্ষা।** গুণ্য × গুণক = গুণফল। অতএব কোন গুণনে গুণ্য এবং গুণকের অন্তর্গত অক্ষরগুলির স্থলে কোন নির্দ্দিষ্ট ক্ষুদ্রসংখ্যা বসাইয়া গুণ্য, গুণক এবং গুণফলের মান নির্ণয় কর। যদি 'গুণ্যের মান × গুণকের মান = গুণফলের মান' না হয়, তবে গুণন ভুল হইয়াছে জানিবে।

অক্ষরগুলির প্রত্যেকটি = 1 ধরিলে গুণ্য, গুণক এবং গুণফলের মান হইবে যথাক্রমে উহাদের সহগগুলির বীজগণিতীয় সমষ্টি। অতএব

গুণ্যের সহগসমূহের বীজগণিতীয় সমষ্টি × গুণকের সহগসমূহের বীজগণিতীয় সমষ্টি = গুণফলের সহগসমূহের বীজগণিতীয় সমষ্টি।

এই নিয়ম দ্বারা সহজে গুণফলের বিশুদ্ধতা পরীক্ষা করা যায়।

যথা, 92 অণুচ্ছেদের উদাহরণ 1এ

গুণ্যের সহগসমূহের সমষ্টি $= 2 - 3 + 4 = 3$;

গুণকের সহগসমূহের সমষ্টি $= 5 - 7 = -2$; $3 \times (-2) = -6$.

গুণফলের সহগসমূহের সমষ্টি $= 10 - 29 + 41 - 28 = 51 - 57 = -6$.

অতএব গুণফল সম্ভবতঃ শুদ্ধ হইয়াছে।

প্রশ্নমালা 36

গুণ কর :

1. $x^4 + x^2y^2 + y^4$কে $x^4 - x^2y^2 + y^4$ দ্বারা
2. $a^4 + 2a^2 + 3$কে $2a^4 - 3a^2 + 1$ দ্বারা
3. $2a^3 + 5a^2 + 3a - 4$কে $a^3 - 2a^2 - 5a + 1$ দ্বারা
4. $3x^3 + 7x^2y - 2xy^2 + 4y^3$কে $2x^3 - x^2y + 2xy^2 - 3y^3$ দ্বারা
5. $2a^3 + 3a^2b - 5ab^2 - 3b^3$কে $a^3 + a^2b - 2ab^2 - 5b^3$ দ্বারা
6. $\frac{1}{2}a^3 - \frac{2}{3}a^2 + \frac{1}{4}a - \frac{2}{5}$কে $\frac{1}{8}a^3 + \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{5}a - \frac{2}{3}$ দ্বারা
7. $\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x - \frac{4}{5}x^2 + \frac{1}{4} - x^5$কে $-\frac{2}{3} - \frac{3}{2}x^2 + x^3 + 4x$ দ্বারা
8. $-4x^4 + 6x^3 - 2x^5 - 8x^2 + 10x - 5$কে $x^3 + 3x^2 - 2x - 4$ দ্বারা
9. $5m^2n^2 - 11n^4 + m^4 - 4mn^3 + 2m^3n$কে $3n^4 + m^4 - 3m^2n^2$ দ্বারা
10. $\frac{1}{5} - \frac{2}{3}a + \frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{2}a^4$কে $a^3 + \frac{3}{2}a - \frac{5}{4} + \frac{2}{3}a^2$ দ্বারা
11. $\frac{3}{5}x^3 - \frac{1}{2}x^2y - 3y^3$কে $2x^3 - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}xy^2$ দ্বারা
12. $2a^6 - 4a^2 + 1 - 3a^4$কে $3 - 2a^2 - a^4 + 5a^6$ দ্বারা
13. $3x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 10x - 5$কে $4x^2 - 2 + 5x + 3x^4$ দ্বারা
14. $2x^5 - 4x^3 + 3x^2 - 6x + 5$কে $3x^3 - 2x^2 + 4x - 5 + 4x^4$ দ্বারা
15. $2x^5 - 3x^4 + 19x^2 + x - 12$কে
$3x^5 - 17x^4 + 105x^3 - 29x^2 + 23x - 41$ দ্বারা

16. ax^2+bx+cকে px^2+qx+r দ্বারা
17. $ax^2+2hxy+by^2$কে $a'x^2+2h'xy+b'y^2$ দ্বারা
18. $ax^3-2bx^2+3cx-4d$কে $2n-3mx-lx^2$ দ্বারা
19. $mx^3-3nx^2-2px+q$কে $-2ax^2+3bx+c$ দ্বারা
20. $ax+by+cz$কে $dx+ey+fz$ দ্বারা
21. $x^2-2xy+y^2-z^2$কে $x^2+2xy+y^2-z^2$ দ্বারা
22. $bc+ca+ab$কে $a+b+c$ দ্বারা
23. $x^2+y^2+z^2-xy+xz+yz$কে $x+y-z$ দ্বারা
24. $4a^2+9b^2+c^2-6ab-2ac-3bc$কে $2a+3b+c$ দ্বারা
25. $4m^2+n^2+p^2+2mp+2mn-np$কে $2m-n-p$ দ্বারা

গুণফল নির্ণয় কর :

26. $x+1, x+2, x+3$এর
27. $a-4, a-2, a+5$এর
28. $2x+3, x-2, 3x-5$এর
29. $x-a, x+a, x^2+a^2$এর
30. $a+b, a^2-ab+b^2, a^3-b^3$এর
31. $a-b, a+b, a^2+b^2, a^4+b^4$এর
32. $x-y, x+y, x^2+xy+y^2, x^2-xy+y^2$এর
33. $x-y, x^2+xy+y^2, x^3+y^3, x^6+y^6$এর
34. $a-b, a+b, a^2+b^2, a^4+b^4, a^8+b^8$এর
35. $2x^2-3y^2+4xy, 4x^2-5xy-2y^2, 3x^4-2x^2y^2-xy^3+4y^4$এর
36. $a^2+ab+b^2, a^2-ab+b^2, a^4-a^2b^2+b^4, a^8-a^4b^4+b^8$এর
37. $a+b, b+c, c+a$এর
38. $x-y, y-z, z-x$এর
39. $\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y, \frac{1}{4}y-\frac{1}{3}x, \frac{1}{6}y+\frac{2}{3}x$এর
40. $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}, \frac{x}{2}+\frac{y}{3}, \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}, \frac{x^4}{16}+\frac{y^4}{81}$এর
41. $b+c-a, c+a-b, a+b-c$এর
42. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y+\frac{3}{4}z, \frac{2}{3}x-\frac{1}{2}y-\frac{3}{8}z, \frac{3}{4}x-\frac{5}{6}y+\frac{1}{3}z$এর
43. কোন্ রাশিকে $\frac{7}{2}x^4-\frac{3}{5}x^3+\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{5}x+\frac{1}{4}$ দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল $\frac{6}{7}x^4+\frac{5}{6}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{6}x-\frac{4}{3}$ হইবে ?

সরল কর :

44. $(1-2x+x^2)(1+2x+x^2)(1+2x^2+x^4)(1+2x^4+x^8)$
45. $(x^4y^4-x^2y^2+1)(x^2y^2+1)$
$-(x^4y^4+x^2y^2+1)(xy+1)(xy-1)$

অনাবশ্যক গুণন না করিয়া সহগ নির্ণয় কর :

46. $(2x^2-4x+3)(3x^2-2x+4)$এ x^2এর

47. $(3x^4+4x^3-2x^2+x-5)(2-4x+3x^2-5x^3)$এ x^3এর

48. $(2x^4-3x^3+4x^2-5x-7)(3x^2-5x-8)$এ x^3 এবং x^2এর

49. $(3a^5-2a^4+5a^2-6a+9)(2a^4-3a^3+4a^2-5a-6)$এ
a^5 এবং a^3এর

50. $(1-2ax+3a^2x^2-4a^3x^3+a^4x^4)(2-3bx+4b^2x^2-5b^3x^3+b^4x^4)$এ x^4এর

বিচ্ছিন্ন সহগ-প্রণালীতে গুণফল স্থির কর এবং গুণফলের বিশুদ্ধি পরীক্ষা কর :

51. $2x^2-3x+4$ এবং $3x+2$এর

52. $5a^2-3ab-2b^2$ এবং $2a^2+ab-b^2$এর

53. $3a^3-4a^2+2a-1$ এবং $3a^2-4a+2$এর

54. $x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4$
এবং $x^3-2x^2y+3xy^2-2y^3$এর

55. $2x^4-3x^3+5x^2-13x+2$ এবং $x^5-2x^4+3x^2-4x-2$এর

56-60. পূর্ব্ববর্ত্তী 8, 12, 13, 14 এবং 15 সংখ্যক প্রশ্নের গুণফলগুলি বিচ্ছিন্ন-সহগ-প্রণালী দ্বারা নির্ণয় কর এবং প্রত্যেক স্থলে গুণফলের বিশুদ্ধতা পরীক্ষা কর।

দুরূহ ভাগ (Harder Division)*

94. এক মিশ্ররাশিমালাকে অপর এক মিশ্ররাশি দ্বারা ভাগের নিয়ম এবং সহজ দৃষ্টান্ত পূর্ব্বেই (69 অনুচ্ছেদে) প্রদত্ত হইয়াছে। নিম্নে ভাগের কয়েকটি জটিল প্রশ্নের সমাধান-নির্ণয়ে ঐ নিয়ম প্রয়োগ করা হইল।

মনে রাখিতে হইবে যে, প্রত্যেকস্থলে ভাজ্য এবং ভাজককে উহাদের অন্তর্ভূত কোন সাধারণ অক্ষরের ঘাতের একই ক্রম (হয় অধঃক্রম, না হয় উর্দ্ধক্রম)-অনুসারে সাজাইয়া ভাগ করিতে হয়।

উদাহরণ 1. $1+x-8x^2+19x^3-15x^4$কে $1+3x-5x^2$ দ্বারা ভাগ কর। [ক.প্র., 1919]

এস্থলে ভাজ্য এবং ভাজক উভয়ই xএর ঘাতের উর্দ্ধক্রমে সাজান আছে ; অতএব এইরূপেই উহাদিগকে ভাগ করা হইল।

* এস্থলে শিক্ষার্থিগণ 55 এবং 69 অনুচ্ছেদ আবার পাঠ করিয়া লইবে।

$$
\begin{array}{l}
1+3x-5x^2)\,1+x-8x^2+19x^3-15x^4\,(1-2x+3x^2 \\
\qquad\qquad\quad \underline{1+3x-5x^2} \\
\qquad\qquad\qquad -2x-3x^2+19x^3-15x^4 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-2x-6x^2+10x^3} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad +3x^2+9x^3-15x^4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{+3x^2+9x^3-15x^4}
\end{array}
$$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগফল $=1-2x+3x^2$.

প্রশ্ন। ভাজ্য এবং ভাজককে x-এর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া ভাগ করিলেও ভাগফল একই হইবে দেখাও।

উদাহরণ 2. $\frac{1}{9}a^4+10ab^3-25b^4+\frac{2}{9}a^3b-\frac{8}{9}a^2b^2$কে $5b^2+\frac{1}{3}a^2-\frac{2}{3}ab$ দ্বারা ভাগ কর।

এস্থলে ভাজ্য এবং ভাজক উভয়কে a-এর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া ভাগ করা হইল।

$$
\begin{array}{l}
\frac{1}{3}a^2-\frac{2}{3}ab+5b^2)\,\frac{1}{9}a^4+\frac{2}{9}a^3b-\frac{8}{9}a^2b^2+10ab^3-25b^4\,(\frac{1}{3}a^2+\frac{4}{3}ab-5b^2 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\frac{1}{9}a^4-\frac{2}{9}a^3b+\frac{5}{3}a^2b^2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad +\frac{4}{9}a^3b-\frac{23}{9}a^2b^2+10ab^3-25b^4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{+\frac{3}{9}a^3b-\frac{8}{9}a^2b^2+\frac{20}{3}ab^3} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\frac{5}{3}a^2b^2+\frac{10}{8}ab^3-25b^4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{-\frac{5}{3}a^2b^2+\frac{10}{3}ab^3-25b^4}
\end{array}
$$

অতএব নির্ণেয় ভাগফল $=\frac{1}{3}a^2+\frac{4}{3}ab-5b^2$.

উদাহরণ 3. $6x^6-19x^5+3x^3+2x^2-4x+2$কে $2x^4-5x^3-4x^2+2$ দ্বারা ভাগ কর।

ভাজ্য এবং ভাজক উভয়কে x-এর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া ভাগ করা হইল।

$$
\begin{array}{l}
2x^4-5x^3-4x^2+2)\,6x^6-19x^5+0.x^4+3x^3+2x^2-4x+2\,(3x^2-2x+1 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{6x^6-15x^5-12x^4\qquad\quad +6x^2} \\
\qquad\qquad\qquad\quad -4x^5+12x^4+3x^3-4x^2-4x+2 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-4x^5+10x^4+8x^3\qquad\quad -4x} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 2x^4-5x^3-4x^2\qquad +2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{2x^4-5x^3-4x^2\qquad +2}
\end{array}
$$

অতএব নির্ণেয় ভাগফল $=3x^2-2x+1$.

দ্রষ্টব্য। সদৃশ পদগুলিকে একই স্তম্ভে রাখিলে প্রক্রিয়া সুষ্ঠু এবং সহজ হয়। এস্থলে ভাজ্যে, x^4-যুক্ত পদ নাই বলিয়া উহার সহগ 0 (শূন্য) ধরা হইয়াছে। ইহাতে একই শ্রেণীর সদৃশ পদগুলিকে একই স্তম্ভে রাখার সুবিধা হইয়াছে

উদাহরণ 4. $6a^2+6b^2-4c^2-5bc+10ca-13ab$কে

$2a-3b+4c$ দ্বারা ভাগ কর।

প্রথমে ভাজ্য এবং ভাজক এই উভয়ের পদগুলিকে a, b, c ইত্যাদি বর্ণমালার অক্ষরক্রমে সাজান হইল। পরে উহাদের a-যুক্ত পদগুলিকে aএর ঘাতের অধঃক্রমে এবং অবশিষ্ট পদগুলিকে bএর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া ভাগ করা হইল। ভাজককে ভাগফলের পদ দ্বারা গুণ করিয়া যে রাশিমালাগুলি পাওয়া গেল, উহাদিগের আংশিক ভাজ্যগুলির নিম্নে এরূপে রাখা হইল, যেন একই শ্রেণীর সদৃশ পদগুলি একই স্তম্ভে থাকে।

$$2a-3b+4c)\,6a^2-13ab+10ac+6b^2-5bc-4c^2\,(3a-2b-c$$
$$\underline{6a^2-9ab+12ac}$$
$$-4ab-2ac+6b^2-5bc-4c^2$$
$$\underline{-4ab\qquad+6b^2-8bc}$$
$$-2ac\qquad+3bc-4c^2$$
$$\underline{-2ac\qquad+3bc-4c^2}$$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগফল $=3a-2b-c.$

উদাহরণ 5. $a^3+b^3+c^3-3abc$কে $a+b+c$ দ্বারা ভাগ কর।

[ক. প্র., 1909]

ভাজ্য এবং ভাজক উভয়কে aএর ঘাতের অধঃক্রমে সাজান হইল এবং aএর বিভিন্ন ঘাতের সহগগুলিকে bএর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া বন্ধনীর মধ্যে রাখা হইল। ভাজ্যে a^2-যুক্ত নাই, উহার সহগ 0 ধরা হইল।

$$a+(b+c)\,)\,a^3+\quad 0.a^2-3bc.a+(b^3+c^3)\,\left(a^2-(b+c)a+(b^2-bc+c^2)\right.$$
$$\underline{a^3+(b+c)a^2}$$
$$-(b+c)a^2-3bc.a+(b^3+c^3)$$
$$\underline{-(b+c)a^2-(b+c)^2\,a}$$
$$(b^2-bc+c^2)a+(b^3+c^3)$$
$$\underline{(b^2-bc+c^2)a+(b^3+c^3)}$$

অতএব নির্ণেয় ভাগফল $=a^2-(b+c)a+b^2-bc+c^2$

$=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab.$

প্রশ্ন। উদাহরণ 4এর ভাগ-কার্য্যে এই প্রণালী প্রয়োগ কর।

উদাহরণ 6. $(a-b)^2c^2+(a-b)c^3-(c^2-a^2)b^2+(c-a)b^3$কে $(a-b)c^2-(c-a)b^2$ দ্বারা ভাগ কর।

[ক. প্র., 1883]

এস্থলে ভাজ্য এবং ভাজককে cএর ঘাতের অধঃক্রমে সাজান হইয়াছে এবং cএর বিভিন্ন ঘাতের সহগগুলিকে aএর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া বন্ধনীর মধ্যে রাখা হইয়াছে। ইহাতে ভাজ্য হইল $(a-b)c^3+\{(a-b)^2-b^2\}c^2+b^3c+(a^2b^2-ab^3)$ এবং ভাজক হইল $(a-b)c^2-b^2c+ab^2$; আংশিক ভাজ্যগুলিকেও ঐভাবে সাজান হইয়াছে।

$$
\begin{array}{l}
(a-b)c^2-b^2c+ab^2\,)\,(a-b)c^3+\{(a-b)^2-b^2\}c^2+b^3c+(a^2b^2-ab^3)\,(\,c+(a-b)\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{(a-b)c^3 \qquad\qquad -b^2c^2+ab^2c}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (a-b)^2c^2-(ab^2-b^3)c+(a^2b^2-ab^3)\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{(a-b)^2c^2-(ab^2-b^3)c+(a^2b^2-ab^3)}
\end{array}
$$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগফল $=c+(a-b)=a-b+c.$

95. ভাগের বিচ্ছিন্ন-সহগ-প্রণালী (Method of detached coefficients)। ভাজ্য এবং ভাজকের শুধু সহগগুলিকে লিখিয়া ভাগফলের সহগগুলি সংক্ষেপে এবং সহজে নির্ণয় করা যায় ; সুতরাং ভাগফলও অতি সহজে পাওয়া যায়। এই প্রণালীকে ভাগের **বিচ্ছিন্ন-সহগ-প্রণালী** বলে। ইহা প্রয়োগ করিতে হইলে নিম্নলিখিত কথাগুলি স্মরণ রাখিতে হইবে :

(1) ভাজ্য এবং ভাজক উভয়কে উহাদের অন্তর্গত কোন সাধারণ অক্ষরের ঘাতের একই ক্রমে (হয় অধঃক্রমে, না হয় উর্দ্ধক্রমে) সাজান দরকার।

এবং (2) ভাজ্য এবং ভাজকের মধ্যে পূর্ব্বোক্ত অক্ষরের কোন ঘাতবিশিষ্ট পদ না থাকিলে ঐ পদের সহগকে 0 (শূন্য) লিখিতে হয়।

ভাগ-প্রক্রিয়ার সহিত সামান্য পরিচয় থাকিলে এই প্রণালীতে ভাগফল-নির্ণয় অতি সুবিধাজনক। নিম্নের উদাহরণগুলি হইতে প্রণালীটি বুঝা যাইবে।

উদাহরণ 1. $6x^3+13x^2+18x+8$কে $2x^2+3x+4$ দ্বারা ভাগ কর।

সাধারণ প্রণালী :

$$
\begin{array}{l}
2x^2+3x+4)\,6x^3+13x^2+18x+8\,(3x+2\\
\qquad\qquad\quad \underline{6x^3+\ \ 9x^2+12x}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad 4x^2+\ \ 6x+8\\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{4x^2+\ \ 6x+8}
\end{array}
$$

বিচ্ছিন্ন-সহগ-প্রণালী :

$$
\begin{array}{l}
2+3+4)6+13+18+8(3+2 \\
\quad\quad 6+\ 9+12 \\
\hline
\quad\quad\quad +\ 4+\ 6+8 \\
\quad\quad\quad +\ 4+\ 6+8 \\
\hline
\end{array}
$$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগফল $=3x+2$.

উদাহরণ 2. $4x^4+y^4$কে $2xy+y^2+2x^2$ দ্বারা ভাগ কর।

xএর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইলে এবং xএর যে-ঘাতগুলি নাই, উহাদের সহগ 0 (শূন্য) লিখিলে ভাজ্য হইবে $4x^4+0.x^3y+0.x^2y^2+0.xy^3+1y^4$ এবং ভাজক হইবে $2x^2+2xy+1.y^2$; কাজেই ভাগের বিচ্ছিন্ন সহগ প্রক্রিয়াটি নিম্নলিখিতরূপ হইবে :

$$
\begin{array}{l}
2+2+1)4+0+0+0+1(2-2+1 \\
\quad\quad 4+4+2 \\
\hline
\quad\quad -4-2+0+1 \\
\quad\quad -4-4-2 \\
\hline
\quad\quad\quad\quad +2+2+1 \\
\quad\quad\quad\quad +2+2+1 \\
\hline
\end{array}
$$

অতএব নির্ণেয় ভাগফল $=2x^2-2xy+y^2$.

96. অসম্পূর্ণ ভাগ (Inexact division) । কোন-কোন ভাগে ভাজ্যকে ভাজক দ্বারা সম্পূর্ণরূপে ভাগ করা যায় না। এইরূপ ভাগকে **অসম্পূর্ণ ভাগ** বলে। ভাজ্যের সর্ব্বশেষ যে-অংশকে ভাজক দ্বারা ভাগ করা যায় না, উহাকে **অবশিষ্ট** বা **ভাগশেষ (remainder)** বলা হয়।*

উদাহরণ 1. $2x^2+7xy+8y^2$কে $x+2y$ দ্বারা ভাগ কর।

ভাজ্য এবং ভাজককে xএর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া ভাগ করাতে সর্ব্বশেষে $2y^2$ অবশিষ্ট থাকিল। অতএব ভাগটি একটি অসম্পূর্ণ ভাগ।

$$
\begin{array}{l}
x+2y)2x^2+7xy+8y^2(2x+3y \\
\quad\quad 2x^2+4xy \\
\hline
\quad\quad\quad\quad 3xy+8y^2 \\
\quad\quad\quad\quad 3xy+6y^2 \\
\hline
\quad\quad\quad\quad\quad\quad 2y^2
\end{array}
$$

এস্থলে $2y^2$ অবশিষ্ট। $2x+3y$কে **আংশিক ভাগফল** বা শুধু **ভাগফল** বলা হয়।

এরূপস্থলে (পাটীগণিতের ন্যায়) ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ।

অতএব কোন অসম্পূর্ণ ভাগে D ভাজ্য, d ভাজক, Q ভাগফল এবং R ভাগশেষ হইলে $D=d\times Q+R$.

* এইরূপ ভাগে ভাজ্য এবং ভাজক উভয়কে উহাদের অন্তর্গত কোন একটি সংখ্যা-সূচক অক্ষরের ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া ভাগ করিতে হয়। যখনই ভাগশেষে উক্ত অক্ষরের বৃহত্তম সূচক ভাজকের অনুরূপ সূচক অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়, তখনই ভাগকার্য্য শেষ হইল মনে করিতে হয় এবং উক্ত ভাগশেষকে ভাগশেষ গণ্য করিতে হয়।

ভাগের সংজ্ঞানুসারে **সম্পূর্ণ ভাগফল** (**complete quotient**)

$$=\frac{D}{d}=\frac{d\times Q+R}{d}=Q+\frac{R}{d}.$$

উল্লিখিত উদাহরণে ভাজ্য এবং ভাজককে xএর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া ভাগ করাতে $Q=2x+3y$ এবং $R=2y^2$ হইল।

অতএব সম্পূর্ণ ভাগফল$=2x+3y+\dfrac{2y^2}{x+2y}$.

দ্রষ্টব্য। উপরের উদাহরণে ভাজ্য এবং ভাজককে yএর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া ভাগ করিলে $4y+\frac{3}{2}x$ হইবে আংশিক ভাগফল এবং $\frac{1}{2}x^2$ অবশিষ্ট হইবে। অতএব সম্পূর্ণ ভাগফল $=4y+\frac{3}{2}x+\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{2y+x}$.

$$\begin{array}{l} 2y+x)\,8y^2+7xy+2x^2\,(4y+\frac{3}{2}x \\ \quad\;\; \underline{8y^2+4xy} \\ \qquad\quad\; 3xy+2x^2 \\ \qquad\quad\; \underline{3xy+\frac{3}{2}x^2} \\ \qquad\qquad\quad \frac{1}{2}x^2 \end{array}$$

লক্ষ্য কর যে, উভয় ক্ষেত্রে ভাজ্য এবং ভাজক একই ধরা হইলেও আংশিক ভাগফল এক হইল না; কারণ উহাদের কোনটিই সম্পূর্ণ ভাগফল নহে। সম্পূর্ণ ভাগফল যথাক্রমে

$2x+3y+\dfrac{2y^2}{x+2y}$ এবং $4y+\frac{3}{2}x+\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{2y+x}$; ইহাদের প্রত্যেকটি$=\dfrac{\text{ভাজ্য}}{\text{ভাজক}}$ অর্থাৎ $\dfrac{2x^2+7xy+8y^2}{x+2y}$; অতএব ইহারা পরস্পর সমান।

প্রশ্নমালা 37

ভাগ কর :

1. $12+17x+29x^3+17x^3+5x^4$কে $4+3x+x^2$ দ্বারা
2. $3-13x+17x^2-10x^3+2x^4$কে $3-4x+2x^2$ দ্বারা
3. $2a^6+4a^5+8a^4-3a^3-17a^2+24a-18$কে a^2+2a+6 দ্বারা
4. $x^5-3x^4+x^3-5x^2-2x-8$কে x^3-2x^2-3x-4 দ্বারা
5. $21-5a-21a^2+3a^3-3a^4+5a^5$কে $3-2a-a^3$ দ্বারা
6. $\frac{2}{81}x^4-\frac{1}{54}x^3y+\frac{5}{18}x^2y^2-\frac{1}{12}xy^3+\frac{15}{16}y^4$কে $\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{6}xy+\frac{3}{4}y^2$ দ্বারা
7. $\frac{9}{8}b^4-\frac{3}{2}ab^3+\frac{1}{2}a^2b^2-\frac{2}{9}a^4$কে $\frac{1}{3}a^2-\frac{1}{2}ab+\frac{3}{4}b^2$ দ্বারা
8. $\frac{3}{32}a^5-\frac{1}{6}a^4-\frac{11}{12}a^3-\frac{1}{108}a^2+\frac{19}{162}a+\frac{10}{243}$কে $\frac{3}{8}a^3+\frac{1}{12}a^2-\frac{1}{9}a-\frac{5}{27}$ দ্বারা

9. $2x^6 - x^5y - 14x^4y^2 + 13x^3y^3 - 43x^2y^4 + 23xy^5 - 20y^6$কে
$5x^2y + 4y^3 + 2x^3 - 3xy^2$ দ্বারা

10. $2y^6 - 56y^2 + 96$কে $2y^3 + 4y^2 - 4y - 8$ দ্বারা

11. $\frac{1}{9}x^6 - \frac{4}{25}x^4 - \frac{8}{15}x^3 - x^2 + 4$কে $\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^2 + x - 2$ দ্বারা

12. $2a^6 + 2a^5 + 2a^4 + a^3 - 10a^2 + 12a - 9$কে $2a^4 - 4a^2 + 5a - 3$ দ্বারা

13. $\frac{1}{64}a^6 + \frac{1}{108}a^3b^3 + \frac{1}{729}b^6$কে $\frac{1}{16}a^4 - \frac{1}{12}a^3b + \frac{1}{12}a^2b^2 - \frac{1}{27}ab^3$
$+ \frac{1}{81}b^4$ দ্বারা

14. $a^8 + 2a^6 + 3a^4 + 2a^2 + 1$কে $a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1$ দ্বারা

15. $\frac{3}{2}x^8 - \frac{2}{3}x^6 + x^5 - \frac{27}{8}x^4 + \frac{3}{2}$কে $\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}$ দ্বারা

16. $2x^7 + 7x^2 - 5$কে $2x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 10x - 5$ দ্বারা

17. $18x^8 - 9x^7 - 22x^6 + 8x^5 - 21x^4 + 23x^3 - 89x^2 + 80$কে
$9x^5 - 11x^3 + 21x^2 - 16$ দ্বারা

18. $a^8 - 116a^7 + 1789a^6 - 10460a^5 + 2502a^4 - 5382a^3 + 4633a^2$
$- 708a + 1189$কে $a^5 - 17a^4 + 105a^3 - 19a^2 + 23a - 41$ দ্বারা

19. $2x^8 + 3x^7y - 8x^6y^2 + 3x^5y^3 - 8x^3y^5 + 10x^2y^6 - xy^7 - y^8$কে
$x^6 - y^6 + 3x^5y - 4xy^5$ দ্বারা

20. $36x^9 - 24x^8 + 12x^7 + 20x^6 - 164x^5 + 44x^4 + 145x^3 - 50x^2$
$- 40x + 15$কে $12x^6 - 28x^4 + 20x^2 - 5$ দ্বারা

21. $14x^{10} - 29x^9 + 61x^8 - 34x^7 - 3x^6 - 23x^5 + 4x^4 + 10x^3 + x^2$
$+ 2x - 1$কে $2x^6 - 3x^5 + 7x^4 - 2x^2 - x - 1$ দ্বারা

22. $x^3 - (a+b+c)x^2 + (bc+ca+ab)x - abc$কে
$x^2 - (b+c)x + bc$ দ্বারা

23. $x^3 + (m+1)(x^2 + x) + 1$কে $x^2 + mx + 1$ দ্বারা

24. $x^4 - (a+b+c+d)x^3 + (ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2$
$- (abc+abd+acd+bcd)x + abcd$কে $x^2 - (c+d)x + cd$ দ্বারা

25. $x^4 - y^4 + a^4 + 2a^2x^2$কে $x^2 - y^2 + a^2$ দ্বারা

26. $2x^4 - 6ax^3 + (4a^2 + ab - 2b^2)x^2 + 3ab^2x - a^2b^2$কে
$x^2 - (2a - b)x - ab$ দ্বারা [বো. প্র., 1901]

27. $x^4 - 3(a+1)x^3 + 2(3a+1)x^2 + 3(a+1)(a^2 - 1)x + (a^2 - 1)^2$কে
$x^2 - (a+3)x - a^2 + 1$ দ্বারা [বো. প্র., 1900]

28. $x^4 + 5ax^3 + (25a - b - 29)x^2 - 5(4a + b - 4)x + 4b$কে
$x^2 + 5x - 4$ দ্বারা [মা. প্র., 1893

29. $2a^2x^2-2(b-c)(3b-4c)y^2+abxy$কে $ax+2(b-c)y$ দ্বারা
[পাট. প্র., 1928]

30. $(4x^3-3a^2x)^2+(4y^3-3a^2y)^2-a^6$কে $x^2+y^2-a^2$ দ্বারা
[বো. প্র., 1884]

[সঙ্কেত : ভাজ্য এবং ভাজককে aএর ঘাতের উর্দ্ধক্রমে সাজাও।]

31. $4a^2-9b^2+24bc-16c^2$কে $2a+3b-4c$ দ্বারা

32. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$কে $a^2-(b+c)a+bc$ দ্বারা

33. $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$কে $a^2+(b+c)a+bc$ দ্বারা

34. $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$কে $bc+ca+ab$ দ্বারা

35. $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$কে $2bc+a^2-b^2-c^2$ দ্বারা

36. $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$কে $a^2-(b+c)a+bc$ দ্বারা
[পাট. প্র, 1926]

37. $x^4(y-z)+y^4(z-x)+z^4(x-y)$কে
$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$ দ্বারা

38. $x(y-z)^3+y(z-x)^3+z(x-y)^3$কে $x(y-z)+(y^2-z^2)$ দ্বারা

[সঙ্কেত : '$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$' সূত্র-সাহায্যে ভাজ্যকে সরল কর।]

39. $a^3-b^3+c^3+3abc$কে $a-b+c$ দ্বারা

40. $x^3+y^3-8z^3+6xyz$কে $x^2+y^2+4z^2-xy+2xz+2yz$ দ্বারা

বিচ্ছিন্ন-সহগ-প্রণালীতে ভাগ কর :

41. x^2-5x+6কে $x-2$ দ্বারা

42. $2x^2+29xy+60y^2$কে $2x+5y$ দ্বারা

43. $10a^3+23a^2+14a+3$কে $5a^2+4a+1$ দ্বারা

44. $6a^4+2a^3b-3a^2b^2+30ab^3-25b^4$কে $3a^2+4ab-5b^2$ দ্বারা

45. $64a^6-b^6$কে $4a^2-2ab+b^2$ দ্বারা

46. $256x^8-a^8$কে $64x^6+16x^4a^2+4x^2a^4+a^6$ দ্বারা

47-52. বিভিন্ন-সহগ-প্রক্রিয়ায় 9, 10, 11, 15, 16 এবং 2-3সংখ্যক প্রশ্নের ভাগগুলির ফল নির্ণয় কর।

নিম্নলিখিত অসম্পূর্ণ ভাগগুলিতে সম্পূর্ণ ভাগফল নির্ণয় কর :

53. $(x^2+2x+3)\div(x+2)$ 54. $(2x^2+3xy+4y^2)\div(2x+y)$

55. $(5a^2-10ab-2b^2)\div(5a-b)$

নিম্নলিখিত অসম্পূর্ণ ভাগে চতুর্থ পদ পর্য্যন্ত ভাগফল নির্ণয় কর :

56. $\frac{1+x+x^2}{1-x}$ 57. $\frac{2-3x+2x^2}{2-x}$

58. $\frac{2+3x+6x^2}{1+3x}$ 59. $\frac{1}{1-x}$ 60. $\frac{1}{1-2x+x^2}$

61. দেখাও যে, x^2+px+qকে $x-a$ দ্বারা ভাগ করিলে a^2+pa+q অবশিষ্ট থাকিবে।

62. দেখাও যে, x^3+px^2+qx+rকে $x-a$ দ্বারা ভাগ করিলে a^3+pa^2+qa+r অবশিষ্ট থাকিবে।

দশম অধ্যায়

সূত্রাবলীর পুনরালোচনা

সূত্রসমূহের জ্যামিতিক চিত্র (Graphical Illustration)

97. পঞ্চম এবং ষষ্ঠ অধ্যায়ে নিম্নলিখিত প্রয়োজনীয় গুণফলগুলির সূত্র এবং উহাদের প্রয়োগের বিষয় আলোচিত হইয়াছে।

(1) $(a+b+\cdots)x=ax+bx+\cdots$ [অনু. 64, 66]

(2) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$ [অনু. 75]

(3) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$ [অনু. 76]

(4) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$ [অনু. 77]

*(5) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$ [অনু. 78 (ক)]

$(x-a)(x+b)=x^2+(b-a)x-ab.$

$(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab.$

*(6) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ [অনু. 78 (খ)]

*(7) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ [অনু. 78 (গ)]

(8) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ [অনু. 75, অনুসিদ্ধান্ত 1]

$=(a-b)^2+2ab$ এবং অনু. 76, অনুসিদ্ধান্ত 1]

(9) $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab.$ [অনু. 76, অনুসিদ্ধান্ত 2]

(10) $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab.$ [অনু. 76, অনুসিদ্ধান্ত 2]

---

* যদিও এই সূত্রগুলি পাঠ্যতালিকায় উল্লিখিত হয় নাই, তথাপি অঙ্কশাস্ত্রে বহুস্থলে ইহাদিগকে ব্যবহার করিতে হয় বলিয়া সূত্রগুলি এস্থলে প্রদত্ত হইল।

(11) $2a^2+2b^2=(a+b)^2+(a-b)^2$ [অনু. 76, অনুসিদ্ধান্ত 3]

অথবা $a^2+b^2=\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{2}(a-b)^2$.

(12) $4ab=(a+b)^2-(a-b)^2$ [অনু. 76, অনুসিদ্ধান্ত 3]

অথবা $ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$.

অর্থাৎ দুইটি রাশির গুণফল

= (রাশিদ্বয়ের সমষ্টির অর্দ্ধ)^2 − (রাশিদ্বয়ের অন্তরের অর্দ্ধ)^2 ।

98. উল্লিখিত সূত্রগুলির বহু উদাহরণ পূর্ব্বে প্রদত্ত হইয়াছে। শিক্ষার্থিগণকে উহাদের সহিত অধিকতর পরিচিত করিবার জন্য এই সূত্রগুলির প্রয়োগ-বিষয়ক আরও কতকগুলি উদাহরণ আলোচিত হইল।

উদাহরণ 1. প্রমাণ কর যে,

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

অর্থাৎ তিনটি রাশির সমষ্টির বর্গ ঐ রাশিসমূহের বর্গগুলি এবং রাশিসমূহের দুই-দুইটির গুণফলের দ্বিগুণগুলির সমষ্টির সমান।

প্রমাণ। $(a+b+c)^2=\{a+(b+c)\}^2$, [$(b+c)$কে একটি পদ ধরিলে

$$=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2$$
$$=a^2+2ab+2ac+b^2+c^2+2bc$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

মন্তব্য। উল্লিখিত সূত্রের সাহায্যে কতকগুলি রাশির সমষ্টির বর্গ এবং পাটীগণিতীয় সংখ্যার বর্গও সহজে নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ 2. প্রমাণ কর যে,

$$(bc+ca+ab)^2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2abc(a+b+c).$$

প্রমাণ। $(bc+ca+ab)^2=(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2+2(ca)(ab)$

$$+2(ab)(bc)+2(bc)(ca)$$
$$=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2a^2bc+2ab^2c+2abc^2$$
$$=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2abc(a+b+c).$$

উদাহরণ 3. $a+b+c+d$এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$(a+b+c+d)^2=\{(a+b)+(c+d)\}^2$$
$$=(a+b)^2+2(a+b)(c+d)+(c+d)^2$$

$$=(a^2+2ab+b^2)+2(ac+ad+bc+bd)+(c^2+2cd+d^2)$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd.$$

মন্তব্য। উদাহরণ 1 এবং 3 হইতে স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, **কতকগুলি রাশির সমষ্টির বর্গ ঐ রাশিসমূহের বর্গগুলি এবং উক্ত রাশিসমূহের দুই-দুইটির গুণফলের দ্বিগুণগুলির সমষ্টির সমান।**

উদাহরণ 4. (i) $a^2+b^2+c^2=14$ এবং $a+b+c=6$ হইলে $bc+ca+ab$এর মান কত ?

(ii) $a+b+c=9$ এবং $bc+ca+ab=26$ হইলে $a^2+b^2+c^2$এর মান কত ?

(i) যেহেতু $(a^2+b^2+c^2)+2(bc+ca+ab)=(a+b+c)^2$,
উভয় পক্ষ হইতে $a^2+b^2+c^2$ বিয়োগ করিলে

$$2(bc+ca+ab)=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$$
$$=6^2-14=22.$$

উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করিয়া $bc+ca+ab=22\div2=11.$

(ii) $(a^2+b^2+c^2)+2(bc+ca+ab)=(a+b+c)^2$, (প্রমাণিত)
উভয়পক্ষ হইতে $2(bc+ca+ab)$ বাদ দিলে

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(bc+ac+ab)$$
$$=9^2-2.26=81-52=29.$$

দ্রষ্টব্য। এস্থলে ষষ্ঠ অধ্যায়ের উদাহরণগুলিও আবার পাঠ করা দরকার।

প্রশ্নমালা 38

উদাহরণ 1 এবং 3এ প্রদত্ত সূত্র দ্বারা নিম্নলিখিত রাশিগুলির বর্গ নির্ণয় কর :

1, $x+y+z$ 2. $2a+3b+4c$ 3. $3x-2y+4z$

4. $a^2+b^2+c^2$ 5. $yz-zx+xy$ 6. $x+y+z+t$

7. $a-b+c-d$

মান নির্ণয় কর :

8. $a^2+b^2+c^2=244$ এবং $a\div b+c=18$ হইলে $bc+ca+ab$এর

9. $a+b+c=38$ এবং $bc+ca+ab=425$ হইলে $a^2+b^2+c^2$এর
10. $a^2+b^2+c^2=225$ এবং $bc+ca+ab=200$ হইলে $a+b+c$এর
11. $a-b+c=15$ এবং $a^2+b^2+c^2=85$ হইলে $-bc+ca-ab$এর
12. $x-y-z=8$ এবং $yz-zx-xy=15$ হইলে $x^2+y^2+z^2$এর
13. $a+b+c=p,\ \ bc+ca+ab=q$ হইলে দেখাও যে,

$$a^2+b^2+c^2=p^2-2q.$$

14. $a+b+c=m,\ a^2+b^2+c^2=n$ হইলে দেখাও যে,

$$bc+ca+ab=\frac{m^2-n}{2}.$$

15. $a^2+b^2+c^2=r,\ bc+ca+ab=s$ হইলে দেখাও যে,

$$a+b+c=\pm\sqrt{y+2s}.$$

16. $a+b+c+d=14$ এবং

$ab+ac+ad+bc+bd+cd=80$ হইলে $a^2+b^2+c^2+d^2=$ কত ?

17. $x^2+y^2+z^2+a^2=110$ এবং

$xy+xz+yz+za+ya+za=57\cdot5$ হইলে $x+y+z+a=$ কত ?

18. $m+n+p+q=16$ এবং $m^2+n^2+p^2+q^2=112$ হইলে

$mn+mp+mq+np+nq+pq=$ কত ?

99. '$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$' এই স্ত্রের প্রয়োগ পূর্ব্বে 77 অণুচ্ছেদে আলোচিত হইয়াছে। নিম্নে ইহার আরও কয়েকটি উদাহরণ প্রদত্ত হইল।

উদাহরণ 1. প্রমাণ কর যে,

$$(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=x^4+x^2y^2+y^4.$$

প্রমাণ। $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

$=\{(x^2+y^2)+xy\}\{(x^2+y^2)-xy\}.$

$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2$

$=x^4+x^2y^2+y^4.$

$=x^4+x^2y^2+y^4.$

উদাহরণ 2. $3x^2+2xy+y^2$কে $3x^2-2xy+y^2$ দ্বারা গুণ কর।

$(3x^2+2xy+y^2)(3x^2-2xy+y^2)$

$=\{(3x^2+y^2)+2xy\}\{(3x^2+y^2)-2xy\}$

$=(3x^2+y^2)^2-(2xy)^2=9x^4+6x^2y^2+y^4-4x^2y^2$

$=9x^4+2x^2y^2+y^4.$

উদাহরণ 3. (i) $x-a, x+a, x^2+a^2$এর ক্রমিক গুণফল নির্ণয় কর:

(ii) দেখাও যে,

$$(x+a)(x^2+a^2)=\frac{x^4-a^4}{x-a}.$$

(i) $(x-a)(x+a)(x^2+a^2)=(x^2-a^2)(x^2+a^2)=x^4-a^4$.

এখন উভয় পক্ষকে $(x-a)$ দ্বারা ভাগ করিলে

(ii) $(x+a)(x^2+a^2)=\dfrac{x^4-a^4}{x-a}$.

উদাহরণ 4. সরল কর:

$$(x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2).$$

প্রদত্ত রাশি $=\{(x-y)(x^2+xy+y^2)\}\{(x+y)(x^2-xy+y^2)\}$

[সংযোগ নিয়ম]

$=(x^3-y^3)(x^3+y^3)=x^6-y^6$. [অনু. 78 (খ), (গ)]

প্রশ্নমালা 39

গুণফল নির্ণয় কর:

1. $(x+y+z)(x+y-z)$
2. $(2x+3y+5z)(2x+3y-5z)$
3. $(3a-7b+2c)(3a+7b+2c)$
4. $(x^2+xy+2y^2)(x^2-xy+2y^2)$
5. $(a^2-2ab+b^2)(a^2+2ab+b^2)$
6. $(2x^2-3xy+y^2)(2x^2+3xy+y^2)$
7. (i) $(x-1)(x+1)(x^2+1)$; (ii) $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$
8. (i) $(1-a)(1+a)(1+a^2)$; (ii) $(1-a)(1+a)(1+a^2)(1+a^4)$
9. $(x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$
10. $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$
11. $(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^3+y^3)$
12. $(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^3-y^3)$

দেখাও যে,

13. $(1+a)(1+a^2)=\dfrac{1-a^4}{1-a}$
14. $(1+a)(1+a^2)(1+a^4)=\dfrac{1-a^3}{1-a}$
15. $(a+a)(a^2+x^2)(a^4+x^4)=\dfrac{a^8-x^8}{a-x}$.

সরল কর :

16. $(1-a)(1+a)(1+a+a^2)(1-a+a^2)$

17. $(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

18. $(b+c)(b-c)+(c+a)(c-a)+(a+b)(a-b)$

19. $(y-z)(y^2+yz+z^2)+(z-x)(z^2+zx+x^2)$
$+(x-y)(x^2+xy+y^2)$

20. $(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)(x^6+y^6)-(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)+$
(x^6-y^6).

100. সূত্র : $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.
অথবা $=a^3+b^3+3ab(a+b)$.

প্রমাণ। $(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)$
$=(a^2+2ab+b^2)(a+b)$, [অনু. 75]
$=(a^2+2ab+b^2)a+(a^2+2ab+b^2)b$
$=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$
$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;

এবং যেহেতু $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+3ab(a+b)+b^3$
$=a^3+b^3+3ab(a+b)$

অতএব $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$.

অনুসিদ্ধান্ত 1. $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$.

প্রমাণ। $a^3+b^3=\{a^3+b^3+3ab(a+b)\}-3ab(a+b)$
$=(a+b)^3-3ab(a+b)$.

অনুসিদ্ধান্ত 2. $(a+b)^3-a^3-b^3=3ab(a+b)$.

বিপরীতক্রমে $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

কিংবা $a^3+b^3+3ab(a+b)=(a+b)^3$.

উদাহরণ 1. $2x+3y$-এর ঘন নির্ণয় কর।

$(2x+3y)^3=(2x)^3+3(2x)^2(3y)+3(2x)(3y)^2+(3y)^3$
$=8x^3+3(4x^2)(3y)+3(2x)(9y^2)+27y^3$
$=8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$.

উদাহরণ 2. $a+b+c$-এর ঘন নির্ণয় কর।

$(a+b+c)^3=\{(a+b)+c\}^3$, [$(a+b)$কে একটি রাশি ধরিলে]
$=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3$

$=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)+3(a^2+2ab+b^2)c+3(ac^2+bc^2)+c^3$
$=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3a^2c+3ac^2+3b^2c+3bc^2+6abc.$

উদাহরণ 3. সরল কর :
$(2x-5y)^3+3(2x-5y)^2(4x+5y)+3(2x-5y)(4x+5y)^2+(4x+5y)^3.$
$(2x-5y)$এর পরিবর্তে a এবং $(4x+5y)$এর পরিবর্তে b লিখিলে
প্রদত্ত রাশিমালা $=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$=(a+b)^3=\{(2x-5y)+(4x+5y)\}^3=\{6x\}^3=216x^3.$

উদাহরণ 4. $(2a-3b)^3+(4b-a)^3+3(2a-3b)(4b-a)(a+b)$কে সরল কর।

$2a-3b$ এর স্থলে x, $4b-a$এর স্থলে y লিখিলে
$x+y=(2a-3b)+(4b-a)=a+b.$
অতএব প্রদত্ত রাশিমালা $=x^3+y^3+3xy(x+y)$
$=(x+y)^3=(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$

উদাহরণ 5. $x=14$, $y=-9$ হইলে $8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$এর মান নির্ণয় কর।
প্রদত্ত রাশিমালা $=(2x)^3+3(2x)^2(3y)+3(2x)(3y)^2+(3y)^2$
$=(2x+3y)^3=(28-27)^3=1^3=1.$

উদাহরণ 6. $x+\frac{1}{x}=a$ হইলে দেখাও যে, $x^2+\left(\frac{1}{x}\right)^3=a^3-3a.$
(পা. প্র., 1918)

$x^3+\left(\frac{1}{x}\right)^3=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3x\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)$ (অনুসিদ্ধান্ত 1)
$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$ [যেহেতু $x.\frac{1}{x}=x\div x=1$]
$=a^3-3a.$

উদাহরণ 7. $x+y=7$ এবং $xy=12$ হইলে x^3+y^3এর মান নির্ণয় কর।
(অনুসিদ্ধান্ত 1)
$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y),$
$=7^3-3.12.7=343-252=91.$

প্রশ্নমালা 40

নিম্নলিখিত রাশিগুলির ঘন অর্থাৎ ত্রিঘাত নির্ণয় কর :

1. $x+5$ 2. $2x+3$ 3. $3a+5$ 4. $a+3x$
5. $2a+5b$ 6. $4a+3x$ 7. $3p+5q$ 8. $2x^2+3x$
9. $2a+b+c$ 10. $2a+3b+c$.

সরল কর :

11. $(x+3)^3+3(x+3)^2(2-x)+3(x+3)(2-x)^2+(2-x)^3$
12. $(2a+3b)^3+3(2a+3b)^2(a-3b)+3(2a+3b)(a-3b)^2+(a-3b)^3$
13. $(3x+5y)^3+3(3x+5y)^2(x-5y)+3(3x+5y)(x-5y)^2+(x-5y)^3$
14. $(5x+4a)^3+3(5x+4a)^2(2a-5x)+3(5x+4a)(2a-5x)^2$ $+(2a-5x)^3$
15. $2{\cdot}437\times2{\cdot}437\times2{\cdot}437+3\times2{\cdot}437\times2{\cdot}437\times7{\cdot}563+3\times2{\cdot}437\times 7{\cdot}563\times7{\cdot}563+7{\cdot}563\times7{\cdot}563\times7{\cdot}563$
16. $(5x+2y-3)^3+(5x-2y+3)^3+30x(5x+2y-3)(5x-2y+3)$
17. $(3x-2y+4z)^3+(2y-3x+4z)^3+24z(3x-2y+4z)\times$ $(2y-3x+4z)$
18. $(2x^2-7x+3)^3+(7x-2x^2+1)^3+12(2x^2-7x+3)\times$ $(7x-2x^2+1)$
19. $97{\cdot}34\times97{\cdot}34\times97{\cdot}34+2{\cdot}66\times2{\cdot}66\times2{\cdot}66+3\times97{\cdot}34\times$ $2{\cdot}66\times(97{\cdot}34+2{\cdot}66)$.

মান নির্ণয় কর :

20. $x=-4$ হইলে $x^3+12x^2+48x+64$এর
21. $x=\frac{3}{7}$ হইলে $1+21x+147x^2+343x^3$এর
22. $x=4, y=2$ হইলে $(3x+2y)^3+3(3x+2y)^2(y-2x)+3(3x+2y)\times$ $(y-2x)^2+(y-2x)^3$এর
23. $x=6,\ y=8,\ z=11$ হইলে $(2x+3y-2z)^3+3(2x+3y-2z)^2\times$ $(x-4y+z)+3(2x+3y-2z)(x-4y+z)^2+(x-4y+z)^3$এর
24. $x+\frac{1}{x}=\sqrt{3}$ হইলে $x^3+\left(\frac{1}{x}\right)^3$এর
25. $x+\frac{1}{x}=5$ হইলে $x^3+\left(\frac{1}{x}\right)^3$এর

26. $x+y=5$, $xy=6$ হইলে x^3+y^3এর
27. $x+y=a$, $xy=b$ হইলে x^3+y^3এর
28. $x+y=4$ হইলে দেখাও যে, $x^3+y^3+12xy=64$
29. $x+y=a$ হইলে দেখাও যে, $x^3+y^3+3axy=a^3$
30. প্রমাণ কর যে, $a^3+b^3-(a+b)^3=-3ab(a+b)$.
ইহা হইতে দেখাও যে, $a+b=-c$ হইলে $a^3+b^3+c^3=3abc$.

101. সূত্র : $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
অথবা $=a^3-b^3-3ab(a-b)$.

প্রমাণ। $(a-b)^3=(a-b)(a-b)(a-b)$
$=(a^2-2ab+b^2)(a-b)$, [২য় সূত্র দ্বারা]
$=(a^2-2ab+b^2)a-(a^2-2ab+b^2)b$
$=a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3$
$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

যেহেতু $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=a^3-3ab(a-b)-b^3$,
অতএব $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$.
বিপরীতক্রমে $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$.
কিংবা $a^3-b^3-3ab(a-b)=(a-b)^3$.

অনুসিদ্ধান্ত। $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$.

প্রমাণ। $a^3-b^3=\{a^3-b^3-3ab(a-b)\}+3ab(a-b)$
$=(a-b)^3+3ab(a-b)$.

দ্রষ্টব্য। পঞ্চম সূত্রে bএর স্থলে $-b$ লিখিয়াও ষষ্ঠ সূত্র পাওয়া যায়।

উদাহরণ 1. $2x-3y$এর ঘন নির্ণয় কর।

$$(2x-3y)^3=(2x)^3-3(2x)^2(3y)+3(2x)(3y)^2-(3y)^3$$
$$=8x^3-3(4x^2)(3y)+3(2x)(9y^2)-27y^3$$
$$=8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3.$$

উদাহরণ 2. $x-y-z$এর ঘন স্থির কর।

$(x-y-z)^3=\{(x-y)-z\}^3$ [$x-y$কে একটি পদ ধরিলে]
$=(x-y)^3-3(x-y)^2z+3(x-y)z^2-z^3$
$=(x^3-3x^2y+3xy^2-y^3)-3(x^2-2xy+y^2)z+3(xz^2-yz^2)-z^3$
$=x^3-y^3-z^3-3x^2y+3xy^2-3x^2z+3xz^2-3y^2z-3yz^2+6xyz.$

উদাহরণ 3. $(3x+2y)^3-(2x+3y)^3-3(3x+2y)(2x+3y)(x-y)$কে সরল কর।

$3x+2y$এর স্থলে a, $2x+3y$এর স্থলে b ধরিলে

$$a-b=(3x+2y)-(2x+3y)=x-y.$$

অতএব প্রদত্ত রাশিমালা $=a^3-b^3-3ab(a-b)$

$$=(a-b)^3$$

$$=(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3.$$

উদাহরণ 4. $x=3$, $y=4$ হইলে $27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3$এর মান নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=(3x)^3-3(3x)^2(2y)+3(3x)(2y)^2-(2y)^3$

$$=(3x-2y)^3=(9-8)^3=1^3=1.$$

উদাহরণ 5. $x-y=a$, $xy=b$ হইলে x^3-y^3এর মান নির্ণয় কর।

$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$. [অনুসিদ্ধান্ত]

$$=a^3+3ab.$$

প্রশ্নমালা 41

নিম্নলিখিত রাশিগুলির ঘন অর্থাৎ ত্রিঘাত নির্ণয় কর :

1. $x-5$ 2. $2x-3$ 3. $3a-5$

4. $3x-a$ 5. $2a-5b$ 6. $4a-3x$

7. $2x^2-3x$ 8. $a-b+c$ 9. $2a-3b-c$

সরল কর :

10. $867\times867\times867-3\times867\times867\times863$
$+3\times867\times863\times863-863\times863\times863$

11. $5{\cdot}389\times5{\cdot}389\times5{\cdot}389-2{\cdot}389\times2{\cdot}389\times2{\cdot}389$
$-9\times5{\cdot}389\times2{\cdot}389$

12. $(x+3)^3-3(x+3)^2(x+2)+3(x+3)(x+2)^2-(x+2)^3$

13. $(2a+3b)^3-3(2a+3b)^2(a+3b)+3(2a+3b)(a+3b)^2-(a+3b)^3$

14. $(3x+5y)^3-3(3x+5y)^2(2x+4y)+3(3x+5y)(2x+4y)^2-(2x+4y)^3$

15. $(5x+3y)^3-(4x+3y)^3-3x(5x+3y)(4x+3y)$

16. $(3x+2a)^3-(2x+a)^3-3(3x+2a)(2x+a)(x+a)$

17. $(4m+3n)^3-(3m+4n)^3-3(4m+3n)(3m+4n)(m-n)$

মান নির্ণয় কর :

18. $x=4$ হইলে $x^3-12x^2+48x-64$এর

19. $x=\frac{3}{4}$ হইলে $1-12x+48x^2-64x^3$এর

20. $a=5$ হইলে $(2a+3)^3-3(2a+3)^2(a+1)+3(2a+3)(a+1)^2-(a+1)^3$এর

21. $x=8$ হইলে $(x+27)^3-3(x+27)^2(2x+23)+3(x+27)(27)(2x+23)^2-(2x+23)^3$এর

22. $x-\dfrac{1}{x}=3$ হইলে $x^3-\dfrac{1}{x^3}$এর

23. $x-\dfrac{1}{x}=a$ হইলে $x^3-\dfrac{1}{x^3}$এর

24. $x-y=7,\ xy=10$ হইলে x^3-y^3এর

25. (i) $x-y=4$ হইলে দেখাও যে, $x^3-y^3-12xy=64$

(ii) $x-y=a$ হইলে দেখাও যে, $x^3-y^3-3xya=a^3$

26. $x^2-y^2=z^2$ হইলে দেখাও যে, $x^6-y^6-3x^2y^2z^2=z^6$.

102. সূত্রাবলীর জ্যামিতিক চিত্র (Graphical Illustration)। 64 এবং 66 অণুচ্ছেদে কয়েকটি সূত্রের জ্যামিতিক চিত্র (Graphical Illustration) প্রদত্ত হইয়াছে। এইরূপ চিত্রাঙ্কন-সাহায্যে বহুস্থলে সূত্রগুলিকে উত্তমরূপে উপলব্ধি করা যায়। এইজন্য নিম্নে আরও কয়েকটি সূত্রের জ্যামিতিক চিত্র দেওয়া হইল।

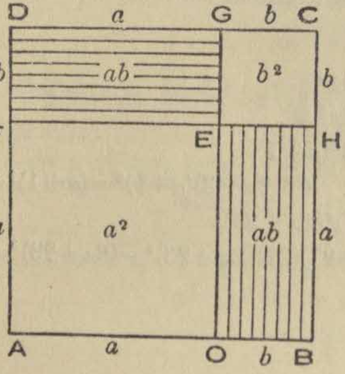
এস্থলে শিক্ষার্থিগণকে নিম্নলিখিত জ্যামিতিক সিদ্ধান্তগুলি স্মরণ রাখিতে হইবে :

(i) আয়তক্ষেত্রের বিপরীত বাহু পরস্পর সমান এবং প্রত্যেক কোণ সমকোণ এবং বর্গক্ষেত্রের বাহুগুলি পরস্পর সমান এবং প্রত্যেক কোণ সমকোণ।

(ii) আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ ;

(iii) বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = (বাহু)^2 ।

103. '$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$' এর জ্যামিতিক চিত্র।



কোন সরলরেখা AB টান এবং উহাতে একটি বিন্দু O লও। মনে কর, AO $=a$ এবং OB $=b$. অতএব AB $=a+b$. AB-এর উপর ABCD বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর। aএর সমান করিয়া AD হইতে AF অংশ, BC হইতে BH এবং DC হইতে DG কাটিয়া লও এবং OG, FH যুক্ত কর। FH যেন OGকে E-বিন্দুতে ছেদ করিল।

ABCD বর্গক্ষেত্র = AOEF ক্ষেত্র + EHCG ক্ষেত্র + OBHE ক্ষেত্র + FEGD ক্ষেত্র। ... (1)

AB $=a+b$; সুতরাং ABCD বর্গক্ষেত্র $=(a+b)^2$;
AOEF একটি বর্গক্ষেত্র এবং ইহার ক্ষেত্রফল $=a^2$;
EHCG একটি বর্গক্ষেত্র এবং ইহার ক্ষেত্রফল $=b^2$;
OBHE একটি আয়তক্ষেত্র এবং ইহার ক্ষেত্রফল $=ab$;
FEGD একটি আয়তক্ষেত্র এবং উহার ক্ষেত্রফল $=ab$;
অতএব (1) হইতে $(a+b)^2=a\ \ +b^2+ab+ab=a^2+2ab+b^2$.

104. '$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$'এর জ্যামিতিক চিত্র।

কোন সরলরেখা AB টান এবং উহাতে কোন বিন্দু O লও। মনে কর, AB $=a$, OB $=b$. অতএব AO $=a-b$. AB, AO এবং OBএর উপর চিত্রানুযায়ী যথাক্রমে ABCD, AOEF এবং BOHG বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

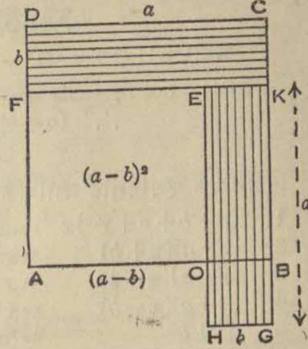
মনে কর, বর্দ্ধিত FE রেখা BCকে K বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে FD = AD − AF = AB − AO = OB $=b$.

HE = OE + OH = AO + OB = AB $=a$;

এবং HG = OB $=b$;

চিত্র হইতে AOEF ক্ষেত্র = সমগ্র AOHGCD ক্ষেত্র − CDFK ক্ষেত্র − HGKE ক্ষেত্র। ... (1)



কিন্তু AOEF ক্ষেত্র = $(a-b)^2$; (যেহেতু উহা AOএর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র) ;

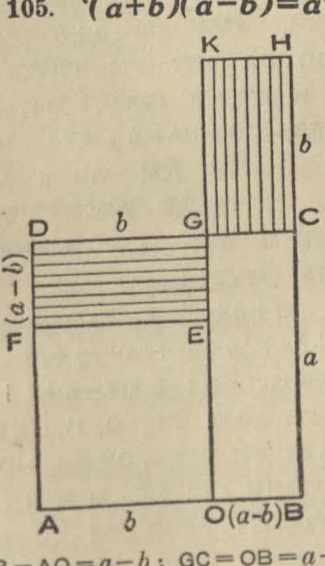
সমগ্র AOHGCD ক্ষেত্র
= ABCD বর্গক্ষেত্র + BOHG বর্গক্ষেত্র
$= a^2 + b^2$, (চিত্র)।

CDFK একটি আয়তক্ষেত্র এবং উহার ক্ষেত্রফল = ab, (চিত্র)।

HGKE একটি আয়তক্ষেত্র এবং উহার ক্ষেত্রফল = GK.HG = ab. [চিত্র]

অতএব (1) হইতে $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - ab - ab = a^2 - 2ab + b^2$.

105. '$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$'এর জ্যামিতিক চিত্র।



কোন সরলরেখা AB টান এবং উহাতে কোন বিন্দু O লও।

মনে কর, AB = a এবং AO = b. অতএব OB = $a - b$.

AB এবং AOএর উপর যথাক্রমে ABCD এবং AOEF বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর। বর্দ্ধিত OE রেখা যেন CDকে G বিন্দুতে ছেদ করিল। BCকে H পর্য্যন্ত এবং OGকে K পর্য্যন্ত এরূপে বর্দ্ধিত কর, যেন BH = OK = $a + b$ হয়। HK যুক্ত কর। ইহা দ্বারা OBHK আয়তক্ষেত্রটি উৎপন্ন হইল। চিত্র হইতে সুস্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, CH এবং GD উভয়ে bএর সমান বলিয়া উহারা পরস্পর সমান। FD = AD − AF = AB − AO = $a - b$; GC = OB = $a - b$. ∴ FD = GC.

অতএব আয়তক্ষেত্র GCHKএর CH এবং GC সন্নিহিত বাহুদ্বয় যথাক্রমে GDFEএর GD এবং FD সন্নিহিত বাহুদ্বয়ের সমান।

∴ GCHK আয়তক্ষেত্র = GDFE আয়তক্ষেত্র

এখন OBHK আয়তক্ষেত্র = OBCG আয়তক্ষেত্র + GCHK আয়তক্ষেত্র, (চিত্র)
= OBCG ক্ষেত্র + GDFE ক্ষেত্র = OBCDFE ক্ষেত্র
= ABCD বর্গক্ষেত্র − AOEF বর্গক্ষেত্র, (চিত্র);

অর্থাৎ $BH.OB = AB^2 - AO^2$.

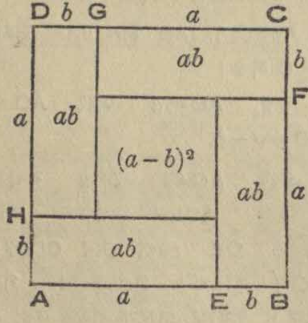
কিন্তু $BH = a+b$, $OB = a-b$, $AB = a$, $AO = b$. (চিত্র)

$$\therefore\ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

প্রশ্নমালা 42

নিম্নলিখিত সূত্রাবলীর জ্যামিতিক চিত্র অঙ্কিত কর :

1. $(a+b+c+\cdots)x = ax+bx+cx+\cdots$
2. $(x+a)(x+b) = x^2+ax+bx+ab$
3. $(x-a)(x-b) = x^2-ax-bx+ab$
4. $(x+a)(x-b) = x^2+ax-bx-ab$
5. $a^2+b^2 = (a-b)^2+2ab$ [ক. প্র., 1919)
6. $2a^2+2b^2 = (a+b)^2+(a-b)^2$
7. $(a+b)^2-(a-b)^2 = 4ab$. [সঙ্কেত : ABCD বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর। মনে কর, ইহার বাহু $=a+b$. AB, BC, CD, DA বাহুর উপর যথাক্রমে E, F, G, H বিন্দুগুলি এরূপভাবে লও, যেন $EB = FC = GD = HA = b$ হয়। এখন E ও G বিন্দু দিয়া ADএর এবং F ও H বিন্দু দিয়া ABএর সমান্তরাল রেখা টানিয়া প্রদত্ত সূত্র প্রমাণ কর।] [পার্শ্ববর্তী চিত্র দেখ]



8. $(a+b+c)(x+y+z) = ax+ay+az+bx+by+bz+cx+cy+cz$.

[সঙ্কেত : মনে কর, ABCD একটি আয়তক্ষেত্র এবং উহার AB বাহু $=a+b+c$; AD বাহু $=x+y+z$; ABএর উপর E, F এবং ADএর উপর G, H বিন্দুগুলি এরূপভাবে লও, যেন $AE = a$, $EF = b$, $FB = c$ হয় এবং $AG = x$, $GH = y$, $HD = z$ হয়। এখন E ও F বিন্দু দিয়া ADএর সমান্তরাল রেখা টান ; G ও H বিন্দু দিয়া ABএর সমান্তরাল রেখা টান। এই অঙ্কন দ্বারা ABCD ক্ষেত্র কতকগুলি আয়তক্ষেত্রে বিভক্ত হইল। ABCDএর ক্ষেত্রফল উৎপন্ন আয়তক্ষেত্রগুলির ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান মনে রাখিয়া প্রদত্ত সূত্রটি প্রমাণ কর।]

9. $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab$.
10. $(a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$.

একাদশ অধ্যায়

সহজ উৎপাদক (Easy Factors)

106. কোন রাশি দুই বা তদধিক রাশির গুণফল হইলে শেষের রাশিগুলির প্রত্যেকটিকে প্রথমোক্ত রাশির **উৎপাদক** বা **গুণনীয়ক (factor)** বলা হয়।

কোন রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করার (to factorise an expression, to resolve an expression into factorsএর) অর্থ রাশিটি যে-যে-রাশিগুলির গুণফলের সমান, সেই রাশিগুলি নির্ণয় করা।

গুণনে কতকগুলি রাশি দেওয়া থাকে, উহাদিগকে পরস্পর গুণ করিয়া যে গুণফলটি পাওয়া যায়, তাহা নির্ণয় করিতে হয়। অপর পক্ষে উৎপাদক-বিশ্লেষণে গুণফলটি দেওয়া থাকে এবং যে-যে রাশিগুলি গুণ করিয়া উহা পাওয়া গিয়াছে, সেই রাশিগুলি নির্ণয় করিতে হয়। অতএব দেখা যাইতেছে যে, 'উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা' গুণনের বিপরীত (converse) প্রক্রিয়া।

উদাহরণ। (1) $15xyz = 3 \times 5 \times x \times y \times z.$

অতএব 3, 5, x, y, z ইহারা $15xyz$এর উৎপাদক।

(2) $20x(x+a)(y+b) = 2^2 \times 5 \times x \times (x+a) \times (y+b).$

অতএব 2^2, 5, x, $(x+a)$ এবং $(y+b)$, ইহারা $20x(x+a)(y+b)$এর উৎপাদক।

দ্রষ্টব্য। কোন রাশির উৎপাদকগুলির মধ্যে পাটীগণিতীয় সংখ্যা থাকিলে উহাদিগকে সর্ব্বপ্রথম লিখিতে হয়।

107. পঞ্চম, ষষ্ঠ এবং দশম অধ্যায়ে গুণফলের যে-সূত্রগুলি প্রদত্ত হইয়াছে, উহাদিগকে 'গুণফল-নির্ণয়' এবং 'উৎপাদকে বিশ্লেষণ' এই উভয় উদ্দেশ্যে ব্যবহার করা যায়।

বর্ত্তমান অধ্যায়ে উৎপাদক-নির্ণয়ের কতকগুলি সহজ উদাহরণ আলোচিত হইবে। এস্থলে মূলচিহ্নযুক্ত উৎপাদক অথবা মূলচিহ্নবিশিষ্ট রাশিমালার উৎপাদক বিবেচিত হইবে না।

108. কোন রাশিমালার প্রত্যেক পদে একই সাধারণ (common) উৎপাদক থাকিলে উহাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণের নিয়ম।

পূর্ব্বে (অনুসিদ্ধান্ত, অনু. 63এ) প্রমাণিত হইয়াছে যে,

$xa + xb + xc + \cdots = x(a+b+c+\cdots)$; অথবা $(a+b+c+\cdots)x$,

অর্থাৎ x এবং $(a+b+c+\cdots)$, ইহারা $xa+xb+xc+\cdots$এর উৎপাদক।
অতএব উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিবার নিম্নলিখিত নিয়ম পাওয়া গেল :

নিয়ম। কোন রাশিমালার প্রত্যেক পদে একই উৎপাদক সাধারণ থাকিলে সাধারণ উৎপাদকটি বাহির করিয়া লও এবং রাশিমালার অবশিষ্ট অংশকে একটি বন্ধনীর মধ্যে স্থাপন করিয়া সাধারণ উৎপাদকটির পরে অথবা পূর্ব্বে লিখ।

কোন-কোন স্থলে প্রদত্ত রাশিমালার পদগুলিকে সুবিধামত সঙ্ঘবদ্ধ করিয়া লইয়া উল্লিখিত নিয়ম প্রয়োগ করিতে হয়।

প্রত্যেকস্থলে উৎপাদকগুলিকে সরল করিয়া লইবে।

উদাহরণ 1. $2a+6$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$2a+6=2.a+2.3$; এস্থলে 2 প্রত্যেক পদের সাধারণ উৎপাদক।

অতএব $2a+6=2(a+3)$.

উদাহরণ 2. $6a^2b+9ab^2$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এস্থলে $3ab$ প্রত্যেক পদের সাধারণ উৎপাদক।

$6a^2b+9ab^2=3ab.2a+3ab.3b=3ab(2a+3b)$.

উদাহরণ 3. $8a^3bc^3-12a^2b^2c^3-20a^2bc^5$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এস্থলে $4a^2bc^3$ প্রত্যেক পদের সাধারণ উৎপাদক।

অতএব $8a^3bc^3-12a^2b^2c^3-20a^2bc^5=4a^2bc^3(2a-3b-5c^2)$
$=2^2a^2bc^3(2a-3b-5c^2)$.

উদাহরণ 4. $x(b+c)+x(b-c)$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$x(b+c)+x(b-c)=x[(b+c)+(b-c)]$$
$$=a[b+c+b-c]=2xb. \qquad \text{[সরল করিয়া]}$$

উদাহরণ 5. $a(x+y)+2b(x+y)+3c(x+y)$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এস্থলে $(x+y)$ প্রত্যেক পদের সাধারণ উৎপাদক।

অতএব $a(x+y)+2b(x+y)+3c(x+y)=(x+y)(a+2b+3c)$.

উদাহরণ 6. $ax+bx+ay+by$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এস্থলে পদগুলিকে সুবিধামত ভাবে সঙ্ঘবদ্ধ করিয়া উৎপাদক নির্ণয় করা হইল।

$$(ax+bx+ay+by)=(ax+bx)+(ay+by)$$
$$=x(a+b)+y(a+b)$$
$$=(a+b)(x+$$

প্রশ্নমালা 43

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. $3x+12$ 2. $12x-6y$ 3. $ax+ay$
4. $a+a^2$ 5. x^2-xy 6. $3x^3+2xy$
7. $-2a^2+3ab$ 8. $x(b+c)+x(a-c)$ 9. a^2b+ab^2
10. $4abp+6abq$ 11. $6abc-9abd$ 12. $4x^3-12x^2y$
13. $4abc^2-8a^2b^2$ 14. $x^3y+x^2y+x^2y^2$
15. $3a^2x-4a^2y+2a^2z$ 16. $6x^2yz-9xy^2z+12xyz^2$
17. $4a^5-20a^4b+16a^3b^2d$
18. $2x^2abc-8xyabc+4y^2abc$
19. $6x^2ya^4-24xy^2za^3+30x^2y^3a^2$
20. $pa^3b^2c^2+5qa^2b^3c^2-20ra^2b^2c^3$
21. $(a+b)x+2(a+b)$ 22. $(x+y)a+(x+y)b$
23. $x^2(a^2+b^2)+y^2(a^2+b^2)$ 24. $(y+z)(a+b)+(y+z)(a-b)$
25. $(2x+3y)(a+b)+(2x+3y)(c+d)$
26. $a(x+y)+b(x+y)+c(x+y)$
27. $a(x+y+z)+b(x+y+z)+c(x+y+z)$
28. $2(a+b)x^2+3(a+b)xy+4(a+b)y^2$
29. $(ax+by+cz)(b+c-a)+(ax+by+cz)(c+a-b)$ $+(ax+by+cz)(a+b-c)$
30. $(x^2+y^2+z^2)(b^2+c^2)+(x^2+y^2+z^2)(c^2+a^2)$ $+(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2)$
31. $ax+3x+ay+3y$ 32. $ax-bx+ay-by$
33. $a^2-ab-ac+bc$ 34. $ab+a+b+1$
35. $ax-bx+2x+ay-by+2y$
36. $ax+2bx-3cx+ay+2by-3cy-2az-4bz+6cz.$

109. 'a^2-b^2'-আকারে প্রকাশিত রাশিমালার উৎপাদক।

77 অণুচ্ছেদের সূত্র দ্বারা $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

ইহা স্বতন্ত্রভাবে নিম্নলিখিতরূপেও প্রমাণ করা যায় :

$a^2-b^2=a^2+ab-ab-b^2$, [ab যোগ এবং বিয়োগ করিয়া]

$=(a^2+ab)-(ab+b^2)$

$=a(a+b)-b(a+b)=(a+b)(a-b).$

নিম্নে কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হইল

উদাহরণ 1. a^2x^2-1কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$a^2x^2-1=(ax)^2-1^2=(ax+1)(ax-1).$$

উদাহরণ 2. $(2a+3b-4c)^2-(a-2b+5c)^2$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$(2a+3b-4c)^2-(a-2b+5c)^2$$
$$=\{(2a+3b-4c)+(a-2b+5c)\}\{(2a+3b-4c)-(a-2b+5c)\}$$
$$=(3a+b+c)(a+5b-9c),$$ [সরল করিয়া]।

উদাহরণ 3. a^4-16x^4কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$a^4-16x^4=(a^2)^2-(4x^2)^2=(a^2+4x^2)(a^2-4x)^2$$
$$=(a^2+4x^2)\{(a)^2-(2x)^2\}$$
$$=(a^2+4x^2)(a+2x)(a-2x).$$

উদাহরণ 4. $18a^4-8a^2x^2$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$18a^4-8a^2x^2=2a^2(9a^2-4x^2)$$
$$=2a^2\{(3a)^2-(2x)^2\}$$
$$=2a^2(3a+2x)(3a-2x).$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য। কোন রাশিমালাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিবার পূর্ব্বে সর্ব্বপ্রথমে দেখিয়া লইবে, উহার পদগুলির কোন সাধারণ উৎপাদক আছে কিনা ; যদি থাকে, তবে উহাকে প্রথমেই বাহির করিয়া লইতে হইবে।

প্রশ্নমালা 44

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. $4a^2-b^2$ 2. a^2-4b^2 3. a^2-9b^2 4. $9x^2-25y^2$
5. a^2-9 6. $4a^2-25$ 7. a^2x^2-4 8. $9-b^2y^2$
9. $16m^2-49n^2$ 10. $16x^4-1$ 11. $81a^4-x^4$
12. $16a^4-625b^4$ 13. $(a+2b)^2-(2a+b)^2$
14. $(a+b-c)^2-(a-b+c)^2$ 15. $(2x-3y+5z)^2-(x-2y+3z)^2$
16. $4(a+b)^2-9(3a-b)^2$ 17. $25(x+2y)^2-36(2x-5y)^2$
18. $16(2a+b-3c)^2-9(4a-3b+2c)^2$ 19. $x^2a^2-x^2$
20. $4x^4-x^2a^2$ 21. $3a^4-27a^2b^2$
22. $45x^8-5x^4a^4$ 23. $243x^6y^2z^2-12x^2y^6z^2$

24. $81x^6y^2z-16x^2y^2z^5$

25. $(x+a)^3(y+b)-(x+a)(y+b)^3$.

110. 'a^2-b^2'-আকারে প্রকাশ করা যায়, এই প্রকার রাশিমালার উৎপাদক-নির্ণয়।

কোন-কোন বীজগণিতীয় রাশিমালাকে দুই বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করা যায়। অতএব '$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$' সূত্রের সাহায্যে এই প্রকার রাশিমালাকে সহজে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়। নিম্নে কতকগুলি উদাহরণ প্রদত্ত হইল।

উদাহরণ 1. (i) x^2-y^2+2x+1কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।
(ii) $a^2-2bc-b^2+6ac+8c^2$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

(i) $x^2-y^2+2x+1=(x^2+2x+1)-y^2$, [পদগুলিকে সাজাইয়া]
$=(x+1)^2-y^2$
$=(x+1+y)(x+1-y)$.

(ii) $a^2-2bc-b^2+6ac+8c^2$
$=(a^2+6ac+9c^2)-(b^2+2bc+c^2)$
$=(a+3c)^2-(b+c)^2$
$=\{(a+3c)+(b+c)\}\{(a+3c)-(b+c)\}$
$=(a+b+4c)(a-b+2c.)$

দ্রষ্টব্য। লক্ষ্য কর যে, এস্থলে $+6ac$ পদটির সহিত যে-যে-পদ থাকিলে একটি পূর্ণবর্গ রাশি উৎপন্ন হয়, উহাদিগকে $+6ac$সহ একটি বন্ধনীর মধ্যে রাখা হইয়াছে এবং $-2bc$ পদটির বেলাও অনুরূপ নিয়ম অবলম্বিত হইয়াছে।

উদাহরণ 2. (i) $4x^4+y^4$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।
(ii) $x^4+x^2y^2+y^4$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

প্রত্যেকস্থলে প্রদত্ত রাশির সহিত এরূপ একটি রাশি যোগ কর, যেন যোগফল পূর্ণবর্গ হয় এবং সমতা-রক্ষার জন্য উহা বিয়োগও কর।

(i) $4x^4+y^4=\{(2x^2)^2+(y^2)^2+2(2x^2)y^2\}-2(2x^2)y^2$,
[$2(2x^2)y^2$ যোগ এবং বিয়োগ করিয়া]
$=(2x^2+y^2)^2-(2xy)^2$, [যেহেতু, $2(2x^2)y^2=4x^2y^2=(2xy)^2$]
$=\{(2x^2+y^2)+(2xy)\}\{(2x^2+y^2)-(2xy)\}$
$=(2x^2+2xy+y^2)(2x^2-2xy+y^2)$.

(ii) $x^4+x^2y^2+y^4=\{(x^2)^2+2x^2y^2+(y^2)^2\}-x^2y^2$

[x^2y^2 যোগ এবং বিয়োগ করিয়া]

$$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$$
$$=\{(x^2+y^2)+xy\}\{(x^2+y^2)-xy\}$$
$$=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2).$$

উদাহরণ 3. $(x+5)(x+13)+7$কে দুই বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করিয়া উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$(x+5)(x+13)+7=x^2+18x+65+7=(x^2+2x.9+9^2)-9^2+72$$
$$=(x+9)^2-3^2=\{(x+9)+3\}\{(x+9)-3\}$$
$$=(x+12)(x+6).$$

উদাহরণ 4. $(x+3a)(x+5a)(x+7a)(x+9a)-9a^4$কে দুই বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করিয়া উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

প্রদত্ত রাশি $=\{(x+3a)(x+9a)\}\{(x+5a)(x+7a)\}-9a^4$

$$=\{x^2+12ax+27a^2\}\{x^2+12ax+35a^2\}-9a^4$$
$$=(x^2+12ax)^2+62a^2\ (x^2+12ax)+945a^4-9a^4$$
$$=\{(x^2+12ax)+31a^2\}^2-(31a^2)^2+945a^4-9a^4$$
$$=(x^2+12ax+31a^2)^2-25a^4 \qquad \text{[সরল করিয়া]}$$
$$=(x^2+12ax+31a^2)^2-(5a^2)^2.$$
$$=(x^2+12ax+36a^2)(x^2+12ax+26a^2)$$
$$=(x+6a)^2(x^2+12ax+26a^2).$$

প্রশ্নমালা 45

উদাহরণ 1এর প্রণালীতে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর [প্রথম দশটি প্রশ্নের ফল মুখে-মুখে বল]:

1. $a^2+2ab+b^2-c^2$
2. $x^2+4xy+4y^2-z^2$
3. $4m^2+12mn+9n^2-16p^2$
4. $x^2+2x+1-a^2$
5. $4x^2+4xa+a^2-4b^2$
6. $4a^2+12ab+9b^2-c^2$
7. $9x^2-12xy+4y^2-16z^2$
8. $9a^2-12ab+4b^2-16$
9. x^2-y^2-2y-1
10. $a^2-x^2+2xy-y^2$
11. $x^2-y^2-2yz-z^2$
12. $a^2+2ab+b^2-c^2-2cd-d^2$

13. $x^2+2ax+a^2-y^2-2yb-b^2$

14. $x^2+2yb-y^2+a^2+2xa-b^2$

15. $x^2-2yb-y^2+a^2-2xa-b^2$

16. $m^2-n^2-2mp+2nq+p^2-q^2$

17. $4x^2-12xa-9y^2+6yb+9a^2-b^2$

18. $6a^2+12ab-5b^2$ 19. $x^2-4xy-12yz-9z^2$

20. $x^2-6xa-y^2+2ya+8a^2$ 21. $4x^2-9y^2-4xz+6yz$

22. $16a^2-25b^2-8ac+10bc$

23. $(a^2+x^2)^2-2(a^2+x^2)(c^2+z^2)-2(b^2+y^2)(c^2+z^2)-(b^2+y^2)^2$

[সংকেত : a^2+x^2কে m, b^2+y^2কে n, c^2+z^2কে p ধর]

24. $(a^2+x)^2-(b^2+y)^2+(c^2+z)^2-(d^2+t)^2$
$-2\{(a^2+x)(c^2+z)+(b^2+y)(d^2+t)\}$

উদাহরণ 2এর প্রণালী-প্রয়োগ দ্বারা উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

25. $64a^4+x^4$ 26. x^4+64 27. $4a^4+81x^4$

28. x^4+4 29. x^4+3x^2+4 30. $4+8x^2+9x^4$

31. $9x^4+8x^2+16$ 32. $16x^4+15x^2+9$

33. $9m^4+26m^2n^2+25n^4$ 34. $x^8+x^4y^4+y^8$

উদাহরণ 3এবং 4এর প্রণালীতে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

35. $(x+3)(x+11)+7$

36. $(a^2+5)(a^2+13)-9$ 37. $(x^2-ax-5)(x^2-ax-11)-16$

38. $(a+5)(a+7)(a+9)(a+11)+12$

39. $(x+1)(x+3)(x+4)(x+6)+5$

40. $(7x+2)(7x+3)(7x+4)(7x+5)-8$

41. $(x+3a)(x+5a)(x+7a)(x+9a)+7a^4$

42. $(3x^2+4y)(3x^2+5y)(3x^2+8y)(3x^2+9y)-21y^4$.

111. 'x^2+px+q'রূপে প্রকাশিত রাশিমালার উৎপাদক-নির্ণয়।

প্রথম প্রণালী। 'x^2+px+q'রূপে প্রকাশিত রাশিমালাকে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করিয়া উহাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়। x^2+px+qএর সহিত $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ অর্থাৎ (xএর সহগের অর্দ্ধেক)^2 প্রথমে যোগ এবং পরে বিয়োগ দ্বারা

উহাকে দুইটি বর্গের অন্তররূপে লেখা যায় এবং পরে '$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$' সূত্র দ্বারা উহাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়।

উদাহরণ 1. x^2+5x+6কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$\begin{aligned}x^2+5x+6&=x^2+5x+(\tfrac{5}{2})^2-(\tfrac{5}{2})^2+6\\&=\{x^2+2x.\tfrac{5}{2}+(\tfrac{5}{2})^2\}-(\tfrac{25}{4}-6)\\&=(x+\tfrac{5}{2})^2-\tfrac{1}{4}\\&=(x+\tfrac{5}{2})^2-(\tfrac{1}{2})^2\\&=\{(x+\tfrac{5}{2})+\tfrac{1}{2}\}\{(x+\tfrac{5}{2})-\tfrac{1}{2}\}\\&=(x+3)(x+2).\end{aligned}$$

দ্রষ্টব্য। লক্ষ্য কর যে, একটি পূর্ণবর্গ রাশি পাওয়ার জন্যই x^2+5xএর সঙ্গে $(\frac{5}{2})^2$ অর্থাৎ (xএর সহগের অর্দ্ধেক)^2 যোগ করা হইল। এইরূপে x^2+2xyএর সহিত y^2 এবং x^2-2xyএর সহিত y^2 যোগ করিলে একটি পূর্ণবর্গ রাশি পাওয়া যায়। প্রত্যেকস্থলে প্রদত্ত রাশির সমতা-রক্ষার জন্য যাহা যোগ করা হইল, তাহাকে বিয়োগ করিতে হয়।

উদাহরণ 2. $x^2-7xy-30y^2$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এস্থলে (xএর সহগের অর্দ্ধেক)$^2=\left(-\dfrac{7y}{2}\right)^2=\left(\dfrac{7y}{2}\right)^2$.

$$\begin{aligned}x^2-7xy-30y^2&=x^2-7xy+(\tfrac{7}{2}y)^2-(\tfrac{7}{2}y)^2-30y^2\\&=\{x^2-2x.\tfrac{7}{2}y+(\tfrac{7}{2}y)^2\}-(\tfrac{49}{4}y^2+30y^2)\\&=(x-\tfrac{7}{2}y)^2-\tfrac{169}{4}y^2\\&=(x-\tfrac{7}{2}y)^2-(\tfrac{13}{2}y)^2\\&=\{(x-\tfrac{7}{2}y)+\tfrac{13}{2}y)\}\{(x-\tfrac{7}{2}y)-\tfrac{13}{2}y\}\\&=(x+3y)(x-10y).\end{aligned}$$

উদাহরণ 3. $(a^2+3a)^2+5(a^2+3a)+6$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

a^2+3aএর পরিবর্ত্তে x লিখিলে

প্রদত্ত রাশিমালা $=x^2+5x+6=(x+3)(x+2)$, [উদাহরণ 1 দ্বারা]

$=(a^2+3a+3)(a^2+3a+2)$, [যেহেতু, $x=a^2+3a$]

এখন $a^2+3a+2=a^2+2a+a+2=a(a+2)+(a+2)=(a+2)(a+1)$.

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা $=(a^2+3a+3)(a+2)(a+1)$.

দ্বিতীয় প্রণালী। x^2+px+qকে $x^2+(a+b)x+ab$রূপে লিখা সম্ভব হইলে [78(ক) অনুচ্ছেদে প্রদত্ত] '$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$' সূত্র দ্বারা উহার উৎপাদক নির্ণয় করা যায়। অতএব যদি পরীক্ষা দ্বারা এইরূপ দুইটি রাশি a এবং b নির্ণয় করিতে পারা যায়, যেন $a+b=p$ অর্থাৎ xএর সহগ হয় এবং $ab=q$ অর্থাৎ x-নিরপেক্ষ পদ হয়, তাহা হইলে $(x+a)$এবং $(x+b)$ই নির্ণেয় উৎপাদক হইবে।

উদাহরণ 1. $x^2+7x+12$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এমন দুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর, যাহাদের যোগফল 7 এবং গুণফল 12.

$1\times12=12$; $2\times6=12$; $3\times4=12$.

এই উৎপাদকগুলির মধ্যে 3 এবং 4এর যোগফল $=7$, অতএব $x+3$ এবং $x+4$ ই নির্ণেয় উৎপাদক। 3 এবং 4 মনে-মনে নির্ণয় করিয়া সম্পূর্ণ প্রক্রিয়াটি নিম্নলিখিতভাবে দেখাইতে হয় :

$$\begin{aligned} x^2+7x+12 &= x^2+3x+4x+12 \\ &= x(x+3)+4(x+3) \\ &= (x+3)(x+4). \end{aligned}$$

উদাহরণ 2. $x^2-6xy-27y^2$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এরূপ দুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর, যাহাদের যোগফল -6 এবং গুণফল -27

$$-1\times27=-27\;;\qquad -3\times9=-27\;;$$
$$1\times(-27)=-27\;;\qquad 3\times(-9)=-27\;;$$

এই উৎপাদক-যুগলগুলির মধ্যে 3 এবং -9এর যোগফল $=-6$. অতএব $x+3y$ এবং $x-9y$ নির্ণেয় উৎপাদক।

3 এবং -9 মনে-মনে নির্ণয় করিয়া সম্পূর্ণ প্রক্রিয়াটি এইরূপে দেখাইতে হইবে :

$$\begin{aligned} x^2-6xy-27y^2 &= x^2+3xy-9xy-27y^2 \\ &= x(x+3y)-9y(x+3y) \\ &= (x+3y)(x-9y). \end{aligned}$$

উদাহরণ 3. $x^2-9xy+14y^2$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এস্থলে এরূপ দুইটি সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে, যাহাদের যোগফল -9 এবং গুণফল 14 ; স্পষ্টতঃ উভয় সংখ্যাই ঋণাত্মক হইবে, কারণ উহারা উভয়েই ধনাত্মক হইলে উহাদের সমষ্টি -9 (অর্থাৎ ঋণরাশি) হইতে পারে না। আবার উহাদের একটি ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক হইলে উভয়ের গুণফল 14 (অর্থাৎ ধনরাশি) হইতে পারে না। যে-যে ঋণাত্মক সংখ্যাদ্বয়ের গুণফল 14, উহারা যথাক্রমে (i) -1 এবং

-14 ; (*ii*) -2 এবং -7, ইহাদের মধ্যে যে দুইটির যোগফল -9, উহারা -2 এবং -7.

অতএব $x^2-9xy+14y^2=x^2-2xy-7xy+14y^2$

$$=x(x-2y)-7y(x-2y)$$
$$=(x-2y)(x-7y).$$

উদাহরণ 4. x^4+2x^2-24কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এস্থলে এরূপ দুইটি সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে, যাহাদের যোগফল 2 এবং গুণফল -24. পরীক্ষা দ্বারা দেখা যাইবে যে, নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় -4 এবং 6 ;

এখন $x^4+2x^2-24=x^4-4x^2+6x^2-24$

$$=x^2(x^2-4)+6(x^2-4)$$
$$=(x^2-4)(x^2+6)$$
$$=(x+2)(x-2)(x^2+6).$$

উদাহরণ 5. $(3a+2b)^2+5(3a+2b)(2a+5b)-14(2a+5b)^2$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$3a+2b$এর পরিবর্ত্তে x এবং $2a+5b$এর পরিবর্ত্তে y বসাইলে

প্রদত্ত রাশিমালা $=x^2+5xy-14y^2$

$=(x+7y)(x-2y)$, [পূর্ব্বোক্ত দ্বিতীয় প্রণালী দ্বারা]

$=\{(3a+2b)+7(2a+5b)\}\{(3a+2b)-2(2a+5b)\}$

$=(17a+37b)(-a-8b)$, বা $-(17a+37b)(a+8b)$.

উদাহরণ 6. $(x^2+2x)^2-2(x^2+2x)-3$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

(x^2+2x)এর পরিবর্ত্তে a লিখিলে

প্রদত্ত রাশিমালা $=a^2-2a-3$

$=(a-3)(a+1)$. [পূর্ব্বোক্ত দ্বিতীয় প্রণালী দ্বারা]

$=(x^2+2x-3)(x^2+2x+1)$. [যেহেতু $a=x^2+2x$]

আবার পূর্ব্বোক্ত নিয়মে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিলে

$$x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$$

এবং $(x^2+2x+1)=(x+1)^2$.

অতএব প্রদত্ত রাশিমালা $=(x+3)(x-1)(x+1)^2$.

দ্রষ্টব্য। দ্বিতীয় প্রণালী দ্বারা 'x^2+px+q'রূপ রাশিমালার উৎপাদক-নির্ণয় সকল স্থলে সম্ভবপর নহে। কিন্তু প্রথম প্রণালী সর্ব্বত্র প্রযোজ্য।

প্রশ্নমালা 46

111 অণুচ্ছেদে প্রদত্ত প্রণালী দ্বারা উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর [1-23 প্রশ্নের উত্তর মুখে-মুখে বল] :

1. x^2+4x+3 2. $x^2+9x+14$ 3. $x^2+10x+21$
4. $a^2+11a+24$ 5. m^2-6m+8 6. $n^2-11n+28$
7. $x^2-7x+12$ 8. $x^2-9x+20$ 9. x^2+x-20
10. a^2-a-30 11. $x^2+3x-10$ 12. $m^2-4m-45$
13. $x^2-17x-60$ 14. $y^2-23y-50$ 15. $z^2+15z-76$
16. $a^2-2a-35$ 17. $x^2+7x-144$ 18. $m^2-26m+133$
19. $x^2+14x-120$ 20. $x^2-12x-133$ 21. $a^2-7a-120$
22. $b^2-27b+180$ 23. m^2-. $x^2+5x-546$
25. $x^2+x-600$ 26. $x^2-6x-720$ 27. $y^2-51y+650$
28. $a^2-3a-990$ 29. $x^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)x+1$
30. $x^2-(a+bc)x+abc$ 31. $x^2+(a+b+c)x+a(b+c)$
32. $x^2+(a+b+c+d)x+(a+b)(c+d)$
33. $x^2+(2a+3b)x+(a^2+3ab+2b^2)$
34. $x^2-2px-(4q^2+8qp+3p^2)$
35. $x^2+ax-(6a^2-5ab+b^2)$
36. $x^2+16xy+60y^2$ 37. $m^2-21mn+80n^2$
38. $c^2-10cd-96d^2$ 39. $m^2-10mn-264n^2$
40. $p^2+3pq-270q^2$ 41. $x^2-4xy-320y^2$
42. x^4+3x^2-28 43. a^4-2a^2-63
44. m^4-7m^2-144 45. x^4-5x^2+4
46. $a^4-10a^2b^2+9b^4$ 47. $m^4-13m^2n^2+36n^4$
48. $(x^2+2x)^2+5(x^2+2x)+6$
49. $(m^2+3m)^2-4(m^2+3m)+3$
50. $(a^2+4a)^2-5(a^2+4a)-36$
51. $(x^2+2xa)^2+5(x^2+2xa)a^2+4a^4$
52. $(x+a)^2+4(x+a)(y+b)+3(y+b)^2$
53. $(2x+3y)^2+8(2x+3y)(x+2y)+15(x+2y)^2$
54. $(5x+2a)^2+3(5x+2a)(2x+3a)-40(2x+3a)^2$

55. $(a^2+b^2)^2-9(a^2+b^2)(a^2-b^2)-36(a^2-b^2)^2$

56. $(x+a)^2-4(x+a)(y+b)-45(y+b)^2$

57. $(x^2-3x)^2-38(x^2-3x)-80$ [বো. প্র., 1915]

58. $(x^2+2xy)^2-23(x^2+2xy)y^2+120y^4$.

59. $(x^2+4x)^4-10(x^2+4x)^2+9$

60. $(a^2+5a)^4-15(a^2+5a)^2-16$.

112. 'ax^2+bx+c' রূপে প্রকাশিত রাশিমালার উৎপাদক-নির্ণয়।

প্রথম প্রণালী। a (অর্থাৎ x^2এর সহগ) পূর্ণবর্গ হইলে পরিবর্ত (substitution) দ্বারা প্রদত্ত রাশিকে x^2+px+qরূপে প্রকাশ করা যায় এবং পূর্ব্ববর্ত্তী অণুচ্ছেদে প্রদত্ত প্রণালীতে সহজেই ইহার উৎপাদক নির্ণয় করা যায়। [নিম্নের উদাহরণ 1 দেখ]।

a পূর্ণবর্গ না হইলে প্রথমেই প্রদত্ত রাশিকে a দ্বারা গুণ এবং ভাগ করিতে হয়।

$$ax^2+bx+c=\frac{a}{a}\times(ax^2+bx+c)$$

$$=\frac{1}{a}(a^2x^2+abx+ac)$$

$$=\frac{1}{a}\{(ax)^2+b(ax)+ac\}$$

$$=\frac{1}{a}\{x^2+bx+ac\},\quad [\ ax\text{এর স্থলে } x \text{ লিখিয়া}\ ]$$

এখন $x^2+bx+ac$ একটি 'x^2+px+q'-আকারের রাশিমালা। অতএব পূর্ব্ববর্ত্তী অণুচ্ছেদের প্রণালীতে ইহাকে সহজে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়।

উদাহরণ 1. $4x^2+16x+15$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এস্থলে 4 (অর্থাৎ x^2এর সহগ) একটি পূর্ণবর্গ রাশি। প্রদত্ত রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইলে নিম্নলিখিত প্রণালী অবলম্বনীয়।

$4x^2+16x+15=(2x)^2+8(2x)+15$

$=a^2+8a+15$, [$2x$এর পরিবর্ত্তে a লিখিয়া]

$=(a+3)(a+5)$, [111 অণু.]

$=(2x+3)(2x+5)$, [aএর স্থলে $2x$ লিখিয়া]

উদাহরণ 2. $3x^2+10x+8$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এস্থলে 3 (অর্থাৎ x^2এর সহগ) পূর্ণবর্গ নহে। কাজেই 3 দ্বারা গুণ এবং ভাগ করিলে

$$\begin{aligned}3x^2+10x+8 &= \tfrac{3}{3}\times(3x^2+10x+8)\\ &= \tfrac{1}{3}(9x^2+30x+24)\\ &= \tfrac{1}{3}\{(3x)^2+10(3x)+24\},\\ &= \tfrac{1}{3}\{z^2+10z+24\}, && \text{[3xএর স্থলে z লিখিলে]}\\ &= \tfrac{1}{3}(z+6)(z+4), && \text{[অনু. 111]}\\ &= \tfrac{1}{3}(3x+6)(3x+4), && \text{[zএর স্থলে 3x লিখিয়া]}\\ &= (x+2)(3x+4). && \text{[সরল করিয়া]}\end{aligned}$$

উদাহরণ 3. $12a^2-5a-38$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

12 পূর্ণবর্গ নহে।

$$\begin{aligned}12a^2-5a-38 &= \tfrac{12}{12}\times(12a^2-5a-38)\\ &= \tfrac{1}{12}\{12^2a^2-5.12a-456\}\\ &= \tfrac{1}{12}\{x^2-5x-456\}, && \text{[12aএর স্থলে x লিখিলে]}\\ &= \tfrac{1}{12}(x-24)(x+19), && \text{[উৎপাদক-নির্ণয় করিয়া]}\\ &= \tfrac{1}{12}(12a-24)(12a+19), && \text{[xএর স্থলে 12a লিখিয়া]}\\ &= (a-2)(12a+19). && \text{[সরল করিয়া]}\end{aligned}$$

উদাহরণ 4. $-5x^2-8xy+4y^2$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$\begin{aligned}-5x^2-8xy+4y^2 &= -(5x^2+8xy-4y^2)\\ &= -\tfrac{5}{5}(5x^2+8xy-4y^2)\\ &= -\tfrac{1}{5}(5^2x^2+8.5xy-20y^2)\\ &= -\tfrac{1}{5}(z^2+8zy-20y^2), && \text{[5xএর স্থলে z লিখিয়া]}\\ &= -\tfrac{1}{5}(z+10y)(z-2y)\\ &= -\tfrac{1}{5}(5x+10y)(5x-2y^2), && \text{[zএর স্থলে 5x লিখিয়া]}\\ &= -(x+2y)(5x-2y). && \text{[সরল করিয়া]}\end{aligned}$$

দ্বিতীয় প্রণালী।

নিয়ম। 'ax^2+bx+c'কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইলে

(1) প্রথমে পরীক্ষা দ্বারা এইরূপ দুইটি রাশি নির্ণয় কর, যাহাদের

গুণফল $=ac$ (অর্থাৎ x^2এর সহগ এবং x-নিরপেক্ষ পদের গুণফল) এবং যাহাদের সমষ্টি $=b$ (অর্থাৎ xএর সহগ) ;

(2) এখন bxকে x-যুক্ত এরূপ দুইটি পদে বিভক্ত কর, যেন উহাদের xএর সহগ লব্ধ রাশিদ্বয়ের সমান হয়।

(3) সর্ব্বশেষে প্রদত্ত রাশির পদগুলিকে সঙ্ঘবদ্ধ করিয়া (grouping) রাশিটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

উদাহরণ 5. $3x^2+10x+8$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এস্থলে এরূপ দুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর, যাহাদের গুণফল $=3\times 8$ বা 24 এবং যাহাদের সমষ্টি $=10$; পরীক্ষা দ্বারা দেখা যাইতেছে যে 4 এবং 6ই নির্ণেয় সংখ্যা।

$$3x^2+10x+8=3x^2+4x+6x+8, \quad [\ 10x\text{কে } 4x+6x\text{রূপে লিখিয়া}\ ]$$
$$=(3x^2+4x)+(6x+8).$$
$$=x(3x+4)+2(3x+4)$$
$$=(3x+4)(x+2).$$

উদাহরণ 6. $-12a^2+5ab+38b^2$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এস্থলে এরূপ দুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদের গুণফল $(-12)\times 38$ বা -456 এবং যাহাদের (বীজগণিতীয়) সমষ্টি 5 ; সহজে দেখা যাইবে যে, 24 এবং -19ই নির্ণেয় সংখ্যা। অতএব

$$-12a^2+5ab+38b^2=-12a^2+24ab-19ab+38b^2$$
$$=(-12a^2+24ab)-(19ab-38b^2)$$
$$=-12a(a-2b)-19b(a-2b)$$
$$=(a-2b)(-12a-19b)$$
$$\text{অথবা } =-(a-2b)(12a+19b)$$
$$\text{অথবা } =(-a+2b)(12a+19b).$$

উদাহরণ 7. $acx^2+(ad+bc)x+bd$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এস্থলে এরূপ দুইটি রাশি নির্ণয় কর, যাহাদের গুণফল $=ac.bd$ এবং যাহাদের সমষ্টি $=ad+bc$; স্পষ্টতঃ ad এবং bcই নির্ণেয় সংখ্যা। অতএব

$$acx^2+(ad+bc)x+bd=acx^2+adx+bcx+bd$$
$$=(acx^2+adx)+(bcx+bd)$$
$$=ax(cx+d)+b(cx+d).$$
$$=(cx+d)(ax+b), \text{ অথবা } (ax+b)(cx+d).$$

প্রশ্নমালা 47

112 অনুচ্ছেদে প্রদত্ত প্রণালীতে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. $2a^2+7a+3$
2. $3a^2+8a+4$
3. $4x^2-12x+5$
4. $5x^2-18x+9$
5. $6x^2-11x+4$
6. $3x^2-13x+14$
7. $4x^2-20x+9$
8. $6m^2-19m+8$
9. $3x^2+7x-6$
10. $2x^2+x-6$
11. $8x^2+10x-3$
12. $4x^2+13x-12$
13. $6m^2-17m-10$
14. $7x^2-9x-10$
15. $10x^2-11x-8$
16. $6x^2-11x-35$
17. $-8x^2+x+9$
18. $-4a^2+23a+6$
19. $-3m^2-10m+8$
20. $-4a^2+8a-3$
21. $6a^2+13ab-8b^2$
22. $6x^2-5xy-6y^2$
23. $2m^2+3mn-9n^2$
24. $3a^2-10ab-8b^2$
25. $6m^2-mn-2n^2$
26. $12c^2-13cd-4d^2$
27. $35m^2-11mn-6n^2$
28. $-10x^2+9xy+7y^2$
29. $-8m^2+11mn+10n^2$
30. $-2x^2-3xy+27y^2$ [এ. প্র., 1916]
31. $99a^2-202ab+99b^2$
32. $2(a+b)^2+3(a+b)+1$ [সঙ্কেত : $(a+b)$এর স্থলে x লিখ]
33. $3(2x+y)^2-4(2x+y)+1$
34. $3(x^2+2x)^2-7(x^2+2x)+2$
35. $4(a+b)^2-8(a+b)(c+d)+3(c+d)^2$
    [সঙ্কেত : $(a+b)$এর স্থলে x এবং $(c+d)$এর স্থলে y লিখ]
36. $6(2x+3y)^2-25(2x+3y)(x+2y)-9(x+2y)^2$
37. $5(a^2-3ab+b^2)^2-8(a^2-3ab+b^2)(a^2+ab+b^2)-4(a^2+ab+b^2)^2$
38. $ax^2+(a+b)x+b$
39. $px^2+(pq-1)x-q$
40. $(a+b)x^2+2ax+(a-b)$
41. $abx^2+(abcd+1)x+cd$
42. $pqx^2-(pqr+s)x+rs$
43. $(a+b)(c+d)x^2+(a^2-b^2+c^2-d^2)x+(a-b)(c-d)$.

113. (i) $a^2+2ab+b^2$; (ii) $a^2-2ab+b^2$; (ii) $a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab$রূপে প্রকাশিত রাশিমালার উৎপাদক।

সূত্রানুসারে $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$; $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ এবং $a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab=(a+b+c)^2$; তবে ইহাদিগকে স্বতন্ত্রভাবেও নিম্নলিখিতরূপে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়।

(i) $a^2+2ab+b^2$
$=a^2+ab+ab+b^2,$ [$2ab$কে $ab+ab$রূপে লিখিয়া]
$=(a^2+ab)+(ab+b^2),$ [পদগুলিকে সজ্ঘবদ্ধ করিয়া]
$=a(a+b)+b(a+b)$
$=(a+b)(a+b)=(a+b)^2.$

(ii) $a^2-2ab+b^2=a^2-ab-ab+b^2,$
[$-2ab$কে $-ab-ab$রূপে লিখিয়া]
$=(a^2-ab)-(ab-b^2)$
$=a(a-b)-b(a-b)$
$=(a-b)(a-b)=(a-b)^2.$

(iii) $a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab$
$=a^2+(2ab+2ac)+(b^2+2bc+c^2),$ [aএর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইলে]
$=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2$
$=(a+b+c)^2.$

উদাহরণ 1. $4x^2+12xy+9y^2$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।
$4x^2+12xy+9y^2=(2x)^2+2.2x.3y+(3y)^2=(2x+3y)^2.$

উদাহরণ 2. $9(3x+2y)^2-30(3x+2y)(x+y)+25(x+y)^2$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।
প্রদত্ত রাশি $=\{3(3x+2y)\}^2-2\{3(3x+2y)\}\{5(x+y)\}+\{5(x+y)\}^2$
$=\{3(3x+2y)-5(x+y)\}^2=(4x+y)^2.$

উদাহরণ 3. $(y+z-x)^2+(z+x-y)^2+(x+y-z)^2+2(z+x-y)\times(x+y-z)+2(x+y-z)(y+z-x)+2(y+z-x)(z+x-y)$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।
$y+z-x,\ z+x-y,\ x+y-z$এর স্থলে যথাক্রমে a, b, c লিখিলে
প্রদত্ত রাশি $=a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab=(a+b+c)^2$
$=\{(y+z-x)+(z+x-y)+(x+y-z)\}^2=(x+y+z)^2.$

প্রশ্নমালা 48

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর [1-8 প্রশ্নের উত্তর মুখে-মুখে বল]:

1. x^2+2x+1 **2.** a^2+4a+4 **3.** x^2+6x+9

4. $a^2-10a+25$ 5. $x^2-14x+49$ 6. $4m^2+4mn+n^2$

7. $36a^2-60ab+25b^2$ 8. $81x^2-36xa+4a^2$

9. $(x+2y)^2+4(x+2y)(2x+3y)+4(2x+3y)^2$

10. $4(2a-3b)^2-4(2a-3b)(4b-3a)+(4b-3a)^2$

11. $4(2x+3y-5z)^2-12(2x+3y-5z)(x+2y-7z)+9(x+2y-7z)^2$

12. $x^4+y^4+z^4+2y^2z^2+2z^2x^2+2x^2y^2$

13. $b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2abc(a+b+c)$

14. $(2x-y)^2+(2y-z)^2+(2z-x)^2+2(2y-z)(2z-x)$
$+2(2z-x)(2x-y)+2(2x-y)(2y-z)$

15. $(x-2y)^2+(2y-3z)^2+(5z-x)^2+2(2y-3z)(5z-x)$
$-2(5z-x)(x-2y)-2(x-2y)(2y-3z)$.

114. (i) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
এবং (ii) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$এর উৎপাদক।

100 এবং 101 অনুচ্ছেদে প্রদত্ত সূত্র দ্বারা

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$$

এবং $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$.

তবে ইহাদিগকে নিম্নলিখিতরূপে স্বতন্ত্রভাবেও উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়।

(i) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3$
$=(a^3+a^2b)+(2a^2b+2ab^2)+(ab^2+b^3)$
$=a^2(a+b)+2ab(a+b)+b^2(a+b)$
$=(a+b)(a^2+2ab+b^2)=(a+b)(a+b)^2=(a+b)^3$.

(ii) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
$=a^3-a^2b-2a^2b+2ab^2+ab^2-b^3$
$=(a^3-a^2b)-(2a^2b-2ab^2)+(ab^2-b^3)$
$=a^2(a-b)-2ab(a-b)+b^2(a-b)$
$=(a-b)(a^2-2ab+b^2)=(a-b)(a-b)^2=(a-b)^3$.

উদাহরণ 1. $8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3=(2x)^3+3.(2x)^2y+3.2x.y^2+y^3$
$=(2x+y)^3$.

উদাহরণ 2. $8(2x+y)^3-36(2x+y)^2(x+y)+54(2x+y)(x+y)^2-27(x+y)^3$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

প্রদত্ত রাশি $=\{2(2x+y)\}^3-3\{2(2x+y)\}^2\{3(x+y)\}$
$+3\{2(2x+y)\}\{3(x+y)\}^2-\{3(x+y)\}^3$
$=\{2(2x+y)-3(x+y)\}^3=(x-y)^3.$

প্রশ্নমালা 49

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর [**1-4** প্রশ্নের উত্তর মুখে-মুখে বল]:

1. x^3+3x^2+3x+1
2. x^3-3x^2+3x-1
3. $x^3+6x^2+12x+8$
4. $8x^3+12x^2+6x+1$
5. $8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$
6. $(x+y)^3-3(x+y)^2(x-y)+3(x+y)(x-y)^2-(x-y)^3$
7. $(2a+b)^3+3(2a+b)^2(a+3b)+3(2a+b)(a+3b)^2+(a+3b)^3$
8. $(2x-y)^3-6(2x-y)^2(x-2y)+12(2x-y)(x-2y)^2-8(x-2y)^3$
9. $27(a-b+c)^3-108(a-b+c)^2(a+b-c)+144(a-b+c)(a+b-c)^2-64(a+b-c)^3$

10-26. প্রশ্নমালা 40এর 11 হইতে 19-সংখ্যক প্রশ্নগুলিতে এবং প্রশ্নমালা 41 এর 10 হইতে 17-সংখ্যক প্রশ্নগুলিতে প্রদত্ত রাশিমালার উৎপাদক নির্ণয় কর।

115. (i) 'a^3+b^3' এবং (ii) 'a^3-b^3'রূপে প্রকাশিত রাশিমালার উৎপাদক।

78 (খ) এবং 78 (গ) অণুচ্ছেদের সূত্রানুসারে
$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$;
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

তবে নিম্নলিখিতরূপে স্বতন্ত্রভাবেও ইহাদের উৎপাদক নির্ণয় করা যায়:

(i) a^2b যোগ এবং বিয়োগ করিয়া এবং ab^2 বিয়োগ ও যোগ করিয়া

$a^3+b^3=a^3+a^2b-a^2b-ab^2+ab^2+b^3$
$=(a^3+a^2b)-(a^2b+ab^2)+(ab^2+b^3)$
$=a^2(a+b)-ab(a+b)+b^2(a+b)$
$=(a+b)(a^2-ab+b^2).$

(ii) $a^3-b^3=a^3-a^2b+a^2b-ab^2+ab^2-b^3$ [a^2b এবং ab^2 রাশিদ্বয় বিয়োগ এবং যোগ করিয়া]

$$=(a^3-a^2b)+(a^2b-ab^2)+(ab^2-b^3)$$
$$=a^2(a-b)+ab(a-b)+b^2(a-b)$$
$$=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

উদাহরণ 1. $8(a+b)^3+27b^3$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$8(a+b)^3+27b^3=\{2(a+b)\}^3+(3b)^3$$
$$=\{2(a+b)+3b\}[\{2(a+b)\}^2-2(a+b)(3b)+(3b)^2]$$
$$=\{2a+2b+3b\}[4(a^2+2ab+b^2)-(6ab+6b^2)+9b^2]$$
$$=(2a+5b)(4a^2+2ab+7b^2).$$ [সরল করিয়া]

উদাহরণ 2. x^6-729y^6কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। [বো. প্র., 1913]

$$x^6-729y^6=(x^2)^3-(9y^2)^3$$
$$=(x^2-9y^2)(x^4+9x^2y^2+81y^4)$$
$$=\{x^2-(3y)^2\}\{(x^4+18x^2y^2+81y^4)-9x^2y^2\}$$
$$=\{x^2-(3y)^2\}\{(x^2+9y^2)^2-(3xy)^2\}$$
$$=(x+3y)(x-3y)(x^2+9y^2+3xy)(x^2+9y^2-3xy)$$
$$=(x+3y)(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)(x^2-3xy+9y^2).$$

অথবা

$$x^6-729y^6=(x^3)^2-(27y^3)^2$$
$$=(x^3+27y^3)(x^3-27y^3)$$
$$=\{x^3+(3y)^3\}\{x^3-(3y)^3\}$$
$$=(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)$$
$$=(x+3y)(x-3y)(x^2-3xy+9y^2)(x^3+3xy+9y^2).$$

উদাহরণ 3. $x^3+y^3-xy(x+y)$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$\text{প্রদত্ত রাশি}=(x^3+y^3)-xy(x+y)$$
$$=(x+y)(x^2-xy+y^2)-xy(x+y)$$
$$=(x+y)\{(x^2-xy+y^2)-xy\}$$
$$=(x+y)\{x^2-2xy+y^2\}$$
$$=(x+y)(x-y)^2.$$

প্রশ্নমালা 50

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর [1-10 প্রশ্নের উত্তর মুখে-মুখে বল]:

1. x^3+1 **2.** x^3+8 **3.** $8x^3+1$

4. a^3+64b^3 **5.** $8a^3+27b^3$ **6.** $x^3+(y+z)^3$

7. x^3-1 **8.** a^3-8 **9.** $27-x^3$

10. x^3-125a^3 **11.** $1000-343a^9$ **12.** $(a^2+b^2)^3+8a^3b^3$

13. $x^3-27(x-y)^3$ **14.** $27a^3-8(a+2b)^3$

15. $64(a+b)^3-27(a-b)^3$ **16.** $125(2x+y)^3-216(x-3y)^3$

17. a^6-64 **18.** x^6-y^6

19. $64x^6-1$ **20.** $729a^{12}-1$

21. $x^{12}-y^{12}$ **22.** $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3+z^3$

[সঙ্কেত : প্রদত্ত রাশি $=(x-y)^3+z^3$]

23. $a^3-3a^2b+3ab^2-2b^3$ **24.** $8a^3+12a^2b+6ab^2+9b^3$

25. $27x^3-54x^2y+36xy^2-7y^3$

26. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+c^3+3c^2d+3cd^2+d^3$

27. $2x^4+16x$ **28.** $16a^4b-54ab^4$

29. $15x^7yz-15xy^7z$ **30.** $x^3+y^3+2xy(x+y)$

31. $x^3+a^3-a(x+a)^2+a^2(x+a)$

32. $m^3-n^3-m(m^2-n^2)+n(m-n)^2$. [বো. প্র., 1920]

দ্বাদশ অধ্যায়

গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক (গ. সা. গু.)

(Highest Common Factor. H. C. F.)

[গুণনীয়ক দ্বারা (By factorisation) গ. সা. গু.-নির্ণয়]

116. গুণনীয়ক (Factor)। এক রাশি দ্বারা অপর এক রাশিকে ভাগ করিলে যদি ভাগশেষ না থাকে, তাহা হইলে ভাজক-রাশিকে ভাজ্য-রাশির গুণনীয়ক বা উৎপাদক বলে।

যথা, a abএর গুণনীয়ক। এইরূপ $(a+b)$ (a^2-b^2)এর গুণনীয়ক।

পাটীগণিতে গুণনীয়কের সংজ্ঞা অন্যপ্রকার : এক রাশি দ্বারা অপর এক রাশিকে ভাগ করিলে যদি ভাগফল **অখণ্ড সংখ্যা** (integer) হয়, তাহা হইলে ভাজক-রাশিকে ভাজ্য-রাশির গুণনীয়ক বলে। যথা, 2 6এর গুণনীয়ক, যেহেতু $6 \div 2 = 3$, অর্থাৎ একটি অখণ্ড সংখ্যা। বীজগণিতে a abএর গুণনীয়ক ; কিন্তু $ab \div a$ অর্থাৎ b যে-কোন সংখ্যা হইতে পারে।

মৌলিক গুণনীয়ক (Elementary Factor)। যে গুণনীয়ককে আর কোন গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যায় না, তাহাকে মৌলিক গুণনীয়ক বলে।

যথা, a, b ইহারা প্রত্যেকে abএর মৌলিক গুণনীয়ক ;

a, a, b, c ইহারা প্রত্যেকে a^2bcএর মৌলিক গুণনীয়ক ;

$(a+b), (a-b)$ ইহারা প্রত্যেকে (a^2-b^2)এর মৌলিক গুণনীয়ক।

117. সাধারণ গুণনীয়ক (Common Factor)। দুই বা তদধিক রাশিকে অপর কোন রাশি দ্বারা ভাগ করিলে যদি ভাগশেষ না থাকে, তাহা হইলে শেষোক্ত রাশিকে পূর্ব্বোক্ত রাশিগুলির **সাধারণ গুণনীয়ক (Common factor)** বলে। যথা, m am এবং bm এই উভয়ের সাধারণ গুণনীয়ক।

এইরূপে $a+b$ $a(a+b)$ এবং a^2-b^2এই উভয়ের সাধারণ গুণনীয়ক।

118. গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক (Highest common factor)। দুই বা তদধিক রাশির যতগুলি সাধারণ (common) মৌলিক গুণনীয়ক থাকিতে পারে, উহাদের সকলগুলির ক্রমিক গুণফলকে রাশিগুলির **গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক (Highest common factor)** বা সংক্ষেপে **গ. সা. গু. (H. C. F.)** বলে।

কতকগুলি বীজগণিতীয় রাশির একাধিক সাধারণ মৌলিক গুণনীয়ক থাকিলে এইরূপ দুই বা তদধিক গুণনীয়কের গুণফলও উক্ত বীজগণিতীয় রাশিগুলির এক-একটি সাধারণ গুণনীয়ক হইবে। অতএব গ. সা. গু.-র সংজ্ঞা হইতে স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, যাবতীয় সাধারণ গুণনীয়কসমূহের মধ্যে গ. সা. গু.তেই সাধারণ মৌলিক গুণনীয়কগুলির সংখ্যা বৃহত্তম বা গরিষ্ঠ।

119. বীজগণিতীয় ও পাটীগণিতীয় গ. সা. গু.-এর প্রভেদ।

এস্থলে বীজগণিত এবং পাটীগণিতের মধ্যে পার্থক্য দ্রষ্টব্য। পাটীগণিতে কতকগুলি রাশির সাধারণ গুণনীয়কসমূহের মধ্যে গ. সা. গু.-রই মান বৃহত্তম ; কিন্তু বীজগণিতে গ. সা. গু.-র মৌলিক গুণনীয়কগুলির সংখ্যাই বৃহত্তম, উহার মান বৃহত্তম নাও হইতে পারে। নিম্নে ইহার দৃষ্টান্ত দেওয়া গেল। বস্তুতঃ বীজগণিত এবং পাটীগণিতে গুণনীয়কের সংজ্ঞার পার্থক্যই এই পার্থক্যের কারণ।

উদাহরণ। a^2b এবং ab^2এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

$a^2b = a \times a \times b$;

$ab^2 = a \times b \times b$.

স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, a এবং b, এই দুইটিই প্রদত্ত রাশিদ্বয়ের সাধারণ মৌলিক গুণনীয়ক। অতএব সংজ্ঞানুসারে নির্ণেয় গ. সা. গু. $= a \times b = ab$.

দ্রষ্টব্য। এস্থলে a, b এবং ab এই তিনটি a^2b এবং ab^2এর যাবতীয় সাধারণ গুণনীয়ক; ইহাদের মধ্যে abতেই মৌলিক গুণনীয়কের সংখ্যা বৃহত্তম; কিন্তু abএর মান বৃহত্তম নাও হইতে পারে। যেমন $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$ হইলে $ab = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ হইবে, কাজেই a, b এবং ab, এই তিনটি সাধারণ গুণনীয়কের মধ্যে abএর মান বৃহত্তম হইবে না। অতএব দেখা যাইতেছে যে, বীজগণিতীয় গ. সা. গু. এবং পাটীগণিতীয় গ. সা. গু. সর্ব্বত্র এক নহে। তবে বীজগণিতীয় রাশির সাংখ্য গুণনীয়ক (numerical factor) থাকিলে নিম্নলিখিত রীতিতে রাশিগুলির গ. সা. গু নির্ণয় করা হয়।

গ. সা. গু. = সাংখ্য গুণনীয়কগুলির পাটীগণিতীয় গ. সা. গু. ×
আক্ষরিক অংশসমূহের বীজগণিতীয় গ. সা. গু.।

120. সরলরাশির গ. সা. গু.-নির্ণয়ের নিয়ম।

সংজ্ঞানুসারে কতকগুলি রাশির গ. সা. গু. উহার যাবতীয় সাধারণ মৌলিক গুণনীয়কগুলির গুণফল। অতএব রাশিগুলির অন্তর্গত কোন অক্ষর যতবার উহাদে সাধারণ মৌলিক গুণনীয়করূপে বর্ত্তমান থাকিবে, অক্ষরটির তত ঘাতও গ. সা. গু.তে বর্ত্তমান থাকিবে, অর্থাৎ অক্ষরটির উর্দ্ধতম যে-ঘাত দ্বারা রাশিগুলির প্রত্যেকটি বিভাজ্য, তাহাই গ. সা. গু তে থাকিবে। কাজেই দুই বা তদধিক রাশির উৎপাদকসমূহ জানা থাকিলে সাধারণতঃ নিম্নলিখিত নিয়ম দ্বারা রাশিগুলির গ. সা. গু. নির্ণয় করা যায়।

নিয়ম। প্রদত্ত রাশিসমূহের যাবতীয় সাধারণ অক্ষরগুলি বাছিয়া লও এবং উহাদের যে-যে উর্দ্ধতম ঘাত দ্বারা রাশিসমূহের প্রত্যেকটি বিভাজ্য, তাহা নির্ণয় কর, অর্থাৎ সাধারণ অক্ষরগুলির ক্ষুদ্রতম সূচক-চিহ্নবিশিষ্ট ঘাতগুলি নির্ণয় কর; লব্ধ ঘাতগুলির গুণফলের পূর্ব্বে রাশিসমূহের সংখ্যাসূচক সহগগুলির পাটীগণিতীয় গ.সা.গু. বসাইলেই নির্ণেয় গ. সা. গু. পাই।

উদাহরণ 1. $a^3b^2c^4$, $a^2b^3c^3$ এবং a^2bc^5এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

স্পষ্টতঃ a, b, c অক্ষরগুলি প্রদত্তরাশিগুলির মধ্যে সাধারণ। a, b এবং cএর যে-যে উচ্চতম ঘাত দ্বারা প্রদত্ত রাশিগুলির প্রত্যেকটি বিভাজ্য, তাহারা (অর্থাৎ a, b, cর ক্ষুদ্রতম সূচকবিশিষ্ট ঘাতগুলি) যথাক্রমে a^2, b এবং c^3; রাশিত্রয়ের সংখ্যাসূচক সহগসমূহের গ. সা. গু. $= 1$. $\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $= 1.a^2bc^3 = a^2bc^3$.

উদাহরণ 2. $10a^4x^2$ এবং $15a^3x^5y$এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

10 এবং 15এর গ. সা. গু. = 5 ; a এবং x প্রদত্ত রাশিগুলির সাধারণ অক্ষর এবং উহাদের নিম্নতম সূচকবিশিষ্ট ঘাত যথাক্রমে a^3 এবং x^2.

অতএব নির্ণেয় গ. সা. গু. $= 5a^3x^2$.

উদাহরণ 3. $4x^5y^4z^3$, $6x^4y^3z^4$ এবং $10x^4y^2z^6$এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

4, 6 এবং 10এর গ. সা. গু. = 2.

x, y এবং z ইহারা প্রদত্ত রাশিগুলির সাধারণ অক্ষর এবং ইহাদের নিম্নতম সূচকবিশিষ্ট ঘাতগুলি যথাক্রমে x^4, y^2 এবং z^3.

অতএব নির্ণেয় গ. সা. গু. $= 2x^4y^2z^3$.

প্রশ্নমালা 51 [মৌখিক]

নিম্নলিখিত রাশিগুলির গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. a^2, a^3
2. x^5, x^8
3. a^4, a^3b^2
4. x^3y, x^2
5. x^3y^2, x^2y^3
6. x^2y^5, x^4y^3z
7. m^3n^2p, m^2n^3
8. $a^2b^3c^4, a^3b^2c$
9. $m^2n^3p^4, m^3n^2p^5$
10. $a^7b^5c^{12}, a^{14}b^8c^9$
11. $4a^2bc, 6ab^2c^2$
12. $5x^2y^3z, 10xy^2z^2$
13. $\frac{14}{5}m^2n^3a^5, \frac{21}{10}m^3n^2a^4$
14. $5a^2b^5c^3, 10a^3b^2c^5, 5a^4b^3c^4$
15. $\frac{6}{7}m^2n^3x^5, \frac{3}{14}m^3n^4x^2, \frac{9}{2}m^2n^3x^7$
16. $\frac{4}{5}a^2b^3c^4d^2, \frac{6}{25}a^3b^2c^3d^2, \frac{8}{5}a^4b^2c^4d, \frac{4}{15}a^3b^3c^4d$
17. $14x^4y^2z^3m^2, 7x^3y^3z^4n^3, 21x^2y^3z^5m^2, 35x^3y^5z^3n^4$
18. $12a^2b^3c^4d^3, 6a^3b^2c^3d^5, 15a^4b^3c^2d^5, 27a^3b^7c^4d^2$.

121. গুণনীয়ক দ্বারা মিশ্ররাশিমালার গ. সা. গু.-নির্ণয়। মিশ্ররাশিমালাগুলিকে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করিতে পারিলে পূর্ব্ববর্ত্তী অনুচ্ছেদের নিয়ম-অনুসারে ইহাদের গ. সা. গু. নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ 1. a^2-b^2 এবং $a^2+3ab+2b^2$এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)\ ;$$

$$a^2+3ab+2b^2=(a+b)(a+2b).$$

স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, $(a+b)$ গুণনীয়কটিই একমাত্র সাধারণ গুণনীয়ক।

অতএব নির্ণেয় গ. সা. গু. $= a+b$.

উদাহরণ 2. $2x^2y+4xy^2$, $4x^4y^2-16x^2y^4$ এবং $6xy^2(x^2+5xy+6y^2)$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিলে $2x^2y+4xy^2=2xy(x+2y)$.

$$4x^4y^2-16x^2y^4=4x^2y^2(x^2-4y^2)=4x^2y^2(x+2y)(x-2y).$$

$$6xy^2(x^2+5xy+6y^2)=6xy^2(x+2y)(x+3y).$$

2, 4 এবং 6এর গ. সা. গু. $=2$;

অতএব নির্ণেয় গ. সা. গু. $=2xy(x+2y)$.

122. যে-সকল রাশির গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে, উহাদের অন্ততঃ একটিকে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করিতে পারিলে ইহার গুণনীয়কের সহিত সাধারণ কোন গুণনীয়ক অপর রাশিগুলিতে আছে কিনা পরীক্ষা করিতে পারা যায় এবং গ. সা. গু.-নির্ণয় সহজ হয়।

উদাহরণ 3. $x^2+13x+22$, $x^2-377x-758$ এবং x^2+2xএর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

এস্থলে x^2+2xকে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা সহজ। $x^2+2x=x(x+2)$, ইহাদের মধ্যে x রাশিগুলির সাধারণ গুণনীয়ক হইতে পারে না ; যেহেতু ইহা প্রথম দুইটি রাশির কোনটিরই গুণনীয়ক নহে। কিন্তু ভাগ দ্বারা সহজে দেখা যাইবে যে, $(x+2)$ প্রথম দুইটি রাশিরও গুণনীয়ক।

অতএব নির্ণেয় গ. সা. গু. $=x+2$.

প্রশ্নমালা 52

নিম্নলিখিত রাশিগুলির গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. x^2+x, x^2+2x+1
2. a^2+2a, a^2+3a+2
3. x^2-3x, x^2-9
4. x^2+xy, $xy+y^2$
5. a^2+ab, a^2-b^2
6. $2x^2+x$, $4x^2-1$
7. $2a^2-8b^2$, $4a-8b$
8. a^2-b^2, $a^2+2ab+b^2$
9. $x^2-2xy+y^2$, x^2-y^2
10. $x^2+2xy+y^2$, x^3+y^3
11. x^2-4x+3, x^2-2x+1
12. x^2-5x+6, x^2+2x-8
13. $x^2-2x-24$, $2x^2+9x+4$
14. $2a^2-9a+4$, $3a^2-7a-20$
15. $10a^2+a-21$, $2a^2-13a-24$
16. $a^2b(15a^2-2a-8)$, $ab^2(21a^2-a-10)$

17. $x^2-2xy+y^2,\ x^2-y^2,\ x^3-y^3$

18. $x^2-3x+2,\ x^2-5x+6,\ x^2-x-2$

19. $3a^2-5a+2,\ a^2-5a+4,\ 2a^2-3a+1$

20. $x^2y-xy^2,\ x^4y^2-x^2y^4,\ x^5y-xy^5$

21. $4(a^4-b^4),\ 2(a^4+2a^2b^2+b^4),\ 6(a^4-3a^2b^2-4b^4)$

22. $2x^4+4x^2a^2,\ x^6-7x^4a^2-18x^2a^4,\ 12x^4+27x^2a^2+6a^4$

23. $x^2-17xy-60y^2,\ x^2+29xy+78y^2,\ x^3+3x^2y$

24. $x^6-a^4x^2,\ x^3a-xa^3,\ x^6+x^4a^2-6x^2a^4+4a^6$

25. $x^4y-xy^4,\ x^4+x^2y^2+y^4,\ x^4-6x^3y-5x^2y^2-6xy^3+y^4,$
$2x^4+3x^3y+4x^2y^2+2xy^3+y^4.$

ত্রয়োদশ অধ্যায়

লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক (ল. সা. গু.)

(Lowest Common Multiple. L. C. M.)

[গুণনীয়ক-সাহায্যে (by factorisation) ল. সা. গু.-নির্ণয়]

123. গুণিতক (Multiple)। এক রাশিকে অপর এক রাশি দ্বারা ভাগ করিলে যদি ভাগশেষ না থাকে, তাহা হইলে ভাজ্য-রাশিকে ভাজক-রাশির **গুণিতক (Multiple)** বলে।

যথা, ab aএর গুণিতক

(a^2-b^2) $(a+b)$এর গুণিতক।

পাটীগণিতে গুণিতকের সংজ্ঞা অন্য প্রকার : এক রাশিকে অপর এক রাশির দ্বারা ভাগ করিলে যদি ভাগফল **অখণ্ড সংখ্যা** হয়, তাহা হইলে ভাজ্য-রাশিকে ভাজক-রাশির গুণিতক বলে ; যথা, 6 2র গুণিতক, যেহেতু (6÷2) বা 3, একটি অখণ্ড সংখ্যা ; কিন্তু বীজগণিতে ab aর গুণিতক, যদিও $(ab\div a)$ বা b যে-কোন সংখ্যা হইতে পারে।

যদি কোন রাশিকে দুই বা তদধিক রাশির দ্বারা ভাগ করিলে ভাগশেষ না থাকে, তাহা হইলে প্রথমোক্ত রাশিকে শেষোক্ত রাশিসমূহের **সাধারণ গুণিতক (Common Multiple)** বলে।

যথা, ab a এবং b উভয়ের সাধারণ গুণিতক।

এইরূপ ab ও a^3bএর প্রত্যেকটি a এবং b এই উভয়ের সাধারণ গুণিতক।

124. লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক (Lowest Common Multiple)। দুই বা তদধিক রাশির সাধারণ গুণিতকগুলির মধ্যে যেটিতে মৌলিক গুণনীয়কের সংখ্যা সর্ব্বাপেক্ষা কম, সেইটিকে রাশিগুলির **লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক (Lowest Common Multiple)** বা সংক্ষেপে **ল. সা. গু. (L. C. M.)** বলে।

125. স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, প্রদত্ত রাশিগুলির দ্বারা বিভাজ্য হইতে হইলে কমপক্ষে যতগুলি মৌলিক গুণনীয়ক থাকা দরকার, ল. সা. গু.তে ঠিক ততগুলি মৌলিক গুণনীয়ক থাকিবে।

উদাহরণ 1. a^2b, ab^2, ab^3cএর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$a^2b = a^2 \times b\ ;$$
$$ab^2 = a \times b^2$$
$$ab^3c = a \times b^3 \times c.$$

প্রদত্ত রাশিগুলিতে a, b, c এই তিনটি বিভিন্ন সংখ্যা-সূচক অক্ষর আছে এবং ইহাদের উচ্চতম ঘাত যথাক্রমে a^2, b^3 এবং c, অতএব কোন রাশিকে প্রদত্ত রাশিগুলি দ্বারা বিভাজ্য হইতে হইলে উহাতে অন্ততঃপক্ষে a^2, b^3 এবং c এই গুণনীয়ক তিনটি থাকা দরকার।

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. $= a^2 \times b^3 \times c = a^2b^3c.$

126. বীজগণিতীয় এবং পাটীগণিতীয় ল. সা. গু.-র পার্থক্য।

কতকগুলি রাশির সাধারণ গুণিতকসমূহের মধ্যে পাটীগণিতে ল. সা. গু.-র মান ক্ষুদ্রতম ; কিন্তু বীজগণিতে ল. সা. গু.-র মৌলিক গুণনীয়কের সংখ্যাটি ক্ষুদ্রতম, উহার মান সর্ব্বত্র ক্ষুদ্রতম নাও হইতে পারে। তবে রাশিগুলির মধ্যে সাংখ্য গুণনীয়ক (numerical factor) থাকিলে সাধারণতঃ নিম্নলিখিত রীতিতে উহাদের ল. সা. গু. নির্ণয় করা হয় :

ল. সা. গু. = সাংখ্য গুণনীয়কগুলির পাটীগণিতীয় ল. সা গু. ×
আক্ষরিক অংশসমূহের বীজগণিতীয় ল. সা. গু.।

অতএব কতকগুলি রাশিকে মৌলিক গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করিতে পারা গেলে নিম্নলিখিত নিয়মে উহাদের ল. সা. গু. নির্ণয় করা যায়।

127 সরল রাশিসমূহের ল. সা. গু.-নির্ণয়ের নিয়ম।

রাশিগুলির মধ্যে বিভিন্ন অক্ষরগুলির যে উচ্চতম ঘাত আছে, তাহাদিগকে গুণ

কর। লব্ধ গুণফলের পূর্ব্বে রাশিগুলির সাংখ্য গুণনীয়কসমূহের পাটীগণিতীয় ল. সা. গু. বসাইলেই নির্ণেয় ল. সা. গু. পাইবে।

উদাহরণ 2. $4a^2b^2$ এবং $6ab^3c$এর ল. সা. গু. স্থির কর।

4 এবং 6এর ল. সা. গু. $=12$; প্রদত্ত রাশিগুলিতে a, b, c এই অক্ষরগুলি আছে এবং উহাদের উচ্চতম ঘাত যথাক্রমে a^2, b^3, c.

অতএব নির্ণেয় ল. সা. গু $=12a^2b^3c$.

উদাহরণ 3. $5x^3y^2z, 10x^2y^4z^3$ এবং $3x^5y^3z^2$-এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

5, 10 এবং 3 এর ল. সা. গু. $=30$.

প্রদত্ত রাশিগুলিতে x, y, z এই অক্ষরগুলি আছে এবং ইহাদের উচ্চতম ঘাত যথাক্রমে x^5, y^4 এবং z^3.

অতএব নির্ণেয় ল. সা. গু. $=30x^5y^4z^3$.

প্রশ্নমালা 53 [মৌখিক]

নিম্নলিখিত রাশিগুলির ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. x^5, x^7
2. a^2b, ab^2
3. $2x^2y^3, 4x^3y^2$.
4. $15x^5y^3z^2, 10x^2y^4z^3$
5. $2a^5b^3c, 3a^4b^2c^3$
6. $14m^5n^6p^7, 21m^3n^5p^8$
7. $2a^2b^2, 3ab^3, 6a^3b$
8. $\frac{2}{3}x^3y^2z, \frac{1}{2}x^2y^3z^2, \frac{5}{6}x^4y^2z^3$
9. $2m^2n^3p^4, 5m^3n^2p^7, \frac{4}{3}m^4np^5$
10. $2a^2b^3c^4d^5, 4a^3b^4c^5d^2, 3a^4b^5c^2d^3, 6a^5b^2c^3d^4$
11. $\frac{2}{3}y^3z, \frac{1}{6}z^3x, \frac{1}{8}x^3y, \frac{3}{4}x^2yz, \frac{1}{12}xy^2z, 2xyz^2$
12. $a^2b^3c^2x^4y^2z^3, b^2c^8y^5z^4, c^3a^5z^2x^7, a^4b^5x^3y^6, a^8x^6, b^5y^9, c^7z^7$.

128. গুণনীয়ক দ্বারা মিশ্ররাশিমালার ল. সা. গু.-নির্ণয়।

মিশ্র রাশিমালাগুলিকে মৌলিক গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করিতে পারিলে পূর্ব্ববর্ত্তী অণুচ্ছেদের নিয়মে উহাদের ল. সা. গু. নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ 1. a^2b+ab^2 এবং a^2-b^2 এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$a^2b+ab^2=ab(a+b);$$
$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, প্রদত্ত রাশিমালাদ্বয়ে a, b, $a+b$, $a-b$ ইহারাই বিভিন্ন গুণনীয়কগুলির উচ্চতম ঘাত।

অতএব নির্ণেয় ল. সা. গু. $=ab(a+b)(a-b)$.

উদাহরণ 2. $2a^2b+4ab^2$, $4a^4b^2-16a^2b^4$ এবং $6ab^3(a^2+4ab+4b^2)$এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$2a^2b+4ab^2=2ab(a+2b),$$
$$4a^4b^2-16a^2b^4=4a^2b^2(a^2-4b^2)$$
$$=4a^2b^2(a+2b)(a-2b);$$
$$6ab^3(a^2+4ab+4b^2)=6ab^3(a+2b)^2.$$

2, 4 এবং 6এর ল. সা. গু. $=12$;

স্পষ্টতঃ রাশিগুলিতে a^2, b^3, $(a+2b)^2$, $(a-2b)$ ইহারাই বিভিন্ন গুণনীয়কগুলির উচ্চতম ঘাত।

অতএব নির্ণেয় ল. সা. গু. $=12a^2b^3(a+2b)^2(a-2b)$.

প্রশ্নমালা 54

নিম্নলিখিত রাশিগুলির ল. সা. গু. নির্ণয় কর:

1. a^2+ab, $ab+b^2$

2. a^2b-ab^2, a^3b-ab^3

3. x^2+x, x^2+2x+1

4. x^2+2x, x^2+3x+2

5. a^2-3a, a^2-9

6. $2a^2+a$, $4a^2-1$

7. $2x^2-8y^2$, $4x-8y$

8. $10(a^3b-ab^3)$, $4(a^2b+2ab^2+b^3)$

9. $x^3-2x^2y+xy^2$, x^3-y^3

10. a^2-4a+3, a^2-3a+2

11. a^2+2a-8, a^2-5a+6

12. $a^2-2a-24$, $2a^2+9a+4$

13. $2x^2-9x+4$, $4x^2-8x+3$

14. $10x^2+x-21$, $2x^2-13x-24$

15. $2x^2y(15x^2-2x-8)$, $3xy^2(21x^2-x-10)$.

16. a^2-9, a^2+a-12, a^3-27

17. $a^2+2ab+b^2$, a^2-b^2, a^3+b^3

18. a^2-4a+3, a^2-4a+4, a^2-5a+6

19. $6a^2-ab-b^2$, $3a^2+7ab+2b^2$, $2a^2+3ab-2b^2$

20. $4(x^3-y^3)$, $6(x^4+x^2y^2+y^4)$, $8(x^3+y^3)$

21. $8a^2b^2(2a^2-ab-6b^2)$, $20a^2b^3(3a^2-10ab+8b^2)$, $30ab^4(6a^2+ab-12b^2)$

22. $9x^2-4y^2$, $4x^2-36y^2$, $3x^2-7xy-6y^2$, $6y^2-7xy-3x^2$

23. $x^3-3x^2a+3xa^2-a^3$, $x^3-x^2a-xa^2+a^3$, $x^4-2x^3a+2xa^3-a^4$

24. $27x^4+x$, $87x^2+8x-7$, $27x^3+27x^2+9x+1$. [বো. প্র., 1916.]

25. $9x^4-28x^2+3$, $27x^4-12x^2+1$, $27x^4+6x^2-1$, x^4-6x^2+9.
[ক. প্র., 1886]

129. বিবিধ উদাহরণ।

উদাহরণ 1. (i) প্রমাণ কর যে,

$$(ax+by)^2+(ay-bx)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2).$$

(ii) $(c^2+d^2)(m^2+n^2)$কে দুইটি বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর।

প্রমাণ।

(i) $(ax+by)^2+(ay-bx)^2$

$$=(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)+(a^2y^2-2abxy+b^2x^2)$$

$$=a^2x^2+b^2x^2+a^2y^2+b^2y^2,$$ [সরল করিয়া এবং সাজাইয়া]

$$=(a^2+b^2)x^2+(a^2+b^2)y^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2).$$

(ii) $(c^2+d^2)(m^2+n^2)$

$$=c^2m^2+c^2n^2+d^2m^2+d^2n^2$$

$$=(c^2m^2+2cdmn+d^2n^2)+(c^2n^2-2cdmn+d^2m^2)$$

[$2cdmn$ যোগ এবং পরে বিয়োগ করিয়া]

$$=(cm+dn)^2+(cn-dm)^2.$$

উদাহরণ 2. $a+b+c=0$ হইলে প্রমাণ কর যে,

(i) $a^2-bc=b^2-ca=c^2-ab$;

(ii) $a^3+b^3+c^3=3abc$.

প্রমাণ। (i) $(a^2-bc)-(b^2-ca)$

$$=a^2-bc-b^2+ca$$

$$=(a^2-b^2)+(ca-bc),$$ (পদগুলিকে সাজাইয়া)

$$=(a+b)(a-b)+c(a-b)$$

$$=(a+b+c)(a-b)$$

$$=0\times(a-b)=0.$$ [$\because\ a+b+c=0$]

দুইটি রাশির অন্তরফল শূন্য হইলে রাশি-দুইটি পরস্পর সমান।

$\therefore\ a^2-bc=b^2-ca.$

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, $a^2-bc=c^2-ab.$

অতএব $a^2-bc=b^2-ca=c^2-ab.$

(ii) $a+b+c=0$;

উভয়পক্ষ হইতে $a+b$ বিয়োগ করিলে $c=-(a+b).$

$$\begin{aligned}\therefore\ a^3+b^3+c^3 &= a^3+b^3+\{-(a+b)\}^3\\ &= a^3+b^3-(a+b)^3\\ &= a^3+b^3-\{a^3+b^3+3ab(a+b)\}\\ &= -3ab(a+b)=3ab\{-(a+b)\}=3abc.\end{aligned}$$

উদাহরণ 3. দেখাও যে, $x+y(1+x)+z(1+x)(1+y)$
$=(1+x)(1+y)(1+z)-1.$

বামপক্ষে 1 যোগ এবং পরে বিয়োগ করিলে

$$\begin{aligned}\text{বামপক্ষ} &= 1+x+y(1+x)+z(1+x)(1+y)-1\\ &= \{(1+x)+y(1+x)\}+z(1+x)(1+y)-1\\ &= (1+x)(1+y)+z(1+x)(1+y)-1\\ &= (1+x)(1+y)(1+z)-1.\end{aligned}$$

উদাহরণ 4. $s=a+b+c$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$$(as+bc)(bs+ca)(cs+ab)=(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2.$$

প্রমাণ। $as+bc=a(a+b+c)+bc=a^2+a(b+c)+bc$
$=(a+b)(a+c).$ [অনু. 78 (ক)]

এইরূপ $bs+ca=(b+c)(b+a)$ অর্থাৎ $(a+b)(b+c).$

এবং $cs+ab=(c+a)(c+b)$ অর্থাৎ $(c+a)(b+c).$

গুণ দ্বারা $(as+bc)(bs+ca)(cs+ab)=(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2.$

বিবিধ প্রশ্নমালা (গ)

I

1. a^9+b^9কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

2. দেখাও যে,
$(a+b+c)^2+a^2+b^2+c^2=(b+c)^2+(c+a)^2+(a+b)^2.$

3. যোগ কর: $(a-1)x^4+bx^3+(c-a)x^2-ax-2$;
$(b-a)x^3-(c+b)x^2+(b-a)x+1-bx^4$;
$(b-a+1)x^4-(2b-a)x^3+(a+b)x^2-(b-2a)x+1.$

4. $(x-a), (x-b)$ এবং $(x-c)$এর ক্রমিক গুণফল নির্ণয় কর এবং লব্ধ গুণফল হইতে $(x-4)$এর ঘন নির্ণয় কর।

5. $x^4+5ax^3+(25a-b-29)x^2-5(4a+b-4)x+4b$কে x^2+5x-4 দ্বারা ভাগ কর। [ক. প্র., 1893]

6. $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)+1$কে বর্গের আকারে প্রকাশ কর। [এ. প্র. 1894]

7. $x^2-9, x^2+4x-21, x^3-27$এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

8. $a^2+b^2-c^2+2ab,\ a^2-b^2-c^2-2bc$ এবং $a^2+ab+ac$এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

II

1. প্রমাণ কর যে, $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$
$$=\tfrac{1}{2}[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2].$$
এই সূত্র দ্বারা $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$এর এর মান নির্ণয় কর,

(i) $a=46, b=48, c=52$ হইলে ;

(ii) $a=x+4, b=x+7, c=x+12$ হইলে।

2. $x+y+z=0$ হইলে প্রমাণ কর যে, $x^3+y^3+z^3=3xyz$.

$3s=a+b+c$ হইলে দেখাও যে,

$(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3=3(s-a)(s-b)(s-c)$.

3. $x^{12}-y^{12}$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

4. যোগ কর : $3x^4-12x^3+7x^2-5x-1,\ 3x^2-4x^3-5x^4+3x-2,\ 8x-12x^2+6x^3-1+6x^4,\ -4x^4+10x^3+2x^2-6x+4$.

5. $(ax+by)^2+(ay-bx)^2$ হইতে $(a^2+b^2)(x^2+y^2)$ বিয়োগ কর।

6. $2x^5-11x^4+16x^3-23x^2+32x-16$কে x^2-5x+4 দ্বারা ভাগ কর।

7. কোন ভাগে ভাজক $3x^2-2x+4$, ভাগফল $2x^3-3x^2+2x-4$ এবং ভাগশেষ $3x-7$ হইল। ভাজ্য কত ?

8. সরল কর : $(x^2+px+q-yz)(y-z)+(y^2+py+q-zx)(z-x)+(z^2+pz+q-xy)(x-y)$.

III

1. $a+b+c=15$ এবং $bc+ca+ab=35$ হইলে $a^2+b^2+c^2$এর মান নির্ণয় কর।

2. $1+x+x^2$, $1-x+x^2$ এবং $1-x^2+x^4$এর ক্রমিক গুণফল নির্ণয় কর। [ক. প্র., 1911]

3. যে রাশি x অপেক্ষা y বেশী, উহার দ্বারা x^5+y^5কে ভাগ কর। [পা. প্র., 1889]

4. সরল কর : $(5x+2y)^2-7(5x+2y)(x+y)+10(x+y)^2$.

5. $a^2-b^2+c^2-d^2-2(ac+bd)$কে A^2-B^2 আকারে লিখিয়া গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

6. দেখাও যে, $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3+a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=0$.

7. $6(x^2-y^2)$, $2(x^3+y^3)$, $8(x^2+4xy+3y^2)$এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

8. $x^2-3xy-10y^2$, $x^2+2xy-35y^2$ এবং $x^2-8xy+15y^2$এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর

IV

1. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর : (i) $2a^6-13a^3-24$;
(ii) $x^2-y^2+z^2+2zx$.

2. $a+b+c=0$ হইলে দেখাও যে, $a^2+b^2+c^2=-2(bc+ca+ab)$. ইহা দ্বারা প্রমাণ কর যে, $(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2$
$=2\{(x-y)(x-z)+(y-z)(y-x)+(z-x)(z-y)\}$.

3. প্রমাণ কর যে, $(a+b)^3+(c+d)^3+3(a+b)(c+d)(a+b+c+d)$
$=(a+d)^3+(b+c)^3+3(a+d)(b+c)(a+b+c+d)$.

4. সম্পূর্ণ গুণফল নির্ণয় না করিয়া $(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e)(a'x^4+b'x^3+c'x^2+d'x+e')$এ x^4এর সহগ নির্ণয় কর।

5. $a_1a_2x^2+b_1b_2y^2+c_1c_2z^2+(a_1b_2+a_2b_1)xy+(a_1c_2+a_2c_1)xz+(b_1c_2+b_2c_1)yz$কে $a_2x+b_2y+c_2z$ দ্বারা ভাগ কর।

6. $s=\dfrac{a+b+c}{n}$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$(nas+bc)(nbs+ca)(ncs+ab)=(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2$.

7. জ্যামিতিক চিত্র দ্বারা বুঝাইয়া দাও যে, $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$.

8. $(4x^2-20x+24)$, $(8x^2+192x-648)$ এবং $12x^2-84x+144$এর গ. সা. গু. এবং ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

V

1. দেখাও যে, $a+(1-a)b+(1-a)(1-b)c+(1-a)(1-b)(1-c)d$
$=1-(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$.

2. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর : (i) $x^2-4(y^2-x-1)$;
(ii) $x^2+55x-576$.

3. সরল কর : (i) $x^{m-n}\times x^{n-p}\times x^{p-m}$
(ii) $(x^{m+n})^{m-n}\times(x^{n+p})^{n-p}\times(x^{p+m})^{p-m}$.

4. প্রমাণ কর যে, $3ab(a+b)=(a+b)^3-a^3-b^3$.
$a^3+b^3=40$ এবং $a+b=4$ হইলে $ab=$ কত ?

5. সরল কর : (i) $(b-c)+(c-a)+(a-b)$.
(ii) $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)$.

6. গুণনীয়কের সাহায্যে ভাগ কর :
(i) $(a^2+b^2)^3-8a^3b^3$কে $(a-b)^2$ দ্বারা।
(ii) $x^8+x^4a^4+a^8$কে x^2+xa+a^2 দ্বারা।

7. $4x^2+9y^2+16z^2+12yz+8zx-6xy$কে $2x+3y-4z$ দ্বারা গুণ কর।

8. $(x+y)(x+3y)(x-5y)(x-7y)+64y^4$কে বর্গরূপে প্রকাশ কর।

VI

1. (i) n অখণ্ড সংখ্যা হইলে প্রমাণ কর যে, $(abcd)^n=a^nb^nc^nd^n$.
(ii) সরল কর : $(1-x)^3(1+x)^3(1+x+x^2)^3(1-x+x^2)^3$.

2. $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$কে $(a+b+c)$ দ্বারা গুণ কর।

3. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর :
(i) $(ax+by)^3+(bx+ay)^3$ [ক. প্র., 1926]
(ii) $3(2x+5y)^2+2(2x+5y)(3x+2y)-40(3x+2y)^2$

4. $x(1+y^2)(1+z^2)+y(1+z^2)(1+x^2)+z(1+x^2)(1+y^2)+4xyz$কে $1+xy+yz+zx$ দ্বারা ভাগ কর। [ক. প্র., 1878]

5. প্রমাণ কর যে, $(a-b+c)^3+(a+b-c)^3+6a\{a^2-(b-c)^2\}$
$=(a-xb+xc)^3+(a+xb-xc)^3+6a\{a^2-x^2(b-c)^2\}$

6. জ্যামিতিক প্রণালীতে প্রমাণ কর যে, $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$.

7. $(x-3y)(x-5y)(x-8y)(x-10y)+9y^4$কে A^2-B^2এর আকারে পরিণত কর।

8. $a+b+c=0$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$$b^2+bc+c^2=c^2+ca+a^2=a^2+ab+b^2.$$

উহা দ্বারা প্রমাণ কর যে, $(y-z)^2+(y-z)(z-x)+(z-x)^2$

$$=(z-x)^2+(z-x)(x-y)+(x-y)^2$$
$$=(x-y)^2+(x-y)(y-z)+(y-z)^2.$$

VII

1. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর :

(i) $99a^2-202ab+99b^2$ [এ. প্র., 1914.]

(ii) $x^2(x+a+b)^2+2x(ab+1)(x+a+b)+(a^2-1)(b^2-1)$,

[সঙ্কেত : $x(x+a+b)$এর স্থলে y, $(a+1)(b+1)$এর স্থলে p এবং $(a-1)(b-1)$এর স্থলে q বসাও। তাহা হইলে $p+q=2(ab+1)$ এবং প্রদত্ত রাশি$=y^2+(p+q)y+pq$, ইত্যাদি।]

2. $(x^4-3x^3+4x^2-3x+2)^2$এ x^3 এবং x^4এর সহগ কত (সম্পূর্ণ গুণ না করিয়া) নির্ণয় কর।

3. (i) $x^8+x^6y^2+x^4y^4+x^2y^6+y^8$কে $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$ দ্বারা ভাগ কর।

(ii) $ab(x^2+1)+(a^2+b^2)x$ এবং x^3+1এর গুণফলকে $(x+1)$ এবং $(ax+b)$এর গুণফল দ্বারা ভাগ কর। [মা. প্র., 1894]

4. প্রমাণ কর যে,

(i) $(ax+by)^2+(bx-ay)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2)$

এবং (ii) $(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2+(ax+by+cz)^2$

$$=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$$

5. $x^2+ax-b(a+b)$, $x^2+bx-a(a+b)$ এবং $x^2-(a+b)x+ab$এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

6. সরল কর : $(px-qy+rz)^3+(qy+px-rz)^3+3(px-qy+rz)^2\times(qy+px-rz)+3(px-qy+rz)(qy+px-rz)^2$

7. গ. সা. গু. নির্ণয় কর : $x^2-(a+b)x+(a+1)(b-1)$,
$x^2-(a+c)x+(a+1)(c-1)$ এবং x^2-a^2-2a-1এর।

8. (i) $x+y+z=0$ হইলে প্রমাণ কর যে, $y^2-zx=z^2-xy=x^2-yz$;

(ii) $3s=a+b+c$ হইলে দেখাও যে,

$$(s-a)^2-(s-b)(s-c)=(s-b)^2-(s-c)(s-a)=(s-c)^2-(s-a)(s-b).$$

VIII

1. প্রমাণ কর :

(i) $(x+a)^2+(x+b)^2+(x+c)^2-(x+b)(x+c)-(x+c)(x+a)$
$-(x+a)(x+b)=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab.$

(ii) $(a+x)(a-x)(b-c)+(b+x)(b-x)(c-a)+(c+x)(c-x)(a-b)$
$=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b).$

2. $(a+1)^2x^3+(a+1)x^2+a^2(a-1)x-a^5$কে $(a+1)x-a^2$ দ্বারা ভাগ কর। [মা. প্র., 1899]

3. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর :

(i) $x^2(2x+y)^2-15xy(2x+y)(x+2y)-54y^2(x+2y)^2$; [বো প্র., 1906]

(ii) $x^4-11x^2y^2+y^4$; [এ. প্র., 1864]

(iii) $x^4+2x^2+9.$

4. $x+y+z=1$ হইলে প্রমাণ কর যে,

(i) $(x+yz)(y+zx)(z+xy)=(y+z)^2(z+x)^2(x+y)^2=$
$(1-x)^2(1-y)^2(1-z)^2$;

(ii) $(x+yz)(y+z)=(y+zx)(z+x)=(z+xy)(x+y)=$
$(y+z)(z+x)(x+y)=(1-x)(1-y)(1-z).$

5. $yz+zx+xy=1$ হইলে প্রমাণ কর যে,

(i) $(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)=(y+z)^2(z+x)^2(x+y)^2$;

(ii) $(1-yz)(1-zx)(1-xy)=xyz(y+z)(z+x)(x+y).$

6. (i) জ্যামিতিক প্রণালীতে প্রমাণ কর যে, $(a+b)^2-2ab=a^2+b^2.$

(ii) $(5x+3y)^2-2(3x+2y)(2x+y)$কে a^2+b^2এর আকারে প্রকাশ কর।

7. (i) $2a^2-3a-35$, $6a^2+5a-56$ এবং $8a^3+24a^2-16a-7$এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

(ii) $x^2-(a-b)x-ab$, $x^2+(a-b)x-ab$, x^2-a^2 এবং x^2-b^2এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

8. দেখাও যে, (i) $(y+z-2x)^3+(z+x-2y)^3+(x+y-2z)^3$
$=3(y+z-2x)(z+x-2y)(x+y-2z)$

এবং (ii) $(ax+by+cz)^3+(cx-by+az)^3$
$(a+c)(x+z)$ দ্বারা বিভাজ্য।

চতুর্দ্দশ অধ্যায়

সহজ ভগ্নাংশ (Easy Fraction)

130. বীজগণিতীয় ভগ্নাংশ (Algebraic Fraction)। পাটীগণিত এবং বীজগণিতে ভগ্নাংশ লিখিবার প্রণালী একই প্রকার। যে-কোন রাশি aকে অপর যে-কোন রাশি b দ্বারা ভাগ করিলে যে-সম্পূর্ণ ভাগফল পাওয়া যায়, উহাকেই $\frac{a}{b}$ ভগ্নাংশ-রূপে লিখিত হয়। অর্থাৎ $\frac{a}{b}=a \div b.$

ভাগের সংজ্ঞানুসারে $\frac{a}{b} \times b=a.$ অতএব $\frac{a}{b}$ ভগ্নাংশটি দ্বারা এরূপ একটি রাশি বুঝায়, যাহাকে b দ্বারা গুণ করিলে গুণফল a হয়।

$\frac{a}{b}$ ভগ্নাংশটিতে aকে **লব (numerator)** এবং bকে **হর (denominator)** বলা হয়।

$\frac{1}{2}$, $\frac{-2}{3}$, $\frac{3\frac{1}{2}-b}{a-5}$, $\frac{2x+3a}{7y+4b}$, ইহারা এক-একটি ভগ্নাংশ।

দ্রষ্টব্য। ভগ্নাংশের উল্লিখিত বীজগণিতীয় সংজ্ঞা পাটীগণিতেও প্রয়োগ করা চলে। যথা, $\frac{2}{3}=2 \div 3$; $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}.$

131. (i) মনে কর, $\frac{a}{b}$ যে-কোন ভগ্নাংশ এবং x যে-কোন একটি রাশি।

প্রমাণ করিতে পারা যায় যে, $\frac{a}{b}=\frac{ax}{bx}.$

প্রমাণ। $\frac{a}{b}$কে c ধরিলে ভগ্নাংশের সংজ্ঞা হইতে $cb=a$;

উভয় পক্ষকে x দ্বারা গুণ করিলে $cbx=ax$;

এখন উভয় পক্ষকে bx দ্বারা ভাগ করিলে $c=\frac{ax}{bx}$

অর্থাৎ $\frac{a}{b}=\frac{ax}{bx}.$

অতএব **কোন ভগ্নাংশের লব এবং হর উভয়কে একই রাশি দ্বারা গুণ করিলে ভগ্নাংশটির মানের কোন পরিবর্ত্তন হয় না।**

(ii) পূর্ব্বেই প্রমাণিত হইয়াছে যে, $\frac{a}{b}=\frac{ax}{bx}$; অতএব $\frac{ax}{bx}=\frac{a}{b}$.

কিন্তু $a=ax\div x$ এবং $b=bx\div x$.

অতএব $\frac{ax}{bx}=\frac{ax\div x}{bx\div x}$.

অতএব **কোন ভগ্নাংশের লব এবং হর উভয়কে একই রাশি দ্বারা ভাগ করিলে ভগ্নাংশের মানের কোন পরিবর্ত্তন হয় না।**

132. ভগ্নাংশের চিহ্ন-বিষয়ক নিয়ম।

সংজ্ঞানুসারে ভগ্নাংশ = লব ÷ হর। অতএব (52 অণুচ্ছেদে প্রদত্ত) ভাগফলের চিহ্ন-বিষয়ক নিয়ম দ্বারা ভগ্নাংশের চিহ্ন নির্ণয় করা যায়। যথা,

(1) $\frac{+a}{+b}=(+a)\div(+b)=+\frac{a}{b}$.

(2) $\frac{-a}{-b}=(-a)\div(-b)=a\div b=+\frac{a}{b}$.

(3) $\frac{-a}{+b}=(-a)\div(+b)=-(a\div b)=-\frac{a}{b}$.

(4) $\frac{+a}{-b}=(+a)\div(-b)=-(a\div b)=-\frac{a}{b}$.

(1), (2), (3) এবং (4)-চিহ্নিত ফলগুলি হইতে ভগ্নাংশের চিহ্ন-বিষয়ক নিম্নলিখিত নিয়মগুলি পাওয়া যায়ঃ

(1) কোন ভগ্নাংশের লব এবং হর উভয়ের চিহ্ন পরিবর্ত্তন করিলে ভগ্নাংশের চিহ্ন পরিবর্ত্তিত হয় না।

(2) কোন ভগ্নাংশে শুধু লব কিংবা শুধু হরের চিহ্ন পরিবর্ত্তন করিলে ভগ্নাংশেরও চিহ্ন পরিবর্ত্তিত হয়।

উদাহরণ 1. (i) $\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}$. [লব এবং হর উভয়ের চিহ্ন-পরিবর্ত্তন দ্বারা]

(ii) $\frac{-5}{6}=-\frac{5}{6}$. [লবের চিহ্ন-পরিবর্ত্তন দ্বারা]

(iii) $\frac{2}{-3}=-\frac{2}{3}$ [হরের চিহ্ন-পরিবর্ত্তন দ্বারা]

(iv) $-\frac{b-a}{c}=\frac{a-b}{c}$ [লবের চিহ্ন-পরিবর্ত্তন দ্বারা]

(v) $\frac{y-x}{b-a}=\frac{x-y}{a-b}$. [লব এবং হর উভয়ের চিহ্ন-পরিবর্ত্তন দ্বারা]

133. ভগ্নাংশের লঘিষ্ঠ আকার।(Fraction reduced to the lowest terms)।

পূর্ব্বেই প্রমাণিত হইয়াছে যে, কোন ভগ্নাংশের লব এবং হর উভয়কে একই রাশি দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে উহার মানের কোন পরিবর্ত্তন হয় না ; সুতরাং এইরূপ প্রক্রিয়া দ্বারা একই ভগ্নাংশকে নানা আকারে লিখা যায়। যে আকারে ভগ্নাংশটির লব এবং হরের কোন সাধারণ গুণনীয়ক থাকে না, সেই আকারকে উহার **লঘিষ্ঠ আকার** বলে। অতএব কোন ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করিতে হইলে উহার লব এবং হর উভয়কে উহাদের যাবতীয় সাধারণ গুণনীয়কগুলি দ্বারা (অর্থাৎ উহাদের গ. সা. গু. দ্বারা) ভাগ করিতে হয়।

উদাহরণ 1. $\frac{8a^4b^3}{12a^3b^4}$কে লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্ত্তিত কর।

$8a^4b^3$ এবং $12a^3b^4$এর গ. সা. গু. $=4a^3b^3$.

অতএব $\frac{8a^4b^3}{12a^3b^4}=\frac{8a^4b^3\div 4a^3b^3}{12a^3b^4\div 4a^3b^3}=\frac{2a}{3b}$ উত্তর।

অথবা লব এবং হর উভয়কে মৌলিক গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর এবং পরে উহাদের সাধারণ গুণনীয়কগুলি এক-একটি করিয়া অপসারিত কর :

$$\frac{8a^4b^3}{12a^3b^4}=\frac{\overset{2}{\cancel{8}}a^4b^3}{\underset{3}{\cancel{12}}a^3b^4}=\frac{2a}{3b} \text{ উত্তর।}$$

ব্যাখ্যা। এস্থলে প্রথমে লব এবং হরের সংখ্যা-সূচক সহগ 8 এবং 12কে উহাদের গ. সা. গু. 4 দ্বারা ভাগ করিয়া লবে 2 এবং হরে 3 পাওয়া গেল। এখন লবের a^4 এবং হরের a^3কে উহাদের গ. সা. গু. a^3 দ্বারা ভাগ করিয়া লবে a পাওয়া গেল, পরে লবের b^3 এবং হরের b^4কে উহাদের গ. সা. গু. b^3 দ্বারা ভাগ করিয়া হরে b পাওয়া গেল। অতএব লব এবং হরের যাবতীয় সাধারণ গুণনীয়ক অপসারিত করিয়া সর্ব্বশেষে লবে থাকিল $2a$ এবং হরে থাকিল $3b$.

উদাহরণ 2. $\dfrac{-9x^4y^5z^2}{21x^7y^6z}$কে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত কর।

$$\frac{-9x^4y^5z^2}{21x^7y^6z} = -\frac{\overset{3}{9}x^4y^5z^2}{\underset{7}{21}x^7y^6z}$$ [চিহ্ন-বিষয়ক নিয়ম দ্বারা]

$$= -\frac{3z}{7x^3y}$$ উত্তর।

উদাহরণ 3. $\dfrac{a^3b-ab^3}{a^2b^2+3ab^3+2b^4}$কে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত কর।

প্রদত্ত ভগ্নাংশ $= \dfrac{ab(a^2-b^2)}{b^2(a^2+3ab+2b^2)}$

$$= \frac{ab(a+b)(a-b)}{b^2(a+b)(a+2b)} = \frac{a(a-b)}{b(a+2b)}$$ উত্তর।

উদাহরণ 4. $\dfrac{(3x^2-15x+18)(4x^2-12x-16)}{(16x^2-56x+24)(6x^2-36x+48)}$কে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত কর।

লব $= 3(x^2-5x+6).4(x^2-3x-4)$
$= 3.4(x-2)(x-3)(x+1)(x-4)$;

হর $= 8(2x^2-7x+3).6(x^2-6x+8)$
$= 8.6(2x-1)(x-3)(x-2)(x-4)$;

অতএব প্রদত্ত ভগ্নাংশ $= \dfrac{3.4(x-2)(x-3)(x+1)(x-4)}{\underset{2.2}{8.6}(2x-1)(x-3)(x-2)(x-4)}$

$$= \frac{(x+1)}{4(2x-1)}$$ উত্তর।

দ্রষ্টব্য। লব এবং হরে বহু সাধারণ উৎপাদক থাকিলে উহাদিগকে লাইন টানিয়া কাটিয়া দেওয়াই সুবিধাজনক। তবে লাইনগুলি এরূপে টানিবে, যেন উৎপাদকের অঙ্কগুলি পাঠ করিতে অসুবিধা না হয়।

প্রশ্নমালা 55

লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত কর :

1. $\frac{ab}{a^2}$ 2. $\frac{2a^2}{a^3}$ 3. $\frac{x^3}{2x^2}$ 4. $\frac{2a^4}{6a^3}$ 5. $\frac{2a^2b}{4ab^2}$

6. $\frac{3x^2y^3}{6x^2y^2}$ 7. $\frac{abc}{a^2bc}$ 8. $\frac{4x^2yz}{8xy^2z}$ 9. $\frac{6a^2b^3c^4}{10a^3b^2c^4}$

10. $\frac{-14l^2m^3n^2}{21l^3m^2n}$ 11. $\frac{-15p^3q^2s^5}{-5p^2q^3s^4}$ 12. $\frac{-22a^6x^4y^2}{33a^4x^2y^3}$

13. $\frac{-60a^4c^8x^3}{75a^6c^6x^5}$ 14. $\frac{(a^2+ab)}{(ab+b^2)}$ 15. $\frac{x^3y^2+x^2y^3}{x^2y^4+xy^5}$

16. $\frac{a^2bc^2+ab^2c^2}{-(a^3b^2c+a^2b^3c)}$ 17. $\frac{-2x^2yz+8a^2yz}{4xyz-8ayz}$ 18. $\frac{a-a^2+a^3}{1+a^3}$

19. $\frac{a+a^2+a^3}{1-a^3}$ 20. $\frac{9x^2-4a^2}{-9x^2+6xa}$ 21. $\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$

22. $\frac{x^3-xy^2}{x^3-y^3}$ 23. $\frac{x^3+8}{x^4-2x^3+4x^2}$ 24. $\frac{x^2-8x+15}{x^2-9x+18}$

25. $\frac{x^2-(a+b)x+ab}{x^2-(a+c)x+ac}$ 26. $\frac{(x+y)(x^2-y^2)}{(x^2+2xy+y^2)(x-2y)}$

27. $\frac{(x^2-4)(x^3+8)}{(x^3-8)(x^2+4x+4)}$ 28. $\frac{x^3-2x^2y+xy^2}{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3}$

29. $\frac{x^2+y^2-z^2+2xy}{x^2-y^2-z^2-2yz}$ 30. $\frac{(a+b)^2-(c+d)^2}{(a+d)^2-(b+c)^2}$

31. $\frac{(x^2-4)(3x-x^2)}{(x^2-5x+6)(x^2+3x+2)}$ 32. $\frac{(x^2-3x+2)(x^2-5x+6)}{(x^3-4x^2+3x)(x^2-4x+4)}$

33. $\frac{(a^4-13a^2+36)}{(a^2+5a+6)(3a^2-7a+2)}$ 34. $\frac{(6a^2-7a+2)(a^2-4a+3)}{(3a^2-11a+6)(2a^2-a-1)}$

35. $\frac{(4a^2+7a-15)(2a^2-7a-15)(4a^2-1)}{(8a^2+2a-15)(2a^2+5a-3)(a^2-25)}$

134 দুই বা তদধিক ভগ্নাংশকে সাধারণ-হরবিশিষ্ট করার নিয়ম।

পাটীগণিতের মত বীজগণিতেও ভগ্নাংশের যোগ এবং বিয়োগে উহাদিগকে সাধারণ হরবিশিষ্ট করিয়া লইতে হয়। এরূপস্থলে ভগ্নাংশগুলিকে লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট করাই সুবিধাজনক। নিম্নে ইহার নিয়ম প্রদত্ত হইল।

নিয়ম। বিভিন্ন হরবিশিষ্ট দুই বা তদধিক ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট করিতে হইলে প্রথমে উহাদিগকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করিয়া প্রাপ্ত হরগুলির ল. সা. গু. নির্ণয় কর এবং ভগ্নাংশগুলির প্রত্যেকটির হর দ্বারা এই ল. সা. গু.কে ভাগ করিলে যে ভাগফল পাওয়া যায়, তদ্দ্বারা ভগ্নাংশটির লব ও হর উভয়কে গুণ কর।

পূর্ব্ববর্ত্তী অণুচ্ছেদ হইতে এই নিয়মের যুক্তি বুঝা যাইবে।

উদাহরণ 1. $\frac{x}{3a}$, $\frac{y}{4b}$ এবং $\frac{z}{6c}$কে লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট কর।

এস্থলে ভগ্নাংশগুলি লঘিষ্ঠ আকারে আছে। (ইহাদের হরগুলির অর্থাৎ) $3a$, $4b$ এবং $6c$এর ল. সা. গু. $=12abc$.

$12abc \div 3a = 4bc$; $\therefore$ $\frac{x}{3a}=\frac{x\times 4bc}{3a\times 4bc}=\frac{4xbc}{12abc}$; [131 অণু.]

$12abc \div 4b = 3ca$; $\therefore$ $\frac{y}{4b}=\frac{y\times 3ca}{4b\times 3ca}=\frac{3yca}{12abc}$;

$12abc \div 6c = 2ab$; $\therefore$ $\frac{z}{6c}=\frac{z\times 2ab}{6c\times 2ab}=\frac{2zab}{12abc}$;

অতএব $\frac{4xbc}{12abc}$, $\frac{3yca}{12abc}$, $\frac{2zab}{12abc}$ই ভগ্নাংশগুলির নির্ণেয় আকার।

উদাহরণ 2. $\frac{2x}{x+y}$, $\frac{y}{x-y}$, $\frac{5xyz(x^2-1)}{10xy(x^2-y^2)}$ এবং zকে লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট কর।

এস্থলে প্রথম দুইটি ভগ্নাংশ লঘিষ্ঠ আকারেই আছে ; তৃতীয় ভগ্নাংশটিকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করিলে উহা $\frac{z(x^2-1)}{2(x^2-y^2)}$ হইবে। zকে $\frac{z}{1}$ এই ভগ্নাংশরূপে লেখা যায়। অতএব লঘিষ্ঠ আকারে রাখিলে প্রদত্ত ভগ্নাংশগুলি যথাক্রমে

$\frac{2x}{x+y}$, $\frac{y}{x-y}$, $\frac{z(x^2-1)}{2(x^2-y^2)}$ এবং $\frac{z}{1}$ হইবে।

ইহাদের হরগুলির অর্থাৎ $x+y$, $x-y$, $2(x^2-y^2)$ এবং 1এর ল. সা. গু.

$$=2(x^2-y^2).$$

এখন $2(x^2-y^2)\div(x+y)=2(x-y)$;

$$\therefore \quad \frac{2x}{x+y}=\frac{2x\times 2(x-y)}{(x+y)\times 2(x-y)}=\frac{4x(x-y)}{2(x^2-y^2)}. \qquad [\text{131 অনু.}]$$

$2(x^2-y^2)\div(x-y)=2(x+y)$;

$$\therefore \quad \frac{y}{x-y}=\frac{y\times 2(x+y)}{(x-y)\times 2(x+y)}=\frac{2y(x+y)}{2(x^2-y^2)}.$$

$2(x^2-y^2)\div 2(x^2-y^2)=1$,

$$\therefore \quad \frac{z(x^2-1)}{2(x^2-y^2)}=\frac{z(x^2-1)\times 1}{2(x^2-y^2)\times 1}=\frac{z(x^2-1)}{2(x^2-y^2)}.$$

$2(x^2-y^2)\div 1=2(x^2-y^2)$;

$$\therefore \quad \frac{z}{1}=\frac{z\times 2(x^2-y^2)}{1\times 2(x^2-y^2)}=\frac{2z(x^2-y^2)}{2(x^2-y^2)}.$$

অতএব লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট হইলে ভগ্নাংশগুলি যথাক্রমে

$$\frac{4x(x-y)}{2(x^2-y^2)},\ \frac{2y(x+y)}{2(x^2-y^2)},\ \frac{z(x^2-1)}{2(x^2-y^2)} \text{ এবং } \frac{2z(x^2-y^2)}{2(x^2-y^2)} \text{ হইবে।}$$

উদাহরণ 3. $\dfrac{1}{x^2-8x+15}$, $\dfrac{1}{x^2-9x+20}$, $\dfrac{1}{x^2-7x+12}$কে লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট কর।

হরগুলিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিলে

$$x^2-8x+15=(x-3)(x-5)\,;$$
$$x^2-9x+20=(x-5)(x-4)\,;$$
$$x^2-7x+12=(x-4)(x-3)\,;$$

হরগুলির ল. সা. গু. $=(x-3)(x-4)(x-5)$ এবং ইহাকে হরগুলি দ্বারা ভাগ করিলে যথাক্রমে $x-4$, $x-3$ এবং $x-5$ ভাগফল পাওয়া যায়।

অতএব $\dfrac{1}{x^2-8x+15}=\dfrac{1\times(x-4)}{(x^2-8x+15)(x-4)}=\dfrac{x-4}{(x-3)(x-4)(x-5)}$

ইত্যাদি।

প্রশ্নমালা 56

লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট কর :

1. $\frac{a}{2}, \frac{b}{3}, \frac{c}{4}$. 2. $\frac{2x}{3}, \frac{5y}{6}, \frac{3z}{4}$ 3. $\frac{2x}{3}, \frac{3y}{5}, \frac{7z}{12}$

4. $\frac{x}{2}, \frac{2}{y}, \frac{z}{3}$ 5. $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 6. $\frac{a}{bc}, \frac{b}{ca}, \frac{c}{ab}$

7. $\frac{b-c}{a}, \frac{c-a}{b}, \frac{a-b}{c}$ 8. $\frac{b+c}{bc}, \frac{c+a}{ca}, \frac{a+b}{ab}$

9. $\frac{(b-c)}{b^2c^2}, \frac{(c-a)}{c^2a^2}, \frac{(a-b)}{a^2b^2}$ 10. $\frac{2x}{y+z}, \frac{3y}{y-z}, \frac{4z}{y^2-z^2}$

11. $\frac{3x^2}{x(y-z)}, \frac{2y^2z}{yz(y+z)}, \frac{4z^2}{x(y^2-z^2)}$

12. $\frac{3}{x+y}, \frac{2y}{x^2-xy+y^2}, \frac{x^2}{x^3+y^3}$

13. $\frac{2(a+b)}{a^2-b^2}, \frac{3x}{a^2+ab+b^2}, \frac{4a^2}{a^3-b^3}$

14. $\frac{1}{a^3+b^3}, \frac{1}{a^4+a^2b^2+b^4}, \frac{1}{a^3-b^3}$

15. $\frac{2x}{a^2-3a+2}, \frac{3y}{a^2-5a+6}, \frac{4z}{a^2-4a+3}$

16. $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}, \frac{b^2}{(b-c)(b-a)}, \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

[সঙ্কেতঃ হরগুলি যথাক্রমে $-(a-b)(c-a)$, $-(b-c)(a-b)$ এবং $-(c-a)(b-c)$.]

17. $\frac{yz}{(z-x)(x-y)}, \frac{zx}{(x-y)(y-z)}, \frac{xy}{(y-z)(z-x)}$

18. $\frac{x+a}{x^2+(b+c)x+bc}, \frac{x+b}{x^2+(c+a)x+ca}, \frac{x+c}{x^2+(a+b)x+ab}$

19. $\frac{(y+z)}{x(x+y+z)+yz}, \frac{(z+x)}{y(x+y+z)+zx}, \frac{(x+y)}{z(x+y+z)+xy}$

20. $\frac{1}{x^2-5xy+4y^2}, \frac{1}{2x^2-xy-y^2}, \frac{1}{2x^2-7xy-4y^2}$

ভগ্নাংশের যোগ এবং বিয়োগ

135. 67 অণুচ্ছেদে প্রমাণিত হইয়াছে যে,

$$\frac{a+b+c+\cdots\cdots}{x}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x}+\cdots\cdots$$

বিপরীতক্রমে $\frac{a}{x}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x}+\cdots\cdots=\frac{a+b+c+\cdots\cdots}{x}.$

এইরূপে $\frac{a}{x}-\frac{b}{x}+\frac{c}{x}+\cdots\cdots=\frac{a-b+c+\cdots\cdots}{x}.$

অতএব ভগ্নাংশের যোগের নিম্নলিখিত নিয়ম পাওয়া গেল :

নিয়ম। সাধারণ হরবিশিষ্ট কতকগুলি ভগ্নাংশের লবগুলির বীজগণিতীয় সমষ্টিকে লব এবং সাধারণ হরটিকে হর করিলে যে ভগ্নাংশ পাওয়া যায়, উহাই ভগ্নাংশগুলির যোগফল।

ভগ্নাংশগুলি সাধারণ হরবিশিষ্ট না হইলে উহাদিগকে প্রথমে লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট করিয়া উল্লিখিত নিয়মে উহাদিগের যোগফল নির্ণয় করিবে এবং সকল স্থলে প্রাপ্ত যোগফলকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করিয়া রাখিবে।

দ্রষ্টব্য। যোগ করিবার পূর্ব্বে প্রত্যেক ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করিবে।

উদাহরণ 1. (i) $\frac{3x}{20}+\frac{7x}{20}+\frac{9x}{20}=\frac{3x+7x+9x}{20}=\frac{19x}{20}.$

(ii) $\frac{3a}{14x}-\frac{5a}{14x}+\frac{9a}{14x}=\frac{3a}{14x}+\frac{-5a}{14x}+\frac{9a}{14x}$

$=\frac{3a-5a+9a}{14x}=\frac{7a}{14x}=\frac{a}{2x}.$ [সরল করিয়া]

(iii) $\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-a}=\frac{a}{a-b}+\frac{b}{-(a-b)}$

$=\frac{a}{a-b}+\frac{-b}{a-b}=\frac{a-b}{a-b}=1.$

(iv) $\frac{b+c}{ac}-\frac{b-c}{ac}=\frac{(b+c)}{ac}+\frac{-(b-c)}{ac}$ [132 অণু.]

$=\frac{(b+c)-(b-c)}{ac}=\frac{b+c-b+c}{ac}=\frac{2c}{ac}=\frac{2}{a}$

দ্রষ্টব্য। একাধিক পদবিশিষ্ট লব থাকিলে সম্পূর্ণ লবটিকে প্রথমে একটি বন্ধনীর মধ্যে স্থাপিত করিবে। তাহা না করিলে ভুলের সম্ভাবনা থাকে।

যথা, $-\dfrac{b-c}{ac}=\dfrac{-(b-c)}{ac}$, [লবের চিহ্ন-পরিবর্তন করিয়া]।

কিন্তু $-\dfrac{b-c}{ac}$কে $\dfrac{-b-c}{ac}$ লিখিলে ভুল হইবে।

উদাহরণ 2. সরল কর : $\dfrac{2x}{5}+\dfrac{3x}{10}+\dfrac{7x}{15}$.

হরগুলির অর্থাৎ 5, 10 এবং 15 এর ল. সা. গু. = 30.

$\dfrac{2x}{5}+\dfrac{3x}{10}+\dfrac{7x}{15}=\dfrac{12x}{30}+\dfrac{9x}{30}+\dfrac{14x}{30}$

[ভগ্নাংশগুলিকে লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট করিয়া]

$=\dfrac{12x+9x+14x}{30}=\dfrac{35x}{30}=\dfrac{7x}{6}$. [সরল করিয়া]

উদাহরণ 3. সরল কর : $\dfrac{a}{4x}-\dfrac{b}{6x}+\dfrac{c}{8x}$.

হরগুলির অর্থাৎ $4x$, $6x$, $8x$এর ল. সা. গু. $=24x$.

প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{6a}{24x}-\dfrac{4b}{24x}+\dfrac{3c}{24x}$ [লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট করিয়া]

$=\dfrac{6a}{24x}+\dfrac{-4b}{24x}+\dfrac{3c}{24x}$, [132 অনু.]

$=\dfrac{6a-4b+3c}{24x}$.

উদাহরণ 4. সরল কর : $\dfrac{3}{x^2-5x+6}-\dfrac{5}{x^2-4x+3}+\dfrac{2}{x^2-3x+2}$.

হরগুলিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিলে

প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{3}{(x-2)(x-3)}-\dfrac{5}{(x-1)(x-3)}+\dfrac{2}{(x-1)(x-2)}$.

হরগুলির ল. সা. গু. $=(x-1)(x-2)(x-3)$.

এখন ভগ্নাংশগুলিকে লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট করিয়া লইলে

প্রদত্ত রাশিটি

$$=\frac{3(x-1)}{(x-1)(x-2)(x-3)}-\frac{5(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}+\frac{2(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)}\cdots(A)$$

$$=\frac{3(x-1)-5(x-2)+2(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$=\frac{3x-3-5x+10+2x-6}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$=\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$ [সরল করিয়া]

দ্রষ্টব্য। সাধারণতঃ (A)-চিহ্নিত ধাপটি (stepটি) লিখিত হয় না।

উদাহরণ 5. সরল কর : $\frac{2a-2}{a^2-3a+2}-\frac{3a-9}{a^2-a-6}+\frac{a^2-10a}{(a^3-4a)}$.

ভগ্নাংশযুক্ত রাশিমালা সরল করিতে অথবা কতকগুলি ভগ্নাংশের যোগফল নির্ণয় করিতে হইলে প্রথমেই প্রত্যেক ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করিয়া লইতে হয়।

লব এবং হরকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিয়া

প্রদত্ত রাশিটি $=\frac{2(a-1)}{(a-1)(a-2)}-\frac{3(a-3)}{(a+2)(a-3)}+\frac{a(a-10)}{a(a+2)(a-2)}$

$$=\frac{2}{a-2}-\frac{3}{a+2}+\frac{(a-10)}{(a+2)(a-2)}$$

[ভগ্নাংশগুলিকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করিয়া]

$$=\frac{2(a+2)-3(a-2)+(a-10)}{(a+2)(a-2)}$$

[লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট করিয়া যোগ দ্বারা]

$$=\frac{2a+4-3a+6+a-10}{(a+2)(a-2)}=\frac{0}{(a+2)(a-2)}=0.$$

উদাহরণ 6. সরল কর :

$$\frac{b+c}{a^2-(b+c)a+bc}+\frac{c+a}{b^2-(c+a)b+ca}+\frac{a+b}{c^2-(a+b)c+ab}.$$

হরগুলিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিলে

$a^2-(b+c)a+bc=(a-b)(a-c)=-(a-b)(c-a)$;

$b^2-(c+a)b+ca=(b-c)(b-a)=-(b-c)(a-b)$;

$c^2-(a+b)c+ab=(c-a)(c-b)=-(c-a)(b-c)$;

অতএব উহাদের ল. সা. গু. $=(a-b)(b-c)(c-a)$.

$$\therefore \text{ প্রদত্ত রাশি} = \frac{(b+c)}{-(a-b)(c-a)} + \frac{(c+a)}{-(b-c)(a-b)} + \frac{(a+b)}{-(c-a)(b-c)}$$

$$= \frac{-(b^2-c^2)-(c^2-a^2)-(a^2-b^2)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

[লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট করিয়া যোগ দ্বারা]

$$= \frac{-b^2+c^2-c^2+a^2-a^2+b^2}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{0}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0.$$

উদাহরণ 7. সরল কর : $\frac{1}{x-2y} + \frac{1}{x+2y} + \frac{2x}{x^2+4y^2}$.

কতকগুলি ভগ্নাংশের যোগফল-নির্ণয়ে কখন-কখন উহাদিগকে সুবিধাজনকভাবে সজ্জবদ্ধ করিয়া যোগ করিলে সহজে উত্তর পাওয়া যায়। এস্থলে প্রথম দুইটি ভগ্নাংশের যোগফলের সহিত তৃতীয় ভগ্নাংশটি যোগ করা সুবিধাজনক।

$$\frac{1}{x-2y} + \frac{1}{x+2y} = \frac{(x+2y)+(x-2y)}{(x-2y)(x+2y)} = \frac{2x}{x^2-4y^2}.$$

অতএব $\frac{1}{x-2y} + \frac{1}{x+2y} + \frac{2x}{x^2+4y^2} = \frac{2x}{x^2-4y^2} + \frac{2x}{x^2+4y^2}$

$$= \frac{2x(x^2+4y^2)+2x(x^2-4y^2)}{(x^2-4y^2)(x^2+4y^2)}$$

$$= \frac{2x^3+8xy^2+2x^3-8xy^2}{x^4-16y^4} = \frac{4x^3}{x^4-16y^4}.$$

প্রশ্নমালা 57

সরল কর [1-10 প্রশ্নের উত্তর মুখে-মুখে বল] :

1. $\frac{2x}{5} + \frac{3x}{5}$ 2. $\frac{4a}{7} + \frac{2a}{7} + \frac{a}{7}$ 3. $\frac{2}{a} + \frac{3}{a}$ 4. $\frac{5}{x} - \frac{3}{x}$

5. $\frac{7x}{9a} - \frac{5x}{9a}$ 6. $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}$ 7. $\frac{2a+b}{a-b} - \frac{a+2b}{a-b}$

8. $\frac{x}{4} + \frac{x}{8}$ 9. $\frac{a}{3} + \frac{a}{9}$ 10. $\frac{x}{5} - \frac{x}{10}$ 11. $\frac{2x}{9} + \frac{x}{6}$

12. $2x + \frac{x}{4}$ [সঙ্কেত : $2x = \frac{2x}{1}$] 13. $2a - \frac{5a}{7}$

14. $\frac{x}{4}+\frac{3x}{8}+\frac{5x}{16}$ 15. $a-\frac{7a}{6}+\frac{5a}{9}$ 16. $\frac{3m}{5}-\frac{7m}{10}+\frac{11m}{15}$

17. $\frac{2a}{5}+\frac{3b}{10}+\frac{4c}{15}$ 18. $\frac{2a}{3x}-\frac{3b}{4x}+\frac{5c}{6x}$ 19. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

20. $\frac{2}{a}-\frac{3}{b}$ 21. $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$ 22. $\frac{2a+b}{a}-\frac{a+2b}{b}$

23. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 24. $\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}$ 25. $\frac{b-c}{bc}+\frac{c-a}{ca}+\frac{a-b}{ab}$

26. $\frac{a(b^2-c^2)}{bc}+\frac{b(c^2-a^2)}{ca}+\frac{c(a^2-b^2)}{ab}$

27. $\frac{a^2-bc}{bc}+\frac{b^2-ca}{ca}+\frac{c^2-ab}{ab}$ 28. $2-\frac{x-y}{y}+\frac{(x-y)^2}{y^2}$

29. $\frac{2}{xy}-\frac{3y^2-xy}{xy^3}+\frac{xy+y^2}{x^2y^2}$ 30. $\frac{b-2c}{2b}-\frac{b-5c}{4b}+\frac{b+3c}{8b}$

31. $\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x+1}$ 32. $\frac{x}{x-y}+\frac{y}{y-x}$ 33. $\frac{x}{x^2-y^2}+\frac{y}{y^2-x^2}$

34. $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}$ 35. $\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}$ 36. $\frac{1}{x(x+2)}-\frac{1}{x(x+3)}$

37. $\frac{1}{(x-a)(a-b)}-\frac{1}{(x-b)(a-b)}$ 38. $\frac{x^2-xy+y^2}{x(x^3+y^3)}+\frac{x^2+xy+y^2}{y(x^3-y^3)}$

39. $\frac{1}{(x-3)(x-4)}+\frac{1}{(x-4)(x-2)}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}$

40. $\frac{x+1}{x^2+7x+10}-\frac{2(x+2)}{x^2+6x+5}+\frac{x+5}{x^2+3x+2}$

41. $\frac{b-c}{x^2-(b+c)x+bc}+\frac{c-a}{x^2-(c+a)x+ca}+\frac{a-b}{x^2-(a+b)x+ab}$

42. $\frac{1}{a^2+(b+c)a+bc}+\frac{1}{b^2+(c+a)b+ca}+\frac{1}{c^2+(a+b)c+ab}$

43. $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}+\frac{4xy}{x^2-y^2}$ 44. $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

45. $\frac{a-1}{a+1}-\frac{1+a}{1-a}-\frac{a^2+1}{a^2-1}$

46. $\frac{x-1}{x^2-x+1}-\frac{x+1}{x^2+x+1}+\frac{2}{x^4+x^2+1}$

47. $\frac{a^2+ac}{a^2c-c^3}-\frac{a-c}{c(a+c)}-\frac{2c}{a^2-c^2}$ [ক. প্র., 1869]

48. $\frac{x^2-x}{x^3-x}-\frac{x^3+x^2+x}{x^3-1}+\frac{2(x^2+1)}{x^4-1}$

49. $\frac{x}{x^2-(y+z)x+yz}+\frac{y}{y^2-(z+x)y+zx}+\frac{z}{z^2-(x+y)z+xy}$

50. $\frac{a^2}{(a-b)(x-a)}+\frac{b^2}{(b-a)(x-b)}-\frac{bx}{x^2-(a+b)x+ab}$

51. $\frac{1}{a^2+2ab-3b^2}+\frac{1}{b^2+2ab-3a^2}-\frac{2}{3a^2+3b^2+10ab}$

[এ. প্র., 1897]

52. $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}+\frac{2a}{a^2+b^2}$

53. $\frac{a+1}{(a-1)^2}-\frac{4a}{(a-1)^2(a+1)}-\frac{a}{(a+1)^2}$

54. $\frac{a+x}{a-x}+\frac{a-x}{a+x}+\frac{a^2+x^2}{x^2-a^2}-\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$

55. $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}+\frac{2x}{x^2+y^2}+\frac{4x^3}{x^4+y^4}$.

136. ভগ্নাংশের গুণন। প্রমাণ করিতে পারা যায় যে,

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

প্রমাণ। (i) মনে কর, $x=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$.

উভয় পক্ষকে $b\times d$ দ্বারা গুণ করিলে

$$x\times b\times d=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times b\times d=\left(\frac{a}{b}\times b\right)\times\left(\frac{c}{d}\times d\right)=a\times c.$$

[130 অণুচ্ছেদে প্রদত্ত ভগ্নাংশের সংজ্ঞানুসারে]

অতএব $x \times bd = ac$;

উভয়পক্ষকে bd দ্বারা ভাগ করিলে $x = \frac{ac}{bd}$.

$$\text{অতএব} \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

এইরূপে প্রমাণ করিতে পারা যায় যে,

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf};$$

এবং $\quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} \times \frac{g}{h} = \frac{aceg}{bdfh}$ ইত্যাদি।

অর্থাৎ কতকগুলি ভগ্নাংশের লবগুলির গুণফলকে লব এবং হরগুলির গুণফলকে হর ধরিলে যে-ভগ্নাংশ হয়, উহাই ভগ্নাংশগুলির গুণফল।

লব্ধ গুণফলকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করিতে হয়।

অনুসিদ্ধান্ত। যেহেতু $x = \frac{x}{1}$; অতএব $\frac{a}{b} \times x = \frac{a}{b} \times \frac{x}{1} = \frac{ax}{b}$;

উদাহরণ 1. $\frac{2x^2y}{3xy^2}$কে $\frac{9y^2z}{10yz^2}$ দ্বারা গুণ কর।

$$\frac{2x^2y}{3xy^2} \times \frac{9y^2z}{10yz^2} = \frac{2x^2y \times 9y^2z}{3xy^2 \times 10yz^2} = \frac{\overset{3}{\cancel{2} \times \cancel{9}}x^2y^3z}{3 \times \underset{5}{\cancel{10}}xy^3z^2} = \frac{3x}{5z}.$$

উদাহরণ 2. সরল কর:

$$\frac{x^3+y^3}{x(x^2+xy+y^2)} \times \frac{x^3-y^3}{y(x^2-xy+y^2)} \times \frac{xy}{x^2+xy}.$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{(x^3+y^3)(x^3-y^3)xy}{x(x^2+xy+y^2)y(x^2-xy+y^2)(x^2+xy)}$$

$$= \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)xy}{x(x^2+xy+y^2)y(x^2-xy+y^2)x(x+y)}$$

[লব এবং হরকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিয়া]

$$= \frac{x-y}{x}. \quad \text{[সরল করিয়া]}$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য। ভগ্নাংশগুলির মধ্যে একাধিক পদবিশিষ্ট লব কিংবা হর থাকিলে উহাদিগের প্রত্যেকটিকে বন্ধনীর মধ্যে স্থাপিত করিবে এবং সম্ভবস্থলে উহাদিগকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিয়া গুণফলকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করিবে। লব এবং হরের সাধারণ উৎপাদকের সংখ্যা বেশী হইলে উহাদিগকে সূক্ষ্ম সরলরেখা টানিয়া কাটিয়া দেওয়াই সুবিধাজনক।

উদাহরণ 3. সরল কর :

$$\left(1+\frac{x-1}{x^2+5x+6}\right)\left(2-\frac{x-28}{x^2+2x-15}\right).$$

প্রথম উৎপাদক $=\frac{1}{1}+\frac{(x-1)}{(x^2+5x+6)}$

$$=\frac{(x^2+5x+6)+(x-1)}{x^2+5x+6}$$

$$=\frac{x^2+6x+5}{x^2+5x+6}=\frac{(x+1)(x+5)}{(x+2)(x+3)}.$$

দ্বিতীয় উৎপাদক $=\frac{2}{1}-\frac{(x-28)}{(x^2+2x-15)}$

$$=\frac{2(x^2+2x-15)-(x-28)}{x^2+2x-15}$$

$$=\frac{2x^2+3x-2}{x^2+2x-15}=\frac{(2x-1)(x+2)}{(x+5)(x-3)}.$$

অতএব প্রদত্তরাশি $=\frac{(x+1)(x+5)\times(2x-1)(x+2)}{x+2)(x+3)\times(x+5)(x-3)}$

$$=\frac{(x+1)(2x-1)}{(x+3)(x-3)}=\frac{(x+1)(2x-1)}{x^2-9}.$$

প্রশ্নমালা 58.

সরল কর :

1. $\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}$ 2. $\frac{ab}{cd}\times\frac{bd}{ac}$ 3. $\frac{ab}{xy}\times\frac{x^2y}{a^2b}$ 4. $\frac{a^2c}{b^2}\times\frac{b^3}{c^2a^3}$

5. $\frac{2a^2b^3}{3x^2y^3}\times\frac{9xy^2}{8ab^2}$ 6. $\frac{a^2}{bc}\times\frac{b^2}{ca}\times\frac{c^2}{ab}$ 7. $\frac{yz}{bc}\times\frac{ca}{zx}\times\frac{xy}{ab}$

8. $\frac{3a^2b}{4ab^2}\times\frac{9b^2c}{5bc^2}\times\frac{10c^2a}{21ca^2}$ 9. $\frac{x^2+xy}{4x^2}\times\frac{3y^2}{xy+y^2}$

10. $\frac{x^2-1}{az^2}\times\frac{az^3}{c^3x}\times\frac{a^4y^3}{zx-z}$ 11. $\frac{x^2-1}{x^2+1}\times\frac{x^4+2x^2+1}{x^4-1}$

12. $\frac{a^2-b^2}{x^2-y^2}\times\frac{(x-y)^2}{(a-b)^2}$ 13. $\frac{a^2+a+1}{x^2+x+1}\times\frac{x^3-1}{a^3-1}$

14. $\frac{x^2-2xy}{xy+y^2}\times\frac{xy^2+y^3}{x^3-2x^2y}$ 15. $\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}\times\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x+1}$

16. $\frac{a^4-b^4}{a^2-2ab+b^2}\times\frac{a-b}{a(a+b)}$ [क. প্র., 1860]

17. $\frac{a^2+3a+2}{a^2+2a+1}\times\frac{a^2+5a+4}{a^2+7a+10}$ [क. প্র., 1867]

18. $\frac{(y+z)^2}{x(x+y+z)+yz}\times\frac{(z+x)^2}{y(x+y+z)+zx}\times\frac{(x+y)^2}{z(x+y+z)+xy}$

19. $\frac{x^2-3x+2}{3x^2-8x+5}\times\frac{3x^2-14x+15}{2x^2-5x+2}\times\frac{4x^2-8x+3}{2x^2-9x+9}$

20. $\frac{2a^2+7a-4}{2a^2+a-15}\times\frac{3a^2+8a-3}{3a^2+11a-4}\times\frac{2a^2-11a+15}{2a^2-7a+3}$

21. $\left(1+\frac{2x+6}{x^2+5x+6}\right)\left(1-\frac{6x+18}{x^2+9x+20}\right)$

22. $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)\times\frac{x^2y^2}{x^4-y^4}\times\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$

23. $\left(1+\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)\times\left(1-\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)\times\left\{1+\frac{4x^2y^2}{(x^2-y^2)^2}\right\}$

24. $\left(2-\frac{3ab+4b^2}{2a^2-ab-b^2}\right)\left(1-\frac{a^2+ab-b^2}{3a^2-4ab-4b^2}\right)\times$

$$\left(1+\frac{7b^2+8ab-a^2}{4a^2-9ab-9b^2}\right).$$

137. দুইটি ভগ্নাংশের মধ্যে যদি একের লব ও হর যথাক্রমে অপরটির হর ও লব হয়, তবে ভগ্নাংশ দুইটির প্রত্যেকটিকে অপরটির **বিপরীত** (reciprocal) বলে। যথা, $\frac{2}{5}$ ও $\frac{5}{2}$ পরস্পর বিপরীত ভগ্নাংশ। এইরূপ $\dfrac{a}{b}$ এবং $\dfrac{b}{a}$ পরস্পর বিপরীত ভগ্নাংশ।

138. ভগ্নাংশের ভাগ। প্রমাণ করিতে পারা যায় যে,

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}.$$

অর্থাৎ কোন ভগ্নাংশ দ্বারা ভাগ করিতে হইলে উহার বিপরীত ভগ্নাংশ দ্বারা গুণ করিতে হয়।

প্রমাণ মনে কর, $x=\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}$;

অতএব ভাগের সংজ্ঞা-অনুসারে $x\times\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$;

উভয় পক্ষকে $\frac{d}{c}$ দ্বারা গুণ করিলে $x\times\frac{c}{d}\times\frac{d}{c}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$.

কিন্তু $\frac{c}{d}\times\frac{d}{c}=\frac{cd}{dc}=1.$ $\therefore\ x=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$,

অর্থাৎ $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$.

অনুসিদ্ধান্ত। $\frac{a}{b}\div x=\frac{a}{b}\div\frac{x}{1}=\frac{a}{b}\times\frac{1}{x}=\frac{a}{bx}$.

উদাহরণ 1. সরল কর : $\dfrac{4x^2y}{9a^2b}\div\dfrac{8xy^2}{15ab^2}$.

$$\frac{4x^2y}{9a^2b}\div\frac{8xy^2}{15ab^2}=\frac{4x^2y}{9a^2b}\times\frac{15ab^2}{8xy^2}=\frac{4x^2y\times15ab^2}{9a^2b\times8xy^2}=\frac{5bx}{6ay}.$$ [সরল করিয়া]

উদাহরণ 2. সরল কর :

$$\frac{a^2+3a+2}{a^2+9a+20}\div\frac{a^2+5a+6}{a^2+7a+12}\times\frac{a^2+5a}{a^2-1}.$$

প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{a^2+3a+2}{a^2+9a+20}\times\dfrac{a^2+7a+12}{a^2+5a+6}\times\dfrac{a^2+5a}{a^2-1}$

$$=\frac{(a+1)(a+2)}{(a+4)(a+5)}\times\frac{(a+3)(a+4)}{(a+2)(a+3)}\times\frac{a(a+5)}{(a+1)(a-1)}=\frac{a}{a-1}.$$

উদাহরণ 3 সরল কর : $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2\right)\div\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right)\times\frac{x^2-xy}{xy+y^2}$.

প্রদত্ত রাশি $=\frac{x^2+y^2+2xy}{xy}\div\frac{x^2+y^2-2xy}{xy}\times\frac{x^2-xy}{xy+y^2}$

$=\frac{x^2+y^2+2xy}{xy}\times\frac{xy}{x^2+y^2-2xy}\times\frac{x^2-xy}{xy+y^2}$

$=\frac{(x+y)^2}{xy}\times\frac{xy}{(x-y)^2}\times\frac{x(x-y)}{y(x+y)}=\frac{x(x+y)}{y(x-y)}$. [সরল করিয়া]

প্রশ্নমালা 59.

সরল কর :

1. $\frac{a}{b}\div\frac{a}{c}$
2. $\frac{ax}{by}\div\frac{cx}{dy}$
3. $\frac{ab}{cd}\div\frac{ac}{bd}$
4. $\frac{x^2y}{a^2b}\div\frac{xy^2}{ab^2}$
5. $\frac{3a^2b^3}{5x^2y^3}\div\frac{6a^3b^2}{25x^4y^3}$
6. $\frac{3mn}{8xy}\div\frac{9mnp}{32xyz}$
7. $\frac{5ap^2}{3d}\div\frac{2a^2p^3}{3d^2}$
8. $\frac{a^2-b^2}{x^3}\div\frac{a^2+ab}{ax^2}$
9. $\frac{x^2+xy}{x^2-xy}\div\frac{xy+y^2}{xy-y^2}$
10. $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)\div\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$
11. $\frac{x^2+x+1}{a^2+a+1}\div\frac{x^3-1}{a^3-1}$
12. $\frac{x^2-y^2}{a^2-b^2}\div\frac{(x-y)^2}{(a-b)^2}$
13. $\frac{a^2-3a+2}{a^2-5a+6}\div\frac{a^2-2a+1}{a^2-4a+3}$
14. $\frac{x^4-y^4}{x^2-2xy+y^2}\div\frac{x^2+xy}{x-y}$
15. $\frac{x^2+5x+4}{x^2+7x+10}\div\frac{x^2+2x+1}{x^2+3x+2}$
16. $\frac{x^2+xy}{x^2-xy}\div\frac{x^2+2xy}{xy-y^2}\times\frac{xy+2y^2}{xy+y^2}$
17. $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\div\frac{(x-y)^2}{x+y}\times\frac{x^4-y^4}{(x+y)^3}$
18. $\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{(x+y)^2-(x-y)^2}\div\frac{x^4-y^4}{2xy(x-y)}$ [মা. প্র., 1887]

19. $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\right)\div\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-1\right)\times\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}$

20. $\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right)\div\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}\right)\div\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$

21. $\frac{a(a+b+c)+bc}{-a^2+ab+ac}\div\frac{b(a+b+c)+ca}{-b^2+ab+bc}\times\frac{b^2+2bc+c^2-a^2}{c^2+2ca+a^2-b^2}$

22. $\frac{x^2+7x+12}{x^2-8x+15}\times\frac{x^2-x-20}{x^2+2x-3}\div\frac{x^2+8x+16}{x^2-5x+6}$

23. $\frac{3a^2-14ab+15b^2}{2a^2-5ab+2b^2}\div\frac{3a^2-8ab+5b^2}{a^2-3ab+2b^2}\times\frac{4a^2-8ab+3b^2}{2a^2-9ab+9b^2}$

24. $\frac{2x^21-1xy+15y^2}{2x^2-7xy+3y^2}\div\frac{2x^2+xy-15y^2}{2x^2+7xy-4y^2}\div\frac{3x^2+11xy-4y^2}{3x^2+8xy-3y^2}$

25. $\left\{\frac{1}{x-1}-\frac{2}{2x-3}\right\}\div\left\{\frac{2}{2x-3}+\frac{3}{2-3x}\right\}\times$
$\left\{\frac{4}{4x-5}-\frac{3}{3x-2}\right\}\div\left\{\frac{1}{4x-5}+\frac{4}{1-x}\right\}.$

পঞ্চদশ অধ্যায়

সরল সমীকরণ (Simple Equations)

139. সরল সমীকরণের বিষয় পূর্ব্বেই সপ্তম অধ্যায়ে আলোচিত হইয়াছে।

সাম্যচিহ্ন দ্বারা একটি বীজগণিতীয় রাশির সহিত অপর এক রাশির সংযোগকে সমীকরণ বলে। চিহ্নটির উভয় পার্শ্বে অবস্থিত রাশিদ্বয়কে সমীকরণের **পক্ষ** **(side, member)** বলা হয়; তন্মধ্যে বামপার্শ্বে অবস্থিত রাশিকে **বামপক্ষ** **(left side)** এবং ডানদিকে অবস্থিত রাশিকে **দক্ষিণপক্ষ (right side)** বলে। প্রত্যেক সমীকরণে এক বা একাধিক অজ্ঞাত সংখ্যাসূচক অক্ষর থাকে, সমীকরণের সাহায্যে উহাদের মান নির্ণয় করিতে হয়। লব্ধ মানকে সমীকরণের **বীজ (roots, solution)** বলে।

140. সরল সমীকরণ (Simple Equation)। যদি কোন সমীকরণকে এরূপভাবে লেখা যায় যে, উহাতে প্রথম ঘাতবিশিষ্ট একটিমাত্র অজ্ঞাত রাশি থাকে, তাহা হইলে উহাকে **সরল সমীকরণ (simple equation)** বলা হয়।

নিম্নে সরল সমীকরণের দৃষ্টান্ত দেখান হইল।

(i) $4x=12$, একটি সরল সমীকরণ।

(ii) $2x-3=7-3x$, একটি সরল সমীকরণ।

(iii) $3x^2+2x+5=3x^2+x+2$ও একটি সরল সমীকরণ ; কারণ ইহার উভয় পার্শ্ব হইতে সমান-সমান পদ $3x^2$ বিয়োগ করিলে (82 অনু. স্বতঃসিদ্ধ দ্বারা) সমীকরণটি '$2x+5=x+2$', এইরূপে লেখা যায়।

141. পক্ষান্তরকরণ (Transposition)।

মনে কর, $a+b=-c+d$. ... ... (1)

এই সমীকরণের উভয় পক্ষ হইতে b বিয়োগ করিলে

$a+b-b=-c+d-b$. [অনু. 82, স্বতঃসিদ্ধ 2.]

অর্থাৎ $a=-c+d-b$. ... ... (2)

(1) এবং (2)-চিহ্নিত সমীকরণ দুইটি তুলনা করিয়া দেখা যাইতেছে যে, বামপক্ষের $+b$কে $-b$ করিয়া দক্ষিণপক্ষে স্থানান্তরিত করা যায়।

আবার (1)-চিহ্নিত সমীকরণের উভয় পক্ষে c যোগ করিলে

$a+b+c=-c+d+c$ [অনু. 82, স্বতঃসিদ্ধ 1]

অর্থাৎ $a+b+c=\ d$. ... ... (3)

(1) এবং (3)-চিহ্নিত সমীকরণ দুইটি তুলনা করিয়া দেখা যাইতেছে যে, দক্ষিণ-পক্ষের $-c$কে $+c$ করিয়া বামপক্ষে স্থানান্তরিত করা যায়। অতএব

সমীকরণের যে-কোন পক্ষের একটি পদকে উহার চিহ্ন-পরিবর্ত্তন-পূর্ব্বক অপর পক্ষে স্থানান্তরিত করা যায়।

এই প্রক্রিয়াকে **পক্ষান্তরকরণ-প্রক্রিয়া (Principle of transposition)** বলা হয়। ইহার সাহায্যে সমীকরণের সমাধান অতি সহজে পাওয়া যায়।

142. সরল-সমীকরণ-সমাধানের সাধারণ প্রণালী।

সরল সমীকরণ সমাধান করিতে হইলে উহার অজ্ঞাত-রাশি-বিশিষ্ট পদগুলিকে বামপার্শ্বে ও বাকি পদগুলিকে দক্ষিণপার্শ্বে স্থানান্তরিত করিতে হয় এবং পরিশেষে উহাকে

অজ্ঞাত-রাশি = কোন জ্ঞাত-সংখ্যা

এইরূপ আকারে পরিণত করিতে হয়।

সমাধানের বিশুদ্ধি-পরীক্ষা। অজ্ঞাত রাশির যে মান পাওয়া যাইবে, উহা প্রদত্ত সমীকরণে অজ্ঞাত রাশির পরিবর্তে বসাইয়া দেখিবে যে, উভয় পক্ষ সমান হইল কিনা। যদি উভয় পক্ষ সমান হয়, তবে সমাধান শুদ্ধ হইয়াছে জানিবে।

নিম্নের উদাহরণগুলি হইতে প্রণালীটি সুস্পষ্ট হইবে।

উদাহরণ 1. সমাধান কর : $2x-3=7-3x$.

$2x-3=7-3x$;

পক্ষান্তরকরণ দ্বারা $2x+3x=7+3$;

উভয় পক্ষ সরল করিয়া $5x=10$;

উভয় পক্ষকে 5 দ্বারা ভাগ করিয়া $x=2$.

[সমাধানের বিশুদ্ধি-পরীক্ষা। প্রদত্ত সমীকরণে xএর স্থলে 2 বসাইলে বামপক্ষ $=2x-3=2\times2-3=1$ এবং ডানপক্ষ $=7-3x=7-3\times2=1$.

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ। অতএব সমাধান শুদ্ধ হইয়াছে।]

উদাহরণ 2. সমাধান কর : $3(x-2)-7(3-4x)=2(3x-5)+8$.

$3(x-2)-7(3-4x)=2(3x-5)+8$;

বন্ধনী অপসারিত করিয়া $3x-6-21+28x=6x-10+8$;

উভয় পক্ষকে সরল করিয়া $31x-27=6x-2$;

পক্ষান্তরকরণ দ্বারা $31x-6x=-2+27$;

উভয় পক্ষকে সরল করিয়া $25x=25$;

উভয় পক্ষকে 25 দ্বারা ভাগ করিয়া $x=1$.

[বিশুদ্ধি-পরীক্ষা। সমীকরণে $x=1$ বসাইয়া সরল করিলে দেখা যাইবে যে, বামপক্ষ $=4$; ডানপক্ষ $=4$; অতএব সমাধান শুদ্ধ হইয়াছে।]

উদাহরণ 3. সমাধান কর : $\dfrac{2x-3}{6}+\dfrac{3x-8}{11}=\dfrac{4x+15}{33}+\dfrac{1}{2}$.

[ক. প্র., 1877]

$$\frac{2x-3}{6}+\frac{3x-8}{11}=\frac{4x+15}{33}+\frac{1}{2}$$

(উভয় পক্ষের হরগুলির অর্থাৎ) 6, 11, 33 এবং 2এর ল. সা. গু. = 66 ; উভয় পক্ষকে 66 দ্বারা গুণ করিয়া

$$11(2x-3)+6(3x-8)=2(4x+15)+33;$$

বন্ধনী অপসারিত করিয়া $22x-33+18x-48=8x+30+33$;

উভয় পক্ষকে সরল করিয়া $40x-81=8x+63$;

পক্ষান্তরকরণ দ্বারা $40x-8x=63+81$;

অর্থাৎ $32x=144$;

উভয় পক্ষকে 32 দ্বারা ভাগ করিয়া $x=\frac{144}{32}=4\frac{1}{2}$.

[বিশুদ্ধি-পরীক্ষা : প্রদত্ত সমীকরণে $x=4\frac{1}{2}$ বসাইয়া সরল করিলে দেখা যাইবে যে, বামপক্ষ $=1\frac{1}{2}$; ডানপক্ষ $=1\frac{1}{2}$. অতএব সমাধান শুদ্ধ হইল।]

দ্রষ্টব্য। সমীকরণে ভগ্নাংশ থাকিলে উভয় পক্ষকে ভগ্নাংশগুলির হরের ল. সা. গু. দ্বারা গুণ করিয়া লইলে সমাধান সহজ হয়। তবে ল. সা. গু. দ্বারা গুণ করিবার পূর্ব্বে একাধিক পদবিশিষ্ট লবগুলিকে বন্ধনীর মধ্যে স্থাপিত করিবে।

উদাহরণ 4. সমাধান কর :

$$(x+2)^2+(x+3)^2-1=2(x+2)(x+4)+2.$$

$$(x+2)^2+(x+3)^2-1=2(x+2)(x+4)+2 ;$$

অথবা $(x^2+4x+4)+(x^2+6x+9)-1=2(x^2+6x+8)+2$;

উভয় পক্ষ সরল করিয়া $2x^2+10x+12=2x^2+12x+18$;

উভয় পক্ষ হইতে $2x^2$ বাদ দিয়া $10x+12=12x+18$;

পক্ষান্তরকরণ দ্বারা $10x-12x=18-12$;

অথবা $-2x=6$

উভয় পক্ষকে -2 দ্বারা ভাগ করিয়া $x=\frac{6}{-2}=-3$.

[বিশুদ্ধি পরীক্ষা : সমীকরণে $x=-3$ বসাইয়া সরল করিলে দেখা যাইবে যে, বামপক্ষ $=0$; ডানপক্ষ $=0$; অতএব সমাধান শুদ্ধ হইয়াছে।]

পূর্ব্ববর্ত্তী উদাহরণগুলি হইতে দেখা যাইতেছে যে, সরল সমীকরণের বীজনির্ণয়ের প্রক্রিয়া নিম্নলিখিতক্রমে (orderএ) সম্পন্ন করিতে হইবে।

143. সরল-সমীকরণ-সমাধানের কার্য্যপ্রণালী।

(1) প্রথমে সমীকরণটি অবিকল লিখিবে ;

(2) সমীকরণে কোন বন্ধনী কিংবা ভগ্নাংশ থাকিলে উহাদিগকে অপসারিত করিয়া উভয়পক্ষ সরল করিয়া লইবে ;

(3) তারপর পক্ষান্তরকরণ-প্রক্রিয়া (transposition) দ্বারা অজ্ঞাত রাশি-বিশিষ্ট পদগুলিকে বামপক্ষে এবং অপর পদগুলিকে দক্ষিণপক্ষে লইয়া গিয়া আবার উভয় পক্ষ সরল করিয়া লইবে ;

(4) এখন অজ্ঞাত রাশির সহগ দ্বারা উভয় পক্ষকে ভাগ করিলেই বীজ অর্থাৎ অজ্ঞাত রাশির মান পাওয়া যাইবে।

(5) কোন্ লাইনে কি প্রক্রিয়া অবলম্বিত হইল, তাহা লাইনের বামদিকে সংক্ষেপে লিখিবে এবং বিভিন্ন লাইনের সাম্যচিহ্নগুলি একই পাটিতে (columnএ) রাখিবে।

প্রত্যেকস্থলে সমাধানের বিশুদ্ধি পরীক্ষা করিবে।

প্রশ্নমালা 60

সমাধান কর :

1. $x+2=7$ **2.** $2x+1=5$ **3.** $5x=3x+4$

4. $2x=4-6x$ **5.** $2x+3=x+7$ **6.** $5x-8=9-12x$

7. $3x-8+5x-24=0$ **8.** $3x-6-8+4x+7=0$

9. $5(x-4)=3(x-2)+4$ **10.** $8(x-5)-6=5(x-2)$

11. $7(2x-3)-5=6(x-4)-14$

12. $2(x-3)-7=5-4(x-3)$

13. $4(x-5)-3(x-2)=2(x+5)-3(x-4)$

14. $5(x-7)+3(x-2)+10=3(2x-5)+4(3x-2)-16$

15. $\frac{2}{3}x-5=2-4x$ **16.** $\frac{x}{2}-1=1-\frac{x}{3}$

17. $\frac{x}{2}+3=\frac{x}{3}+4$ **18.** $\frac{x}{2}-2=\frac{x}{4}+\frac{x}{5}-1$ [ঢা.প্র., '37]

19. $\frac{3}{16}x-\frac{5}{8}x=\frac{7}{16}+\frac{x}{2}=0$ **20.** $\frac{4}{7}x+\frac{5}{14}x-\frac{8}{21}x-\frac{23}{14}=0$

21. $\frac{11}{12}x-\frac{1}{36}x=\frac{7}{96}x+\frac{13}{144}x+\frac{209}{576}$

22. $\frac{x+1}{7}=\frac{x+3}{9}$ **23.** $\frac{2x-1}{5}=\frac{4x+1}{11}$

24. $\frac{5x+1}{8}+3=\frac{7x+3}{8}+2$ **25.** $6\frac{1}{3}-\frac{x-7}{3}=\frac{4x-2}{5}$

[ক. প্র., 1861]

26. $\frac{x-\frac{1}{2}}{5}-\frac{7x-3}{6}+\frac{3}{7}=0.$ [ক. প্র., 1875]

27. $\frac{1}{7}(x-\frac{1}{2})+\frac{1}{5}(x+\frac{2}{3})=\frac{43}{40}$ [ক. প্র., 1916]

28. $\frac{3x+2}{4}-\frac{6x+3}{5}=\frac{2x+4}{8}$ [ঢা. প্র., 1925]

29. $\frac{5x+6}{12}+\frac{3x-4}{5}=2(x-9)$ [ক. প্র., 1915]

30. $\frac{1}{5}(7x+1)-\frac{1}{3}(17-2x)=\frac{1}{4}(5x+1)$ [বো. প্র., 1882]

31. $\frac{4x+3}{9}+\frac{13x}{108}=\frac{8x+19}{18}$ [ক. প্র, 1878]

32. $\frac{x+2\frac{1}{2}}{15}+\frac{x+3\frac{1}{3}}{25}=\frac{x+4\frac{1}{6}}{55}$ [ক. প্র., 1888]

33. $\frac{x-1}{2}-\frac{x-3}{4}+\frac{x-5}{6}=4.$ [এ. প্র., 1907]

34. $\frac{x+1}{3}+\frac{x-1}{2}-\frac{3x-7}{4}=2.$ [ক. প্র., 1890]

35. $\frac{x+2}{3}+2=\frac{x+4}{4}+\frac{x+6}{7}$ [পা. প্র., 1925]

36. $\frac{1}{2}(x+1)-\frac{1}{4}(x-1)=\frac{1}{3}(x+4)+1$

37. $x-\left(3x-\frac{2x-5}{10}\right)=\frac{1}{6}(2x-57)-\frac{5}{3}$ [ক. প্র., 1889]

38. $\frac{x+1}{8}+\frac{x-2}{5}=\frac{x+3}{10}+\frac{x+2}{9}$

39. $\frac{x+3}{8}-\frac{x-3}{10}=\frac{x+5}{6}-\frac{x-7}{3}$ [মা. প্র., 1880]

40. $\frac{x-4}{2}+\frac{x-9}{3}+\frac{x-16}{4}+\frac{x-25}{5}=63$ [পা. প্র., 1904]

41. $\frac{2x-13}{9}-\frac{x-1}{11}=\frac{x}{8}+\frac{x}{7}-9$ [ক. প্র., 1876]

42. $(x+3)^2=(x+2)^2+7$

43. $(x+\frac{1}{2})^2-(x-\frac{3}{2})^2=2x+3$ [পা. প্র., 1911]

44. $\frac{x^2-2\frac{1}{2}}{4}-\frac{x-3\frac{1}{2}}{5}=\frac{2x^2-3}{8}-\frac{x-5\frac{1}{2}}{3}$ [ক. প্র., 1883]

45. $(x-2)^2-5=2+(x-3)^2$

46. $(x+3)(x+5)-9=(x+2)(x+4)+2$

47. $(x+1)^2+(x+3)^2+8=(x+2)^2+(x+4)^2-6$

48. $3(x+3)^2-2(x+1)^2=5(x+2)^2-4(x+3)^2$

49. $x^2-\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(x-3)^2}{2}=\frac{(x-1)(x+13)}{4}$

50, $\frac{2x^2+5x+4}{8}+\frac{3x^2+7x-10}{12}=\frac{3x^2+3x+1}{6}+\frac{5}{24}.$

ষোড়শ অধ্যায়

সরল-সমীকরণ-বিষয়ক প্রশ্ন

(Problems leading to Simple Equation)

সপ্তম অধ্যায়ে সহজ প্রশ্ন-সমাধানের প্রণালী বিবৃত হইয়াছে, এস্থলে উহার সাধারণ নিয়ম প্রদত্ত হইবে।

144. প্রশ্ন (problem) এবং সমীকরণের (equationএর) মধ্যে নিকট সম্বন্ধ। প্রকৃতপক্ষে যে-কোন প্রশ্নকে ভাষার পরিবর্ত্তে প্রতীক-সাহায্যে প্রকাশ করিলে উহা একটি সমীকরণের রূপ ধারণ করে। অতএব সমীকরণের বীজনির্ণয় দ্বারা গণিতের বহু প্রশ্নের সমাধান করা যায়। নিম্নে কতকগুলি দৃষ্টান্ত দেওয়া হইল। এই দৃষ্টান্তগুলি হইতে প্রশ্ন-সমাধানের সাধারণ নিয়ম বুঝা যাইবে। এস্থলে শিক্ষার্থিগণ প্রতীকের ব্যবহারশীর্ষক প্রথম অধ্যায় এবং প্রশ্নমালা 1 এবং 3ও আবার দেখিয়া লইবে।

উদাহরণ 1. কোন্ সংখ্যার 4 গুণের সহিত 1 যোগ করিলে যোগফল সংখ্যাটির 3 গুণ অপেক্ষা 11 বেশী হইবে ?

মনে কর, সংখ্যাটি $=x$.

প্রশ্নের সর্ত্তানুসারে $4x+1=3x+11$,

পক্ষান্তরকরণ দ্বারা $4x-3x=11-1$

অর্থাৎ $x=10$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $=10$.

[বিশুদ্ধি-পরীক্ষা : $10\times4+1=41$.
$10\times3+11=41$.]

উদাহরণ 2. 50কে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর, যেন ক্ষুদ্রতর অংশের 6 গুণ বৃহত্তর অংশের 4 গুণের সমান হয়।

মনে কর, ক্ষুদ্রতর অংশ $=x$;

$\therefore$ অপর অর্থাৎ বৃহত্তর অংশ $=50-x$.

প্রশ্নের সর্ত্তানুসারে $6x=4(50-x)$;

অর্থাৎ $6x=200-4x$;

পক্ষান্তরকরণ দ্বারা $6x+4x=200$

অর্থাৎ $10x=200$

উভয় পক্ষকে 10 দ্বারা ভাগ করিয়া

$$x=\frac{200}{10}=20.$$

অতএব ক্ষুদ্রতর অংশ $=20$

$\therefore$ বৃহত্তর অংশ $=50-20=\mathbf{30}$

[বিশুদ্ধি-পরীক্ষা : $20+30=50$; $20\times 6=30\times 4$; ($\because$ প্রত্যেকে $=120$.)]

উদাহরণ 3. পিতার 30 বৎসর বয়সে পুত্রের জন্ম হয়। যদি পুত্রের বর্ত্তমান বয়সের 4 গুণ পিতার দশ বৎসর পূর্ব্বের বয়সের 2 গুণ অপেক্ষা 8 বৎসর বেশী হয়, তবে পুত্রের বর্ত্তমান বয়স কত ?

মনে কর, পুত্রের বর্ত্তমান বয়স $=x$ বৎসর। ইহা অপেক্ষা পিতার বর্ত্তমান বয়স 30 বৎসর বেশী। সুতরাং পিতার বর্ত্তমান বয়স $=(x+30)$ বৎসর। অতএব পিতার 10 বৎসর পূর্ব্বের বয়স $=(x+20)$ বৎসর।

প্রশ্নের সর্ত্তানুসারে $4x=2(x+20)+8$,

সরল করিয়া $4x=2x+48$;

পক্ষান্তরকরণ দ্বারা $4x-2x=48$;

অর্থাৎ $2x=48$;

উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করিয়া

$$x=\frac{48}{2}=24.$$

$\because$ পুত্রের বর্ত্তমান বয়স $=24$ বৎসর।

কাজেই পিতার বর্ত্তমান বয়স $=24+30=54$ বৎসর।

[বিশুদ্ধি-পরীক্ষা : $24\times 4=96$; $(54-10)\times 2+8=96$.]

উদাহরণ 4. A, B এবং Cএর মধ্যে 52 টাকা এরূপে ভাগ করিয়া দাও, যেন Aএর অংশের 2 গুণ, Bএর অংশের 3 গুণ এবং Cএর অংশের 4 গুণ পরস্পর সমান হয়।

মনে কর, Aএর অংশের 2 গুণ $= x$ টাকা। $\therefore$ Bএর অংশের 3 গুণ $= x$ টাকা ; এবং Cএর অংশের 4 গুণ $= x$ টাকা।

অতএব Aএর অংশ $= \frac{x}{2}$ টাকা ; Bএর অংশ $= \frac{x}{3}$ টাকা ; Cএর অংশ $= \frac{x}{4}$ টাকা। এই অংশ তিনটির সমষ্টি $= 52$ টাকা।

$$\therefore \quad \frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=52.$$

সরল করিলে $$\frac{6x+4x+3x}{12}=53\,;$$

অর্থাৎ $$\frac{13x}{12}=52\,;$$

উভয় পক্ষকে (xএর সহগ) $\frac{13}{12}$ দ্বারা ভাগ করিলে

$$x=52\div\frac{13}{12}=52\times\frac{12}{13}=48.$$

$\therefore$ Aএর অংশ $=\frac{x}{2}$ টাকা $=\frac{48}{2}$ টাকা $=$ **24** টাকা ;

Bএর অংশ $=\frac{x}{3}$ টাকা $=\frac{48}{3}$ টাকা $=$ **16** টাকা ;

Cএর অংশ $=\frac{x}{4}$ টাকা $=\frac{48}{4}$ টাকা $=$ **12** টাকা।

[বিশুদ্ধি-পরীক্ষা : $24+16+12=52$

$24\times2=16\times3=12\times4$ ($\because$ প্রত্যেকে $=48$)]

145. প্রশ্ন-সমাধানের কার্য্যপ্রণালী (Method of work) ।

পূর্ব্ববর্ত্তী উদাহরণগুলি হইতে দেখা যাইতেছে যে, প্রত্যেক প্রশ্নে এক বা তদধিক রাশির মান দেওয়া থাকে এবং উহাদের সহিত সম্বন্ধযুক্ত অপর কোন রাশি বা কতকগুলি রাশির মান নির্ণয় করিতে বলা হয়। 'প্রশ্নসমাধান করা'-অর্থে এই 'অজ্ঞাত রাশি বা রাশিগুলির মান নির্ণয় করা' বুঝায়। একই প্রশ্নের উত্তর নানাভাবে স্থির করা চলে। তবে সমাধান-নির্ণয়ে প্রথম-প্রথম নিম্নলিখিত প্রণালী অবলম্বন করাই সুবিধাজনক :

প্রশ্ন-সমাধানের কার্য্যপ্রণালী।

(1) প্রথমে প্রশ্নটি উত্তমরূপে পাঠ করিয়া স্থির কর, কি দেওয়া আছে এবং কি নির্ণয় করিতে হইবে ;

(2) প্রশ্নে একটিমাত্র অজ্ঞাত রাশি থাকিলে উহাকে কিংবা একাধিক অজ্ঞাত রাশি থাকিলে উহাদের একটিকে x ধর। অথবা সুবিধামত এমন একটি রাশিকে x ধর, যাহার দ্বারা অজ্ঞাত রাশিগুলিকে সহজে প্রকাশ করা যায় ;

(3) যাবতীয় অজ্ঞাত রাশিগুলিকে প্রশ্নের নির্দ্দেশমত x-অক্ষরবিশিষ্ট রাশিরূপে প্রকাশ কর ;

(4) প্রশ্নের অজ্ঞাত এবং জ্ঞাতরাশির মধ্যে যে সম্বন্ধ বা সর্ত্ত (condition) দেওয়া আছে, তদনুসারে x-অক্ষর-বিশিষ্ট একটি সমীকরণ গঠিত কর ;

(5) এখন (143 অণুচ্ছেদে প্রদত্ত নিয়মে) এই সমীকরণটির সমাধান নির্ণয় করিলেই যাবতীয় অজ্ঞাত রাশি পাইবে।

(6) সর্ব্বশেষে প্রদত্ত প্রশ্নে অজ্ঞাত রাশির লব্ধ মান বসাইয়া পরীক্ষা করিয়া দেখ, প্রশ্নের সর্ত্ত পূর্ণ হইল কিনা ; পূর্ণ হইয়া থাকিলে সমাধান শুদ্ধ হইয়াছে জানিবে।

উদাহরণ 5. একটি খুঁটির $\frac{1}{3}$ কাদায়, $\frac{1}{4}$ জলে এবং 5 ফুট জলের উপর আছে। খুঁটিটি কত লম্বা ?

মনে কর, খুঁটির দৈর্ঘ্য $= x$ ফুট। অতএব প্রশ্নানুসারে $\frac{x}{3}$ ফুট কাদায়, $\frac{x}{4}$ ফুট জলে এবং 5 ফুট জলের উপরে আছে।

অতএব খুঁটিটি $\left(\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+5\right)$ ফুট লম্বা ; কিন্তু উহা x ফুট লম্বা ধরা হইয়াছে।

অতএব $x=\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+5$;

(হরগুলির ল. সা. গু.) 12 দ্বারা গুণ করিয়া $12x=4x+3x+60=7x+60$।

পক্ষান্তর করিলে $5x=60$;

উভয় পক্ষকে 5 দ্বারা ভাগ করিয়া $x=12$.

অতএব খুঁটির দৈর্ঘ্য $=12$ ফুট।

[বিশুদ্ধি-পরীক্ষা। 12এর $\frac{1}{3}=4$; 12এর $\frac{1}{4}=3$; $4+3+5=12$.]

উদাহরণ 6. A এবং Bএর নিকট মোট 187 টাকা আছে। Bএর অংশের আনার সংখ্যা Aএর অংশের টাকার সংখ্যার সমান হইলে কাহার নিকট কত টাকা আছে ?

মনে কর, Bএর টাকার সংখ্যা $= x$; তাহা হইলে Aএর টাকার সংখ্যা $= 187 - x$.

যেহেতু Bএর টাকায় আনার সংখ্যা $= 16x$;

অতএব প্রশ্নের সর্ত্তানুসারে $16x = 187 - x$;

পক্ষান্তর দ্বারা $17x = 187$,

উভয় পক্ষকে 17 দ্বারা ভাগ করিয়া $x = \frac{187}{17} = 11$.

এবং $187 - x = 187 - 11 = 176$.

অতএব Aএর নিকট 176 টাকা এবং Bএর নিকট 11 টাকা আছে।

(বিশুদ্ধি-পরীক্ষা : $176 + 11 = 187$; $176 = 11 \times 16$.)

দ্রষ্টব্য। এস্থলে 84 অনুচ্ছেদের উদাহরণগুলিও পাঠ করিয়া লইবে।

প্রশ্নমালা 61

1. কোন সংখ্যার দ্বিগুণের সহিত 3 যোগ করাতে যোগফল সংখ্যাটি অপেক্ষা 7 বেশী হইল। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

2. কোন্ সংখ্যার 4 গুণের সহিত 1 যোগ করিলে যোগফল ঐ সংখ্যার 3 গুণ হইতে 5 বেশী হইবে ?

3. 32 হইতে কোন সংখ্যার 5 গুণ বিয়োগ করাতে বিয়োগফল সংখ্যাটির 3 গুণ অপেক্ষা 8 বেশী হইল। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

4. একব্যক্তির মাসিক আয় 50 টাকা। মাসিক আয় কত হইলে উহা আয়-বৃদ্ধির 3 গুণ হইবে ?

5. একব্যক্তির বর্ত্তমান বয়স তাহার 25 বৎসর পূর্ব্বের বয়সের দ্বিগুণ। তাহার বর্ত্তমান বয়স কত ?

6. 40কে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর, যেন এক অংশের 5 গুণ অপর অংশের 3 গুণের সমান হয়।

7. 60 টাকা A এবং Bএর মধ্যে এইরূপে ভাগ করিয়া দাও, যেন Aএর অংশের 5 গুণ Bএর অংশের 7 গুণের সমান হয়।

8. 30কে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর, যেন এক অংশের 3 গুণের সহিত 2 যোগ করিলে উহা অপর অংশের সমান হয়।

9. 50 টাকা X এবং Yএর মধ্যে এইরূপে ভাগ করিয়া দাও, যেন Xএর অংশের সহিত 5 টাকা যোগ করিলে যোগফল Yএর অংশের 2 গুণ অপেক্ষা 10 টাকা বেশী হয়।

10. 70কে এইরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর, যেন এক অংশের 2 গুণের সহিত 11 যোগ করিলে যোগফল অপর অংশের 4 গুণ অপেক্ষা 1 বেশী হয়।

11. 65 টাকা A এবং Bএর মধ্যে এরূপে ভাগ কর, যেন Aএর অংশের টাকা হইতে 4 টাকা বিয়োগ করিলে বিয়োফল Bএর অংশের 3 গুণ অপেক্ষা 1 বেশী হয়।

12. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 80 ; একটি সংখ্যার 3 গুণের সহিত 8 যোগ করিলে যোগফল অপর সংখ্যার 4 গুণ অপেক্ষা 3 বেশী হয়, সংখ্যা-দুইটি কত ?

13. A B অপেক্ষা 10 বৎসরের বড়। যদি Aএর 20 বৎসর পূর্ব্বের বয়সের দ্বিগুণ Bএর 25 বৎসর পরের বয়সের চেয়ে 5 বৎসর বেশী হয়, তবে উহাদের বর্ত্তমান বয়স কত ?

14. একটি খুঁটির $\frac{1}{5}$ মাটিতে এবং 12 ফুট মাটির উপরে আছে। খুঁটির দৈর্ঘ্য কত ?

15. Aএর টাকার $\frac{1}{3}$এর সহিত 35 টাকা যোগ করিলে যোগফল Aএর টাকার দ্বিগুণ হয়। Aএর কত টাকা আছে ?

16. একব্যক্তি ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে চলিয়া একস্থান হইতে অপর একস্থানে পৌঁছিল। ঘণ্টায় 5 মাইল বেগে হাঁটিলে সে দুই ঘণ্টা পূর্ব্বে পৌঁছিতে পারিত। স্থান-দুইটির দূরত্ব কত ?

17. একব্যক্তি টাকায় 15টি হিসাবে কতকগুলি আম ক্রয় করিয়া টাকায় 12টি হিসাবে বিক্রয় করাতে তাহার 4 টাকা লাভ হইল। সে কত আম ক্রয় করিয়াছিল ?

18. একব্যক্তি আয়ের $\frac{1}{3}$এর পরিবর্ত্তে $\frac{1}{4}$ ব্যয় করিলে তাঁহার 200 টাকা কম খরচ হইত ; তাঁহার আয় কত ?

19. কোন স্কুলের ছাত্রসংখ্যার $\frac{19}{24}$ হিন্দু এবং $\frac{1}{6}$ মুসলমান। যদি হিন্দুছাত্রের সংখ্যা মুসলমান অপেক্ষা 120 বেশী হয়, স্কুলের ছাত্রসংখ্যা নির্ণয় কর।

20. একটি গরু 36 টাকায় বিক্রয় করাতে যত ক্ষতি হইল, 72 টাকায় বিক্রয় করিলে তাহার দ্বিগুণ লাভ হইত। গরুটির ক্রয়মূল্য কত ?

21. একটি খুঁটির $\frac{1}{2}$ কাদায়, $\frac{1}{3}$ জলে এবং 2 ফুট জলের উপরে আছে। খুঁটিটি কত লম্বা ?

22. একব্যক্তি তাঁহার আয়ের $\frac{1}{2}$ পারিবারিক ব্যয়ে খরচ এবং $\frac{1}{3}$ দান করিয়া দেখিতে পাইলেন যে, 1250 টাকা বাকি আছে। তাঁহার আয় কত ?

23. A, B এবং Cএর নিকট মোট যত টাকা আছে, Aএর নিকট উহার $\frac{1}{2}$ Bএর নিকট উহার $\frac{1}{3}$ এবং Cএর 125 টাকা থাকিলে উহাদের নিকট মোট কত টাকা আছে ?

24. একব্যক্তি তাঁহার আয়ের $\frac{3}{8}$ এবং 150 টাকা খরচ করিয়া দেখিলেন যে, তাঁহার কাছে আয়ের $\frac{1}{2}$ অপেক্ষা 250 টাকা বেশী আছে। তাঁহার আয় কত ?

25. একটি সংখ্যার $\frac{1}{4}$এর সহিত সংখ্যাটির $\frac{1}{3}$ যোগ করায় যোগফল সংখ্যাটির $\frac{1}{2}$ অপেক্ষা 8 বেশী হইল। সংখ্যাটি কত ?

26. একটি সংখ্যার $\frac{1}{3}$ হইতে উহার $\frac{1}{6}$ বিয়োগ করাতে বিয়োগফল সংখ্যাটির $\frac{1}{8}$ অপেক্ষা 2 বেশী হইল। সংখ্যাটি কত ?

27. একব্যক্তি তাঁহার সম্পত্তির $\frac{1}{2}$ তাঁহার স্ত্রীকে, $\frac{1}{4}$ পুত্রকে এবং $\frac{1}{8}$ কন্যাকে দিয়া দেখিলেন যে, তাঁহার নিকট 1760 টাকা আছে। তাঁহার মোট সম্পত্তির মূল্য কত ?

28. একব্যক্তি তাঁহার প্রথম পুত্রকে মোট অর্থের $\frac{1}{4}$ এবং 50 টাকা, দ্বিতীয় পুত্রকে মোট অর্থের $\frac{1}{5}$ এবং 70 টাকা, তৃতীয় পুত্রকে মোট অর্থের $\frac{1}{6}$ এবং 80 টাকা দিয়া দেখিলেন যে, আর 1800 টাকা অবশিষ্ট আছে। প্রথমে তাঁহার কত টাকা ছিল ?

29. A এবং Bএর বয়সের সমষ্টি 48 বৎসর। যদি B A অপেক্ষা 12 বৎসরের ছোট হয়, তবে কাহার বয়স কত ?

30. পিতা ও পুত্রের বর্ত্তমান বয়সের সমষ্টি 50 বৎসর। পিতার 20 বৎসর বয়সে পুত্রের জন্ম হইলে পুত্রের বয়স নির্ণয় কর।

31. 500 টাকা A এবং Bএর মধ্যে এরূপে ভাগ করিয়া দাও, যেন A B হইতে 100 টাকা বেশী পায়।

32 পিতা এবং পুত্রের বয়সের সমষ্টি 72 বৎসর। পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 7 গুণ অপেক্ষা 8 বৎসর বেশী হইলে উহাদের প্রত্যেকের বয়স নির্ণয় কর।

33. দশ বৎসর পূর্ব্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের তিনগুণ ছিল, এখন পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হইলে তাহাদের বর্ত্তমান বয়স নির্ণয় কর।

34. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 125; একটি অপরটির 4 গুণ হইলে ক্ষুদ্রতর সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

35. একটি স্কুলের ছাত্র এবং শিক্ষকের মোটসংখ্যা শিক্ষকের সংখ্যার 24 গুণ। 40 জন নূতন ছাত্র ভর্ত্তি হওয়াতে শিক্ষকের সংখ্যা ছাত্র ও শিক্ষকের মোটসংখ্যার $\frac{3}{80}$ হইল। ঐ স্কুলে শিক্ষকের সংখ্যা কত ?

36. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 18, বৃহত্তর সংখ্যার 4 গুণ ক্ষুদ্রতর সংখ্যার 6 গুণ হইতে 2 বেশী হইলে সংখ্যা-দুইটি নির্ণয় কর। [ঢা. প্র., '26]

37. পিতা ও পুত্রের বয়সের সমষ্টি 60 বৎসর। পিতার বয়সের 2 গুণ পুত্রের বয়সের 4 গুণ হইতে 12 বৎসর বেশী হইলে কাহার বয়স কত ?

38. 80কে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর, যেন বৃহত্তর অংশের 6 গুণ ক্ষুদ্রতর অংশের 10 গুণ অপেক্ষা 16 বেশী হয়।

39. Aর টাকার $\frac{1}{6}$ Bর টাকার $\frac{1}{4}$এর সমান। Aএর নিকট Bএর অপেক্ষা 10 টাকা বেশী থাকিলে কাহার কত টাকা আছে?

40. A এবং B তাহাদের মধ্যে 200 টাকা ভাগ করিয়া লওয়ার পর A তাহার অংশ হইতে Bএর অংশের সমান টাকা Bকে দিয়া দেখিল যে, Bএর টাকা তাহার টাকার 4 গুণ হইয়াছে। প্রথমে প্রত্যেকে কত টাকা পাইয়াছিল?

41. 70কে এরূপ দুইভাগে বিভক্ত কর, যেন এক অংশের 3 গুণ এবং অপর অংশের 6 গুণের সমষ্টি 300 হয়।

42. পিতা পুত্র অপেক্ষা 30 বৎসরের বড়। একবৎসর পূর্ব্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের চারিগুণ ছিল। তাহাদের বর্ত্তমান বয়স নির্ণয় কর। [এ. প্র., 1915]

43. একখানি বাড়ি এবং বাগানের মোটমূল্য 12500 টাকা। বাড়ির মূল্য বাগানের মূল্যের 8 গুণ অপেক্ষা 1000 টাকা কম হইলে বাগানের মূল্য কত?

44. 120 জন বালক এবং বালিকার মধ্যে 400 লেবু ভাগ করিয়া দেওয়াতে প্রত্যেক বালক 3টি এবং প্রত্যেক বালিকা 4টি লেবু পাইল। বালক এবং বালিকার সংখ্যা কত?

45. A এবং Bএর নিকট মোট 340 টাকা আছে। Aর নিকট যত টাকা আছে, Bএর টাকায় তত আনা থাকিলে কাহার নিকট কত টাকা আছে?

46. A এবং Bএর নিকট মোট 840 পাউণ্ড আছে। Aএর নিকট যত পাউণ্ড আছে, Bএর অংশে তত শিলিং থাকিলে কাহার নিকট কত আছে?

47. 39 ফুট দীর্ঘ একটি বাঁশকে এরূপ দুইটি অংশে বিভক্ত করা হইল, যেন এক অংশের ফুটের সংখ্যা অপর অংশের ইঞ্চির সংখ্যার সমান হয়। অংশ দুইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

48. তিনটি ক্রমিক সংখ্যার সমষ্টি 483 হইলে সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর।

49. 184 টাকা A, B এবং Cএর মধ্যে এরূপে ভাগ করিয়া দাও, যেন B A হইতে 4 টাকা এবং C A হইতে 12 টাকা বেশী পায়।

50. A, B এবং Cএর নিকট মোট 72 টাকা আছে। Aএর টাকার 4 গুণ Bএর টাকার 3 গুণ এবং Cএর টাকার 6 গুণ পরস্পর সমান হইলে কাহার নিকট কত টাকা আছে?

সপ্তদশ অধ্যায়**

অভেদ (Identity)

146. অভেদ (Identity)।

দুইটি রাশি উহাদের অন্তর্গত সংখ্যা-সূচক অক্ষর বা অক্ষরসমূহের যে-কোন মানের জন্য সমান হইলে রাশিদ্বয়ের সমতাকে **অভেদ সমীকরণ (Identical Equation)** বা সংক্ষেপে **অভেদ (Identity)** বলা হয়। রাশি-দুইটির মধ্যে '=' চিহ্ন অথবা '≡'* চিহ্ন বসাইয়া এই সমতা সূচিত করা হয়। চিহ্নের উভয় পার্শ্বস্থ রাশিদ্বয়কে অভেদের **পার্শ্ব** বা **পক্ষ (Side, Member)** বলা হয়; তন্মধ্যে বাম-পার্শ্বে অবস্থিত রাশিকে **বামপক্ষ (Left Side)** এবং দক্ষিণপার্শ্বে অবস্থিত রাশিকে **দক্ষিণপক্ষ (Right Side)** বলা হয়।

কোন অভেদ প্রমাণ করিতে (to prove, to establish) বলিলে উহার উভয় পক্ষ সমান প্রমাণ করিতে হয়।

$2x = x + x$, বা '$2x \equiv x + x$' একটি অভেদ; (কারণ xএর যে-কোন মান লইয়া পরীক্ষা করিলে '$2x$' এবং '$x+x$' পরস্পর সমান দেখা যাইবে)। $2x$ ইহার বামপক্ষ এবং $x+x$ ইহার দক্ষিণপক্ষ।

এইরূপ '$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$' একটি অভেদ; $(a+b)(a-b)$ ইহার বাম-পক্ষ এবং $a^2 - b^2$ ইহার দক্ষিণপক্ষ।

দ্রষ্টব্য। A = B = C দ্বারা বুঝায় যে, A, B এবং C পরস্পর সমান।

এইরূপ X = Y = Z = W বুঝায় যে, X, Y, Z এবং W পরস্পর সমান।

147. অভেদ-প্রমাণের কার্য্য-প্রণালী। অভেদ প্রমাণ করিতে হইলে উহার উভয় পক্ষের সমতা প্রমাণ করিতে হয়। বীজগণিতীয় প্রক্রিয়া এবং সূত্র-গুলির সাহায্যে এক পক্ষকে ক্রমাগত পরিবর্ত্তন দ্বারা অপর পক্ষের আকারে পরিবর্ত্তিত করিলেই সাধারণতঃ এই প্রমাণ-কার্য্য সম্পন্ন হয়। প্রমাণের জন্য নিম্নলিখিত কার্য্য-প্রণালী অবলম্বন করিবে:

(1) অভেদের বামপক্ষকে দক্ষিণপক্ষের সমান দেখানই সুষ্ঠু, তবে এক পক্ষ অপর পক্ষ অপেক্ষা অধিকতর জটিল হইলে জটিলতর পক্ষকে অপর পক্ষের সমান দেখাইবে, অর্থাৎ অপর পক্ষের আকারে পরিণত করিবে।

---

* এই চিহ্নের নাম **অভেদ-চিহ্ন** (Sign of identity)।

** সূত্রাবলীর প্রয়োগ-শিক্ষার পক্ষে সুবিধা হইবে বলিয়া বর্ত্তমান অধ্যায়টি এইস্থলে সন্নিবিষ্ট হইল। তবে আবশ্যক হইলে ইহা প্রথমবার পাঠে পরিত্যক্ত হইতে পারে।

(2) অভেদের উভয় পক্ষ জটিল হইলে প্রত্যেক পক্ষকে সরল করিয়া একই আকারে পরিণত করিবে। তাহা হইলে অভেদের উভয় পক্ষের সমতা প্রমাণিত হইবে।

(3) কখনও-কখনও পক্ষান্তরকরণ দ্বারা সহজে প্রমাণ করা যায় যে, অভেদের উভয় পক্ষ পরস্পর সমান। যথা, 'উভয় পক্ষের অন্তরফল $=0$' প্রমাণ করিয়া পক্ষদ্বয়ের সমতা সহজে প্রতিপন্ন হয়।

যদি অভেদের পক্ষদ্বয়ে দুই বা তদধিক পদবিশিষ্ট রাশি থাকে, তবে এই রাশিগুলির পরিবর্ত্তে এক-একটি অক্ষর বসাইয়া উভয়কে সরল আকারে পরিবর্ত্তিত করিলে অনেক স্থানে প্রমাণের সুবিধা হয়। প্রয়োজন হইলে উল্লিখিত একাধিক প্রণালী সম্মিলিতভাবে প্রয়োগ করিবে। পরবর্ত্তী অণুচ্ছেদগুলিতে প্রদত্ত উদাহরণগুলি হইতে কার্য্যপ্রণালী সুস্পষ্ট হইবে।

অভেদ প্রমাণ করিবার জন্য নিম্নলিখিত সূত্রগুলির বহুস্থলে প্রয়োজন হয়:

148. সূত্র: $(b-c)+(c-a)+(a-b)=0$.

প্রমাণ। $(b-c)+(c-a)+(a-b)=b-c+c-a+a-b=0$.

149. সূত্র: $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0$.

প্রমাণ। $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)$

$$=ab-ac+bc-ab+ac-bc=0.$$

150. সূত্র: $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$
$=\frac{1}{2}\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$.

প্রমাণ। $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$

$$=\tfrac{1}{2}\{2a^2+2b^2+2c^2-2bc-2ca-2ab\}.$$

[2 দ্বারা গুণ ও ভাগ করিয়া]

$$=\tfrac{1}{2}\{(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)+(a^2-2ab+b^2)\}$$

[পদগুলিকে সজ্ঘবদ্ধ করিয়া]

$$=\tfrac{1}{2}\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}.$$

151. অভেদ-বিষয়ক বিবিধ উদাহরণ।

উদাহরণ 1. প্রমাণ কর:

$(a+x)(b-c)+(b+x)(c-a)+(c+x)(a-b)=0$.

এস্থলে বামপক্ষকে দক্ষিণপক্ষের সমান দেখান হইবে।

$$\text{বামপক্ষ} = \{a(b-c)+x(b-c)\}+\{b(c-a)+x(c-a)\}+$$
$$\{c(a-b)+x(a-b)\}, \text{ [গুণ দ্বারা]}$$
$$=\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}+\{x(b-c)+x(c-a)+x(a-b)\}$$
[পদগুলি সাজাইয়া]
$$=\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}+x\{(b-c)+(c-a)+(a-b)\}$$
$$=0+x.0=0.$$

উদাহরণ 2. প্রমাণ কর যে,

$$(ax-by)^2+(ay+bx)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2).$$

$$\text{বামপক্ষ}=(ax-by)^2+(ay+bx)^2$$
$$=(a^2x^2-2abxy+b^2y^2)+(a^2y^2+2abxy+b^2x^2)$$
$$=(a^2x^2+b^2x^2)+(a^2y^2+b^2y^2), \text{ [সরল করিয়া এবং সাজাইয়া]}$$
$$=x^2(a^2+b^2)+y^2(a^2+b^2)$$
$$=(a^2+b^2)(x^2+y^2).$$

উদাহরণ 3. প্রমাণ কর যে, $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
$$=(x+a)^2(b-c)+(x+b)^2(c-a)+(x+c)^2(a-b).$$

এস্থলে দক্ষিণপক্ষ অধিকতর জটিল; কাজেই উহাকেই বামপক্ষের সমান প্রদর্শিত হইল।

$$\text{দক্ষিণপক্ষ}=(x+a)^2(b-c)+(x+b)^2(c-a)+(x+c)^2(a-b)$$
$$=(x^2+2xa+a^2)(b-c)+(x^2+2xb+b^2)(c-a)$$
$$+(x^2+2xc+c^2)(a-b)$$
$$=\{x^2(b-c)+2xa(b-c)+a^2(b-c)\}+\{x^2(c-a)+2xb(c-a)$$
$$+b^2(c-a)\}+\{x^2(a-b)+2xc(a-b)+c^2(a-b)\}$$
$$=x^2\{(b-c)+(c-a)+(a-b)\}+2x\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}$$
$$+\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\}$$
[পদগুলিকে xর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া]
$$=x^2.0+2x.0+\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\}, \quad \text{[অনু. 149}$$
$$=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b). \quad \text{এবং 148]}$$

উদাহরণ 4. প্রমাণ কর যে,

$$(2x-3y)^2+2(2x-3y)(3y-x)+(3y-x)^2=x^2.$$

এস্থলে বামপক্ষ জটিল। অতএব উহাকেই ডানপক্ষের সমান দেখান হইল।

বামপক্ষ $=(2x-3y)^2+2(2x-3y)(3y-x)+(3y-x)^2$ [অনু. 75]

$=\{(2x-3y)+(3y-x)\}^2,$

$=\{x\}^2=x^2.$

উদাহরণ 5. প্রমাণ কর যে,

$(5x-7y)^3+3(5x-7y)^2(9y-5x)+3(5x-7y)(9y-5x)^2+(9y-5x)^3$
$=(2x+5y)^3-3(2x+5y)^2(2x+3y)+3(2x+5y)(2x+3y)^2-(2x+3y)^3.$

এস্থলে উভয় পক্ষই জটিল ; অতএব প্রথমে উভয় পক্ষকে সরল করিয়া লওয়া হইল।

অনু. 100 অনুসারে বামপক্ষ $=\{(5x-7y)+(9y-5x\}^3=\{2y\}^3=8y^3.$

আবার অনু. 101 অনুসারে দক্ষিণপক্ষ $=\{(2x+5y)-(2x+3y)\}^3$

$=\{2y\}^3=8y^3.$

অতএব বামপক্ষ = দক্ষিণপক্ষ, (প্রত্যেকেই $8y^3$এর সমান বলিয়া)।

উদাহরণ 6. প্রমাণ কর যে,

$$(x+y)^2-x^2+z^2-(y+z)^2=2x(y+z)-2(x+y)z.$$

যেহেতু $(x+y)^2+2(x+y)z+z^2=\{(x+y)+z\}^2=(x+y+z)^2$

এবং $x^2+2x(y+z)+(y+z)^2=\{x+(y+z)\}^2=(x+y+z)^2$;

অতএব $(x+y)^2+2(x+y)z+z^2=x^2+2x(y+z)+(y+z)^2.$

পক্ষান্তরকরণ দ্বারা

$$(x+y)^2-x^2+z^2-(y+z)^2=2x(y+z)-2(x+y)z.$$

অথবা বামপক্ষ − দক্ষিণপক্ষ

$=\{(x+y)^2-x^2+z^2-(y+z)^2\}-\{2x(y+z)-2(x+y)z\}$

$=(x+y)^2-x^2+z^2-(y+z)^2-2x(y+z)+2(x+y)z.$

$=\{(x+y)^2+2(x+y)z+z^2\}-\{x^2+2x(y+z)+(y+z)^2\}$

$=\{(x+y)+z\}^2-\{x+(y+z)\}^2=(x+y+z)^2-(x+y+z)^2=0.$

অতএব বামপক্ষ = দক্ষিণপক্ষ।

উদাহরণ 7. প্রমাণ কর যে, $(x+k)^2+(y+k)^2+(z+k)^2-(y+k)\times(z+k)-(z+k)(x+k)-(x+k)(y+k)=x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy.$

মনে কর, $x+k=a,\ y+k=b,\ z+k=c.$

তাহা হইলে বামপক্ষ $=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$

$=\frac{1}{2}[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2],$ [অনু. 150]

$=\frac{1}{2}[\{(y+k)-(z+k)\}^2+\{(z+k)-(x+k)\}^2+\{(x+k)-(y+k\}^2]$
$=\frac{1}{2}[(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2]$
$=x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy.$ [অনু. 150]

উদাহরণ 8. প্রমাণ কর যে, $(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$
$=2(a-b)(a-c)+2(b-c)(b-a)+2(c-a)(c-b).$

মনে কর, $b-c=x$, $c-a=y$, $a-b=z$.

তাহা হইলে বামপক্ষ $=x^2+y^2+z^2$

এবং দক্ষিণপক্ষ $=2z(-y)+2x(-z)+2y(-x)$
$=-2yz-2zx-2xy.$

অতএব বামপক্ষ − দক্ষিণপক্ষ $=(x^2+y^2+z^2)-\{-2yz-2zx-2xy\}$
$=x^2+y^2+z^2+2yz+2zx+2xy$
$=(x+y+z)^2,$ [অনু. 98, উদাহরণ 1]
$=\{(b-c)+(c-a)+(a-b)\}^2$
$=0^2=0.$ [অনু. 148]

অতএব বামপক্ষ = দক্ষিণপক্ষ।

দ্রষ্টব্য। অন্যপ্রকার প্রমাণের জন্য পরবর্তী উদাহরণের (ii) দেখ।

উদাহরণ 9. $a+b+c=0$ হইলে প্রমাণ কর যে,

(i) $b^2+bc+c^2=c^2+ca+a^2=a^2+ab+b^2$;

(ii) $a^2+b^2+c^2=-2(bc+ca+ab)$;

(iii) $a^3+b^3+c^3=3abc$;

(iv) $\frac{a}{b^2c^2}+\frac{b}{c^2a^2}+\frac{c}{a^2b^2}=\frac{3}{abc}.$

প্রমাণ। (i) $(b^2+bc+c^2)-(c^2+ca+a^2)=b^2+bc+c^2-c^2-ca-a^2$
$=(b^2-a^2)+(bc-ca)$
$=(b-a)(b+a)+c(b-a)$
$=(b-a)(b+a+c)$ অর্থাৎ $(b-a)(a+b+c)$
$=(b-a)\times 0=0.$ [যেহেতু $a+b+c=0$]

অতএব $b^2+bc+c^2=c^2+ca+a^2.$

এইরূপে প্রমাণ করিতে পারা যায় যে, $c^2+ca+a^2=a^2+ab+b^2.$

অতএব $b^2+bc+c^2=c^2+ca+a^2=a^2+ab+b^2.$

(ii) $a^2+b^2+c^2-\{-2(bc+ca+ab)\}$.
$=a^2+b^2+c^2+2(bc+ca+ab)=(a+b+c)^2$
$=0.$ (যেহেতু $a+b+c=0$)

অতএব $a^2+b^2+c^2=-2(bc+ca+ab)$.

(iii) $a+b+c=0$. পক্ষান্তর করিয়া $c=-(a+b)$.

অতএব $a^3+b^3+c^3=a^3+b^3+\{-(a+b)\}^3$
$=a^3+b^3-(a+b)^3$
$=a^3+b^3-\{a^3+b^3+3ab(a+b)\}$
$=-3ab(a+b)=3ab\{-(a+b)\}=3abc.$

(iv) $\frac{a}{b^2c^2}+\frac{b}{c^2a^2}+\frac{c}{a^2b^2}=\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2b^2c^2}=\frac{3abc}{a^2b^2c^2}$ [$\because a+b+c=0$]
$=\frac{3}{abc}$.

152. উদাহরণ 9এর অভেদগুলি $a+b+c=0$ হইলে সত্য। এইরূপ অভেদকে **সাপেক্ষ অভেদ (conditional identity)** বলে। সাপেক্ষ অভেদের পক্ষদ্বয়ের সমতা এক বা একাধিক সর্তের উপর নির্ভর করে।

উদাহরণ 10. $2s=a+b+c$ হইলে প্রমাণ কর যে,
$s^2+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)+(s-a)(s-b)=bc+ca+ab.$

বামপক্ষ $=s^2+\{s^2-(b+c)s+bc\}+\{s^2-(c+a)s+ca\}+\{s^2-(a+b)s+ab\}$
$=4s^2-\{(b+c)+(c+a)+(a+b)\}s+(bc+ca+ab)$
[সরল করিয়া এবং sএর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া]
$=4s^2-2(a+b+c)s+(bc+ca+ab)$
$=4s^2-2.2s.s+(bc+ca+ab)$, [যেহেতু $a+b+c=2s$]
$=4s^2-4s^2+(bc+ca+ab)=bc+ca+ab.$

প্রশ্নমালা 62

প্রমাণ কর যে,

1. $(b+c)(b-c)+(c+a)(c-a)+(a+b)(a-b)=0$
2. $(x+b+c)(b-c)+(x+c+a)(c-a)+(x+a+b)(a-b)=0$

3. $\{a^2(b+c)+xa\}(b-c)+\{b^2(c+a)+xb\}(c-a)+\{c^2(a+b)+xc\}\times$
$(a-b)=0$

4. $(y-z)(y^2+yz+z^2)+(z-x)(z^2+zx+x^2)+(x-y)(x^2+$
$xy+y^2)=0$

5. $(ax+by)^2-(ay+bx)^2=(a^2-b^2)(x^2-y^2)$

6. $\{(ax+by)^2+(ay-bx)^2\}\{(ax+by)^2-(ay+bx)^2\}$
$=(a^4-b^4)(x^4-y^4).$ [ক. প্র., 1859]

7. $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$
$=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)$
$=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)$

8. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
$=bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$
$=-\{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\}$

9. $(a^2-bc)(b-c)+(b^2-ca)(c-a)+(c^2-ab)(a-b)=0.$

10. $(a^2-bc)(b+c)+(b^2-ca)(c+a)+(c^2-ab)(a+b)=0.$

11. (i) $(a^2+x)(b-c)+(b^2+x)(c-a)+(c^2+x)(a-b)$
$=(bc+y)(b-c)+(ca+y)(c-a)+(ab+y)(a-b)$
$=\{(a+z)(c^2-b^2)+(b+z)(a^2-c^2)+(c+z)(b^2-a^2)\}.$

(ii) $(a^2+xa+y)(b-c)+(b^2+xb+y)(c-a)+(c^2+xc+y)\times$
$(a-b)=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

12. $(x+2y)^2+2(x+2y)z+z^2$
$=(x+y)^2+2(x+y)(y+z)+(y+z)^2$

13. $(2x+y)^2-2(2x+y)(y+z)+(y+z)^2$
$=(x+y-2z)^2+2(x+y-2z)(x-y+z)+(x-y+z)^2$

14. $(a+b)^2+2(a+b)(c+d)+(c+d)^2$
$=(a+d)^2+2(a+d)(b+c)+(b+c)^2$

15. $(2a-3b)^3+3(2a-3b)^2(2b-a)+3(2a-3b)(2b-a)^2-(2b-a)^3$
$=(3a-2b)^3-3(3a-2b)^2(2a-b)+3(3a-2b)(2a-b)^2-(2a-b)^3$

16. $(x+y)^3+3(x+y)^2(a+b)+3(x+y)(a+b)^2+(a+b)^3$
$=(x+a)^3+3(x+a)^2(y+b)+3(x+a)(y+b)^2+(y+b)^3$

17. $(m+n)^2-2(m+p)n+p^2=(m+p)^2-2(m+n)p+n^2$

18. $(a+b)^2-(a+c)^2+(c+d)^2-(b+d)^2$
$=2\{(a+c)(b+d)-(a+b)(c+d)\}$

19. $(a+b)^3-(b+c)^3+(c+d)^3-(a+d)^3$
$=3(a+b+c+d)\{(b+c)(a+d)-(a+b)(c+d)\}$

20. $(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2-(z+x)(x+y)-(x+y)(y+z)$
$-(y+z)(z+x)=x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$

21. $(y+z-x)^2+(z+x-y)^2+(x+y-z)^2-(z+x-y)(x+$
$y-z)-(x+y-z)(y+z-x)-(y+z-x)(z+x-y)$
$=4(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy).$

$a+b+c=0$ হইলে 22-25 প্রশ্নে প্রমাণ কর যে,

22. $a(a+b)(a+c)=b(b+c)(b+a)=c(c+a)(c+b)$

23. $bc(b+c)=ca(c+a)=ab(a+b)$

24. $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+3abc=0$

25. $(bc+ca+ab)^2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2.$

26. $(y-z)^2-(z-x)(x-y)=(z-x)^2-(x-y)(y-z)$
$=(x-y)^2-(y-z)(z-x)$

27. $(y-z)^2+(y-z)(z-x)+(z-x)^2$
$=(z-x)^2+(z-x)(x-y)+(x-y)^2$
$=(x-y)^2+(x-y)(y-z)+(y-z)^2$

$s=a+b+c$ হইলে 28-30 প্রশ্নে প্রমাণ কর যে,

28. $(as+bc)(bs+ca)(cs+ab)=(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2$

29. $(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)+(s-a)(s-b)-s^2=bc+ca+ab$

30. $(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2-s^2=a^2+b^2+c^2.$

$2s=a+b+c$ হইলে 31-34 প্রশ্নে প্রমাণ কর যে,

31. $s(s-a)+(s-b)(s-c)=bc$

32. $s(s-a)+s(s-b)+s(s-c)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)+$
$(s-a)(s-b)=bc+ca+ab$

33. $s^2+(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2=a^2+b^2+c^2$

34. $2(s-b)(s-c)+2(s-c)(s-a)+2(s-a)(s-b)$
$=2s^2-a^2-b^2-c^2$

[সঙ্কেত : 'বামপক্ষ − দক্ষিণপক্ষ = 0' প্রমাণ কর।]

35. $s=a+b+c$ হইলে প্রমাণ কর যে,
$(s-3a)^3+(s-3b)^3+(s-3c)^3=3(s-3a)(s-3b)(s-3c)$
[সঙ্কেত : $(s-3a)+(s-3b)+(s-3c)=0$.]

36. $3s=a+b+c$ হইলে প্রমাণ কর যে,
$(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3=3(s-a)(s-b)(s-c)$.

37. $2s=a+b+c$ হইলে প্রমাণ কর যে,
$(s-a)^3+(s-b)^3+3(s-a)(s-b)c=c^3$

[সঙ্কেত : $(s-a)+(s-b)=c$.]

38. $yz+zx+xy=0$ হইলে প্রমাণ কর যে,
$y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2=-2xyz(x+y+z)$.
$x=a^2-bc,\ y=b^2-ca,\ z=c^2-ab$ হইলে 39-40 প্রশ্নে দেখাও যে,

39. $bx+cy+az=0=cx+ay+bz$ [পা. প্র., 1900]

40. $\frac{x^2-yz}{a}=\frac{y^2-zx}{b}=\frac{z^2-xy}{c}=a^3+b^3+c^3-3abc$.

দেখাও যে,

41. $a+b(1-a)+c(1-a)(1-b)=1-(1-a)(1-b)(1-c)$

[সঙ্কেত : বামপক্ষে 1 যোগ এবং বিয়োগ করিলে বামপক্ষ
$=1-1+a+b(1-a)+c(1-a)(1-b)$
$=1-\{\overline{(1-a)-b(1-a)}-c(1-a)(1-b)\}$
$=1-\{(1-c)(1-b)-c(1-a)(1-b)\}$
$=1-(1-a)(1-b)(1-c)$].

42. $a+b(1+a)+c(1+a)(1+b)=(1+a)(1+b)(1+c)-1$

[সঙ্কেত : বামপক্ষে 1 যোগ এবং বিয়োগ কর।]

43. $a+b(1-a)+c(1-a)(1-b)+d(1-a)(1-b)(1-c)$
$=1-(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$.

44. $a+b(1+a)+c(1+a)(1+b)+d(1+a)(1+b)(1+c)$
$=(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)-1.$

45. $\frac{y-z}{yz}+\frac{z-x}{zx}+\frac{x-y}{xy}=0$

46. $\frac{x(y^2-z^2)}{yz}+\frac{y(z^2-x^2)}{zx}+\frac{z(x^2-y^2)}{xy}=0$

47. $\frac{a^2-(b-c)^2}{(a+b)^2-c^2}+\frac{b^2-(c-a)^2}{(b+c)^2-a^2}+\frac{c^2-(a-b)^2}{(c+a)^2-b^2}=1$

48. $yz+zx+xy=0$ হইলে দেখাও যে,

$$\frac{x^2}{x^2-yz}+\frac{y^2}{y^2-zx}+\frac{z^2}{z^2-xy}=1.$$

অষ্টাদশ অধ্যায়

স্তম্ভলেখ এবং উহার প্রয়োগ

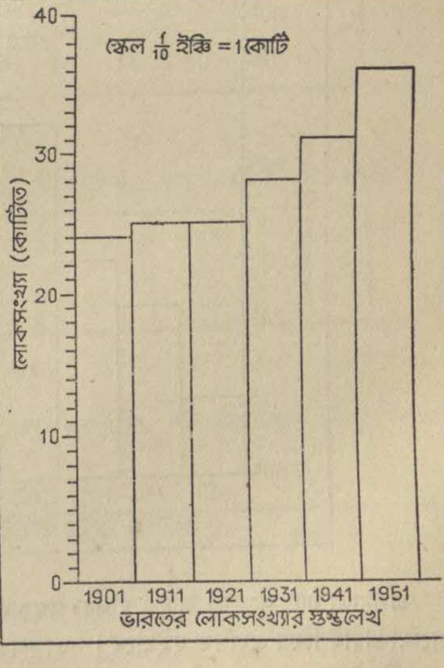
(Column-graphs)

153. স্তম্ভলেখ-অঙ্কন-প্রণালী এবং উহার প্রয়োগের বিষয় পূর্ব্বে অষ্টম অধ্যায়ে আলোচিত হইয়াছে। এস্থলে ইহার আরও কয়েকটি দৃষ্টান্ত প্রদত্ত হইল।

উদাহরণ 1. 1901, 1911, 1921, 1931, 1941 এবং 1951এর লোকগণনায় (Censusএ) ভারতের মোট লোকসংখ্যার একটি তালিকা নিম্নে প্রদত্ত হইল :

সাল	লোকসংখ্যা (কোটিতে)	সাল	লোকসংখ্যা (কোটিতে)
1901	24	1931	28
1911	25	1941	31
1921	25	1951	36

স্তম্ভলেখ দ্বারা ইহা প্রকাশ কর।



ভারতের লোকসংখ্যার স্তম্ভলেখ

$\frac{1}{10}$ ইঞ্চি দ্বারা 1 কোটি সূচিত করিয়া স্তম্ভলেখটি অঙ্কিত হইয়াছে। এস্থলে স্তম্ভগুলির মধ্যে কোন ব্যবধান রাখা হয় নাই। ইহাতে লোকসংখ্যার পরিবর্ত্তন চোখে সহজে ধরা পড়ে।

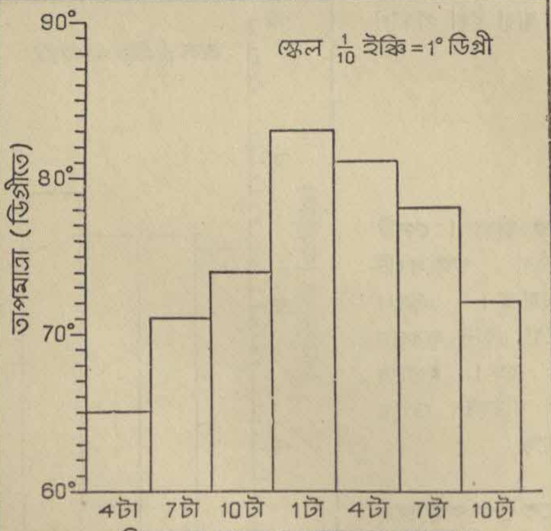
লেখ হইতে দেখা যাইতেছে যে, ভারতের লোকসংখ্যা ক্রমশঃ বৃদ্ধি পাইতেছে।

উদাহরণ 2. 8ই নভেম্বর কোন এক বিদ্যালয়গৃহে তাপ-মাত্রা নিম্নলিখিতরূপ ছিল :

	সকাল						
সময়	4টা	7টা	10টা	1টা	4টা	7টা	10টা
তাপ	65°	71°	74°	83°	81°	78°	72°

ইহা স্তম্ভলেখ অঙ্কন করিয়া দেখাও।

$\frac{1}{10}$ ইঞ্চি দ্বারা 1° সূচিত করিয়া স্তম্ভলেখ অঙ্কিত হইয়াছে। এস্থলেও স্তম্ভগুলির মধ্যে কোন ব্যবধান রাখা হয় নাই। ইহাতে তাপমাত্রার হ্রাস-বৃদ্ধি চোখে সহজে ধরা পড়ে।



বিদ্যালয় গৃহের তাপমাত্রার স্তম্ভলেখ

তাপমাত্রা 60° অপেক্ষা অধিক বলিয়া স্তম্ভগুলির যে-যে অংশ 60° চিহ্নের উপরে আছে, তাহাই চিত্রে প্রদর্শিত হইয়াছে। তাপমাত্রাগুলি তুলনা করিবার পক্ষে এই অংশগুলিরই প্রয়োজন।

154. স্তম্ভলেখ দ্বারা কোন রাশি-সমাবেশে রাশিগুলির মান সহজে তুলনা করা যায় ; কিন্তু উহাদের মান-পরিবর্ত্তনের মধ্যে যদি কোন রকম নিয়ম থাকে, তাহা এইরূপ লেখ হইতে ধরা পড়ে না।

বিভিন্ন প্রণালীতে 'লেখ' অঙ্কন করিয়া কি উপায়ে এই নিয়মও নির্ণয় করা যায়, তাহা পরে আলোচিত হইবে।

প্রশ্নমালা 63.

1. নিম্নে ভারতে 1944-50 সালে উৎপন্ন চিনির একটি তালিকা প্রদত্ত হইল :

সাল	1944	1945	1946	1947	1948	1949	1950
লক্ষ টনের সংখ্যা	9	10	10	11	10	10	11

ইহাকে স্তম্ভলেখাকারে প্রকাশ কর।

2. নিম্নে ভারতে 1948-52 সালে রেজেষ্টীকৃত বেকার-সংখ্যা প্রদর্শিত হইল :

সাল	1948	1949	1950	1951	1952
বেকার (লক্ষে)	9	11	12	14	15

একটি স্তম্ভলেখ দ্বারা ইহা প্রকাশ কর।

3. একটি ম্যালেরিয়া-রোগীর কোন একদিনের শরীরের উত্তাপ নিম্নলিখিতরূপ ছিল :

সকাল

সময়	4টা	7টা	10টা	1টা	4টা	7টা	10টা
উত্তাপ	103°	102°	99°	101°	104°	102°	101°

ইহা স্তম্ভলেখাকারে প্রকাশ কর।

4. 1953 সালে কয়েকটি বিভিন্ন দেশের মোট উৎপন্ন খাদ্যের পরিমাণ নিম্নে লিখিত হইল :

দেশ	রাশিয়া	আমেরিকা	কানাডা	ভারত	চীন	ফ্রান্স
খাদ্য (কোটি বুশেলে)	140	87	42	33	30	28

ইহা স্তম্ভলেখাকারে দেখাও।

5. এভারেষ্ট অভিযানে বিভিন্ন সময়ে যে উচ্চতা পর্য্যন্ত আরোহণ করা সম্ভব হইয়াছিল, তাহা নিম্নে লিপিবদ্ধ হইল :

সাল	1921	1922	1924	1933	1936	1938	1952	1953
উচ্চতা (হাজার ফুটে)	22·8	27·2	28·2	28·4	28·7	27·3	27	29·002

ইহা স্তম্ভলেখ দ্বারা প্রদর্শন কর।

6. নিম্নে পৃথিবীর সর্ব্বোচ্চ কয়েকটি প্রাসাদের উচ্চতা লিপিবদ্ধ হইল :

প্রাসাদের নাম	উচ্চতা (ফুটে)
মস্কোর সোভিয়েট প্যালেস	1300
এম্পায়ার ষ্টেট প্রাসাদ (আমেরিকা)	1250
ক্রাইস্লার প্রাসাদ ঐ	1046
প্যারিসের এফেল টাওয়ার	985
ম্যানহাটান ব্যাঙ্কের প্রাসাদ (আমেরিকা)	927
ক্রেন টাওয়ার ”	880
রকফেলার সেন্টার ”	850

ইহা স্তম্ভলেখাকারে দেখাও।

7. নিম্নে 1948-53 সালে ভারতে উৎপন্ন মোট চায়ের পরিমাণ লিপিবদ্ধ হইল :

সাল	1948	1949	1950	1951	1952	1953
চা (কোটি পাউণ্ডে)	57	59	61	63	62	61

ইহা স্তম্ভলেখাকারে দেখাও।

8. নিম্নে বিভিন্ন দেশের শতকরা শিক্ষিতের সংখ্যা প্রদর্শিত হইল :

কানাডা	96	পোলণ্ড	79	জাপান	86
রাশিয়া	90	তুরস্ক	45	গ্রীস	68
ইটালী	81	ভারত	17	স্পেন	69

ইহা স্তম্ভলেখাকারে দেখাও।

9. নিম্নে পৃথিবীর কয়েকটি জনবহুল নগরের লোকসংখ্যা লক্ষে লিপিবদ্ধ হইল :

লণ্ডন	82 লক্ষ	বার্লিন	43 লক্ষ	প্যারিস	27 লক্ষ
নিউইয়র্ক	80 „	মস্কো	41 „	কলিকাতা	42 „
টোকিও	41 „	লেনিনগ্রাদ	32 „	চিকাগো	34 „

ইহা স্তম্ভলেখাকারে দেখাও।

———

ঊনবিংশ অধ্যায়

বিন্দু-অঙ্কন

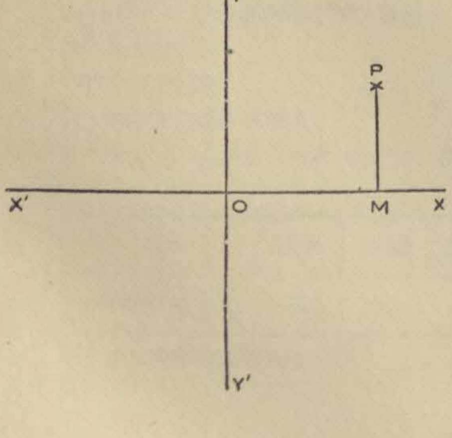
155. বিন্দু-অঙ্কন (Plotting of Points)।

পূর্ব্বে অণুচ্ছেদ 33-এ প্রদর্শিত হইয়াছে যে, সংখ্যাকে জ্যামিতিক উপায়ে বিন্দু-দ্বারা প্রকাশ করা যায়। ইহাকে সংখ্যার লৈখিক পরিচয় (Graphical representation) বলে। লৈখিক উপায়ে (graphical methodএ) বীজগণিতীয় নিয়মগুলি কোন-কোন স্থলে সহজে সুস্পষ্টভাবে প্রমাণ করা যায় [অণু. 36 (গ) দ্রষ্টব্য] এবং বীজগণিতের সূত্রগুলির উত্তম উপলব্ধি হয়। পরে প্রদর্শিত হইবে যে, লৈখিক উপায়ে বীজগণিতীয় সমীকরণের বীজও সহজে নির্ণয় করা যায় ; ইহার ভূমিকা-হিসাবে এস্থলে প্রথমতঃ সংখ্যা দ্বারা কিরূপে এক সমতলে অবস্থিত বিন্দুগুলির অবস্থান নির্ণয় করা যায়, তাহা বর্ণিত হইবে।

156. অক্ষ (Axis) : স্থানাঙ্ক (Co-ordinates) : সংখ্যা দ্বারা বিন্দুর অবস্থান-নির্ণয়।

মনে কর, একখানি সমতল কাগজের উপর কোন বিন্দু P-এর অবস্থান নির্ণয় করিতে হইবে। কাগজখানির উপর পরস্পর লম্বভাবে X′OX এবং Y′OY সরল রেখাদ্বয় অঙ্কিত কর। P হইতে X′OXএর উপর PM লম্ব অঙ্কিত কর (চিত্র)। চিত্র হইতে সুস্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, OM এবং MP-এর দৈর্ঘ্য জানা থাকিলে P-বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করা যায়।

X′OX সরলরেখাকে x অক্ষ (x-axis), Y′OY সরলরেখাকে y-অক্ষ (y-axis) এবং ইহাদের ছেদবিন্দু Oকে **মূলবিন্দু** (**Origin**) বলা হয়।



OM এবং MPকে P-বিন্দুর **স্থানাঙ্ক** (**co-ordinates**) বলে ; ইহাদের মধ্যে OMকে P-বিন্দুর x-**স্থানাঙ্ক** (x-**co-ordinate**) বা **ভুজ** (**abscissa**) এবং MPকে P-বিন্দুর y-**স্থানাঙ্ক** (y-**co-ordinate**) বা **কোটি** (**ordinate**) বলা হয়।

কোন বিন্দুর ভুজ এবং কোটি যথাক্রমে 3 এবং 2 হইলে বিন্দুটিকে সংক্ষেপে (3, 2) বিন্দু' বা আরও সংক্ষেপে '(3, 2)' বলা হয়। এইরূপ ভুজ a একক এবং কোটি b একক হইলে বিন্দুটিকে (a, b) বলা হয়। স্থানাঙ্কগুলির মধ্যে ভুজকে প্রথমে এবং কোটিকে পরে উল্লেখ করিতে হয়। যথা,

(4, 3) বিন্দুটির ভুজ = 4, এবং কোটি = 3.

(5, 7) বিন্দুটির ভুজ = 5, এবং কোটি = 7.

অনুসিদ্ধান্ত 1. x-অক্ষের প্রত্যেক বিন্দুর কোটি = 0.

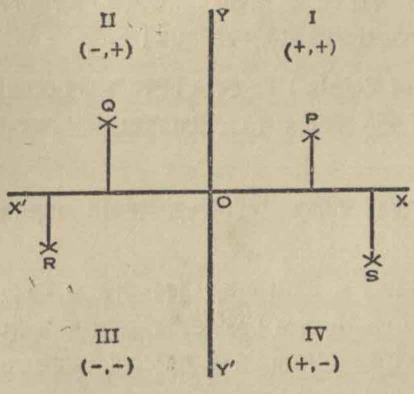
2. y-অক্ষের প্রত্যেক বিন্দুর ভুজ = 0.

3. মূলবিন্দুর ভুজ = 0 এবং কোটি = 0.

অর্থাৎ (0, 0) বিন্দুটিই মূলবিন্দু।

157. স্থানাঙ্কের চিহ্ন-বিষয়ক নিয়ম (Convention of signs)।

সাধারণতঃ X′OXকে বামদিক্ হইতে ডানদিকে এবং Y′OYকে নীচ হইতে উপরের দিকে অঙ্কিত করা হয়। কোন বিন্দু y-অক্ষের অর্থাৎ Y′OYএর ডানদিকে থাকিলে উহার ভুজকে এবং X′OXএর উপরের দিকে থাকিলে উহার কোটিকে ধনরাশি ধরাই রীতি। অতএব ধনরাশি এবং ঋণরাশির সংজ্ঞানুসারে কোন বিন্দু



পাদ	ভুজ	কোটি
I প্রথম	+	+
II দ্বিতীয়	−	+
III তৃতীয়	−	−
IV চতুর্থ	+	−

Y′OY-অক্ষের বামদিকে থাকিলে উহার ভুজকে এবং X′OX-অক্ষের নীচে থাকিলে উহার কোটিকে ঋণরাশি ধরিতে হইবে।

X′OX এবং Y′OY রেখাদ্বয় সম্পূর্ণ সমতলটিকে XOY, YOX′, X′OY′ এবং Y′OX এই চারি অংশে বিভক্ত করে। এইগুলিকে যথাক্রমে **প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়** এবং **চতুর্থ পাদ (Quadrant)** বলা হয় P-বিন্দুটি ইহাদের যে-কোন একটিতে

অবস্থিত থাকিতে পারে। পূর্ব্ববর্ত্তী পৃষ্ঠার চিত্র হইতে দেখা যাইতেছে যে, কোন বিন্দু প্রথম পাদে অর্থাৎ XOY অংশে থাকিলে উহা y-অক্ষের ডানদিকে এবং x-অক্ষের উপরের দিকে থাকিল ; অতএব উহার ভুজ এবং কোটি উভয়েই ধনরাশি।

বিন্দুটি দ্বিতীয় পাদে অর্থাৎ YOX′ অংশে অবস্থিত থাকিলে উহা y-অক্ষের বামদিকে এবং x-অক্ষের উপরের দিকে থাকিল, সুতরাং বিন্দুটির ভুজ ঋণরাশি এবং কোটি ধনরাশি।

যদি কোন বিন্দু তৃতীয় পাদে অর্থাৎ X′OY′ অংশে অবস্থিত থাকে, তাহা হইলে উহা y-অক্ষের বামদিকে এবং x-অক্ষের নীচে অবস্থিত থাকিল, সুতরাং উহার ভুজ এবং কোটি উভয়েই ঋণরাশি।

কোন বিন্দু চতুর্থ পাদে অর্থাৎ Y′OX অংশে থাকিলে বিন্দুটি y-অক্ষের ডানদিকে এবং x-অক্ষের নীচে থাকিল। অতএব উহার ভুজ ধনরাশি এবং কোটি ঋণরাশি। (পূর্ব্ববর্ত্তী পৃষ্ঠার তালিকা হইতে স্থানাঙ্কের চিহ্ন-বিষয়ক নিয়ম সুস্পষ্ট হইবে)।

বিশেষ দ্রষ্টব্য। X′OX সরলরেখাটিকে পশ্চিম হইতে পূর্ব্বদিকে এবং Y′OYকে দক্ষিণ হইতে উত্তরদিকে বিস্তৃত মনে করা যায়, অথবা X′OXকে অনুভূমিক (horizontal) এবং Y′OYকে উলম্ব (vertical) মনে করাও যায়।

158. বিন্দু-অঙ্কন (Plotting of Points)। কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক দেওয়া থাকিলে উহার অবস্থান নির্ণয় করাকে **বিন্দু-অঙ্কন** বলে। সাধারণতঃ ‘.’ অথবা ‘x’ চিহ্ন দ্বারা বিন্দু নির্দ্দেশ করা হয়।

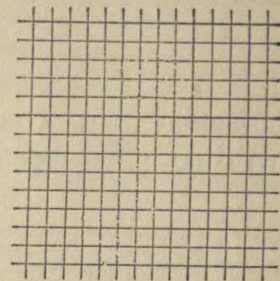
159. বিন্দু-অঙ্কনের জন্য শিক্ষার্থীদের পরিচিত নিম্নলিখিত যন্ত্রগুলি ব্যবহার করা চলিবে :

(1) মাপনী (Scale or Ruler)। ইহার এক পার্শ্বে ইঞ্চি ও উহার দশমাংশ এবং অপর পার্শ্বে সেন্টিমিটার (centimetre) ও উহার দশমাংশ অর্থাৎ মিলিমিটার (millimetre) অঙ্কিত থাকে। মাপনী দ্বারা সরলরেখা অঙ্কিত ও বর্দ্ধিত করা যায়।

(2) কাঁটা-কম্পাস (Dividers)। ইহার সাহায্যে দুই বিন্দুর দূরত্ব বা কোন সরলরেখার দৈর্ঘ্য মাপিয়া লওয়া যায়, কিংবা কোন একটি সরলরেখা হইতে অপর একটি সরলরেখার সমান অংশ কাটিয়া লওয়া যায়।

(3) পেন্সিল-কম্পাস (Pencil Compasses)। ইহা বৃত্ত-অঙ্কনের জন্য ব্যবহৃত হয়।

160. ছক-কাগজের (Squared Paperএর) উপর বিন্দু-অঙ্কন। পার্শ্বে ছক-কাগজের একটা নমুনা দেওয়া হইল; ইহাতে দুই শ্রেণীর সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কিত থাকে। একশ্রেণীর রেখাগুলি কাগজের নিম্নপ্রান্তের সমান্তরাল এবং পর-পর $\frac{1}{10}$ ইঞ্চি ব্যবধানে অঙ্কিত। অপর শ্রেণীর রেখাগুলিও $\frac{1}{10}$ ইঞ্চি ব্যবধানে অঙ্কিত; তবে উহারা পূর্ব্বোক্তশ্রেণীর উপর লম্ব; অতএব উভয় শ্রেণীর রেখাগুলি কাগজখানিকে $\frac{1}{10}$ ইঞ্চি বাহুবিশিষ্ট ক্ষুদ্র-ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রে বিভক্ত করে। কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক দেওয়া থাকিলে এইরূপ কাগজের সাহায্যে উহার অবস্থান নিম্নপ্রদর্শিত প্রণালীতে নির্দ্দেশ করা যায়।



কার্য্য-প্রণালী। **(1) অক্ষ-অঙ্কন।** প্রথমে ছক-কাগজের উপর অঙ্কিত রেখাগুলি হইতে পরস্পর ছেদকারী দুইটি সরলরেখা লও এবং অন্যান্য রেখা হইতে পৃথক্ করিবার জন্য এইগুলিকে একটু স্থূল করিয়া টান। বিন্দু-অঙ্কনের জন্য এই দুইটিকে অক্ষ (axis) কর এবং ইহাদের মধ্যে বামদিক্ হইতে ডানদিকে অঙ্কিত রেখাকে X′OX বা x-অক্ষ এবং অপরটিকে Y′OY বা y-অক্ষ কর। [পরবর্ত্তী পৃষ্ঠার চিত্র দেখ]।

(2) একক-নির্দ্দেশ (Representation of a unit)। কোন বিন্দু অঙ্কিত করিতে উহার ভুজ এবং কোটির কোন সাধারণ গুণনীয়ককে ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য দ্বারা নির্দ্দেশ কর। এইরূপ করিলে ভুজ এবং কোটি উভয়ই বাহুটির দৈর্ঘ্যের কোন গুণিতক হইবে; কাজেই ছক-কাগজের উপর বিন্দুটির অবস্থান কাগজ দেখিয়াই নির্ণয় করা যাইবে; কোনরূপ অঙ্কনের প্রয়োজন হইবে না।

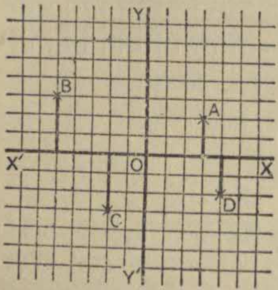
(3) এখন স্থানাঙ্কগুলিকে ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যে প্রকাশ কর।

(4) 157 অণুচ্ছেদোক্ত নিয়ম দ্বারা বিন্দুটি কোন্ পাদে থাকিবে, তাহা স্থির কর এবং ভুজ ও কোটির দ্বারা উহার অবস্থান নির্ণয় কর।

নিম্নের উদাহরণগুলি হইতে প্রক্রিয়াটি সুস্পষ্ট হইবে।

বিশেষ-দ্রষ্টব্য। মাপনী (ruler), কাঁটা-কম্পাস (dividers) এবং পেন্সিল-কম্পাস (pencil compasses), এই যন্ত্রসমূহ অঙ্কনগুলিতে ব্যবহার করা চলিবে। চাঁদা (protractor) এবং ত্রিকোণীর (setsquares এর) ব্যবহার অনুমোদিত নহে।

উদাহরণ 1. (i) A (3, 2), (ii) B (−5, 3), (iii) C (−2, −3) এবং (iv) D (4, −2), এই বিন্দুগুলি অঙ্কিত কর।



এস্থলে স্থানাঙ্কগুলি অখণ্ডসংখ্যা এবং 1 উহাদের সাধারণ গুণনীয়ক। অতএব একটি ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরা হইল।

(i) A বিন্দুর ভুজ = 3 একক

= ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 3 বাহু

এবং কোটি = 2 একক

= ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু।

স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, বিন্দুটি প্রথম পাদে অবস্থিত। এখন O হইতে OX ধরিয়া ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 3 বাহু পরিমাণ ডানদিকে যাও এবং পরে 2 বাহু পরিমাণ উপরে উঠ, তাহা হইলে A-বিন্দুতে পৌঁছিবে (চিত্র)।

(ii) B বিন্দুর ভুজ = −5 একক = − ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 5 বাহু

এবং কোটি = 3 একক = ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 3 বাহু।

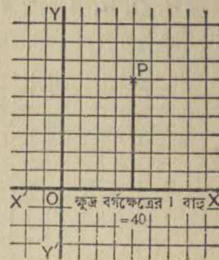
স্পষ্টত: বিন্দুটি দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত। O হইতে ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 5 বাহু পরিমাণ বামদিকে যাও এবং পরে 3 বাহু পরিমাণ উপরে উঠ। তাহা হইলেই B-বিন্দুতে পৌঁছিবে (চিত্র)।

(iii) C-বিন্দু অঙ্কিত করিতে হইলে O-বিন্দু হইতে ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু বামদিকে যাও এবং পরে 3 বাহু নীচে নাম ; Cতে পৌঁছিবে (চিত্র)।

(iv) D-বিন্দু অঙ্কিত করিতে হইলে O-বিন্দু হইতে ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 4 বাহু ডানদিকে গিয়া পরে 2 বাহু নীচে নাম ; Dতে পৌঁছিবে চিত্র)।

উদাহরণ 2. (i) (160, 240) বিন্দুটি অঙ্কিত কর।

(i) এস্থলে ছককাগজের ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের এক বাহুকে এক এককের সমান ধরিলে বিন্দু অঙ্কন করিতে বড় কাগজের দরকার হইবে। এইহেতু 160 এবং 240এর অপর কোন বৃহত্তর সাধারণ গুণনীয়ককে (যেমন 10, 20, 40 বা 80কে) ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের এক বাহু দ্বারা নির্দ্দেশ করাই সুবিধাজনক।

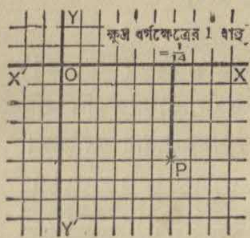


ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 1 বাহু = 40 ধরিলে (160, 240) বিন্দুটির ভুজ $=\frac{160}{40}=4$ বাহু এবং উহার কোটি $\frac{240}{40}=6$ বাহু।

এখন 4 বাহু ভুজ এবং 6 বাহু কোটি-বিশিষ্ট একটি বিন্দু অঙ্কিত কর। বিন্দুটির অবস্থান উপরের চিত্রে প্রদর্শিত হইল।

(ii) $(\frac{3}{7}, -\frac{5}{14})$ বিন্দুটি অঙ্কিত কর।

এস্থলে এককে ক্ষুদ্রবর্গক্ষেত্রগুলির এক বাহুর দৈর্ঘ্য দ্বারা নির্দ্দেশ করিলে বিন্দুটির ভুজ এবং কোটি উভয়েই এক বাহুর ভগ্নাংশ হইবে। অতএব বিন্দুটির নির্ভুল অবস্থান নির্ণয় করা কঠিন হইবে। কাজেই $\frac{3}{7}$ এবং $\frac{5}{14}$এর কোন সাধারণ গুণনীয়ককে এক বাহু দ্বারা নির্দ্দেশ করাই সুবিধাজনক।

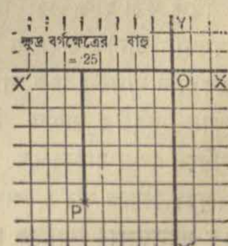


$\frac{3}{7}$ এবং $\frac{5}{14}$ এর গ. সা. গু. $=\frac{1}{14}$.

ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 1 বাহু $=\frac{1}{14}$ ধরিলে $(\frac{3}{7}, -\frac{5}{14})$ বিন্দুটির ভুজ $=(\frac{3}{7}\div\frac{1}{14})$ বা 6 বাহু এবং উহার কোটি $=(-\frac{5}{14}\div\frac{1}{14})$ বা -5 বাহু।

এখন 6 বাহু ভুজ এবং -5 বাহু কোটি-বিশিষ্ট বিন্দুটি অঙ্কিত কর। বিন্দুটির অবস্থান পার্শ্বের চিত্রে প্রদর্শিত হইল।

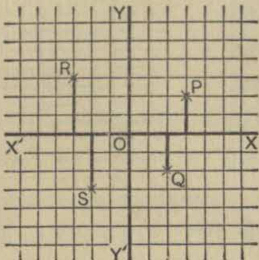
(iii) $(-1{\cdot}25, -1{\cdot}75)$ বিন্দুটি অঙ্কিত কর।



1·25 এবং 1·75এর গ. সা. গু. = ·25 ; অতএব ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 1 বাহু = ·25 ধরিলে প্রদত্ত বিন্দুটির ভুজ $=-1{\cdot}25\div{\cdot}25=-5$ বাহু এবং উহার কোটি $=-1{\cdot}75\div{\cdot}25=-7$ বাহু। এখন -5 বাহুভুজ এবং -7 বাহু কোটি-বিশিষ্ট বিন্দুটি অঙ্কিত কর। বিন্দুটির অবস্থান পার্শ্বের চিত্রে প্রদর্শিত হইল।

উদাহরণ 3. ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের এক বাহু একক হইলে পার্শ্ববর্ত্তী চিত্রের P, Q, R, S বিন্দুগুলিকে স্থানাঙ্ক দ্বারা প্রকাশ কর।

P, Q, R, S বিন্দু হইতে X′OXএর উপর লম্ব অঙ্কিত কর। চিত্রে এইগুলিকে কিঞ্চিৎ স্থূল করা হইয়াছে।



চিত্র হইতে P বিন্দুর ভুজ = ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 3 বাহু = 3 একক (যেহেতু 1 বাহু = 1 একক) এবং উহার কোটি = ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু = 2 একক।

অতএব স্থানাঙ্ক দ্বারা প্রকাশ করিলে P বিন্দুটি (3, 2) হইবে।

এইরূপ Q বিন্দুটি (2, −2), R বিন্দুটি (−3, 3) এবং S বিন্দুটি (−2, −3).

উদাহরণ 4. ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যের 3 গুণকে একক ধরিলে পূর্ব্ববর্ত্তী 3য় উদাহরণে P, Q, R, S বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক নির্দ্দেশ কর।

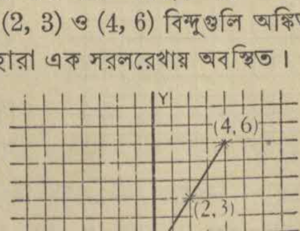
চিত্র হইতে P বিন্দুর ভুজ = ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 3 বাহু
= 1 একক
এবং উহার কোটি = ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু
= $\frac{2}{3}$ একক
[যেহেতু 3 বাহু = 1 একক]

অতএব P বিন্দু $(1, \frac{2}{3})$.

এইরূপ Q বিন্দু $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$; R বিন্দু (−1, 1) ; এবং S বিন্দু $(-\frac{2}{3}, -1)$.

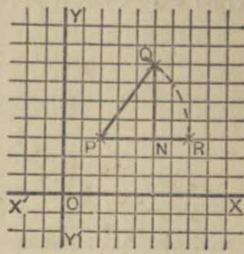
উদাহরণ 5. (−4, −6), (−2, −3), (2, 3) ও (4, 6) বিন্দুগুলি অঙ্কিত কর এবং মাপনীর (rulerএর) দ্বারা দেখাও যে, উহারা এক সরলরেখায় অবস্থিত।

পূর্ব্বের মত অক্ষ এবং ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক লইয়া বিন্দুগুলি অঙ্কিত করা হইল এবং চিত্রে বিন্দুগুলির অবস্থান স্থানাঙ্ক-সাহায্যে প্রদর্শিত হইল। একখানি মাপনীর এক পার্শ্ব উহাদের যে-কোন দুইটির সহিত মিলাইয়া স্থাপন করিলে দেখা যাইবে যে, ঐ পার্শ্ব অপর বিন্দুদ্বয় দিয়াও যায়। অর্থাৎ বিন্দু চারিটি এক সরলরেখায় অবস্থিত।



উদাহরণ 6. P (2, 3) এবং Q (5, 7), এই বিন্দু দুইটি অঙ্কিত কর এবং উহাদের দূরত্ব নির্ণয় কর।

পূর্ব্বের মত অক্ষ এবং ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক লইয়া বিন্দুগুলিকে অঙ্কিত কর। P এবং Qকে একটি সরলরেখা দ্বারা সংযুক্ত কর। PQ সরলরেখার দৈর্ঘ্যই P এবং Q বিন্দুর নির্ণেয় দূরত্ব। ইহা নির্ণয় করিতে P বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং PQ ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি বৃত্তের চাপ অঙ্কিত কর। উহা যেন P-বিন্দুগামী x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখাটিকে R বিন্দুতে ছেদ করিল।



নির্ণয় দূরত্ব = PQ = PR = 5, (চিত্র হইতে গণনা দ্বারা)।

দ্রষ্টব্য 1. কর্ণমাপনী (diagonal scale) দ্বারা এইরূপ দূরত্ব দুই দশমিক স্থান পর্য্যন্ত নির্ণয় করা যায়।

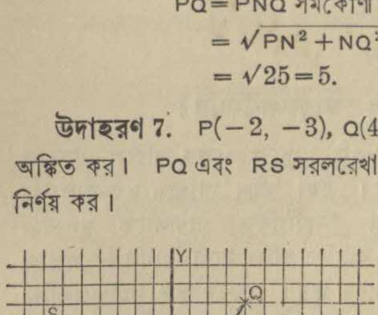
দ্রষ্টব্য 2. PQএর দৈর্ঘ্য নিম্নলিখিতরূপেও নির্ণয় করা যায়ঃ

PQ = PNQ সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ

$= \sqrt{PN^2 + NQ^2} = \sqrt{3^2 + 4^2}$ (চিত্র হইতে)

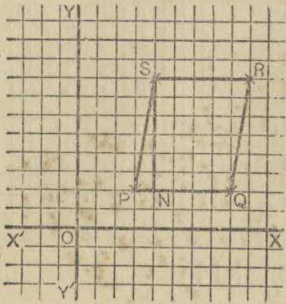
$= \sqrt{25} = 5.$

উদাহরণ 7. P(−2, −3), Q(4, 7), R(8, −2) এবং S (−6, 6) বিন্দুগুলি অঙ্কিত কর। PQ এবং RS সরলরেখা অঙ্কিত করিয়া উহাদের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।



ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক লইয়া প্রথমে P, Q, R, S বিন্দুগুলি অঙ্কিত কর। এখন মাপনী দ্বারা PQ এবং RS সরলরেখা দুইটি অঙ্কিত কর। উহারা যেন C বিন্দুতে ছেদ করিল (চিত্র)। চিত্র হইতে স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, C বিন্দুটি (1, 2).

উদাহরণ 8. P (3, 2), Q (8, 2), R (9, 8) ও S (4, 8) বিন্দুগুলি অঙ্কিত করিয়া দেখাও যে, উহারা একটি সামান্তরিকের শীর্ষ। সামান্তরিকটি অঙ্কিত করিয়া উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক লইয়া P, Q, R, S বিন্দুগুলিকে অঙ্কিত করা হইল (চিত্র)। চিত্র হইতে স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, PQRSএর PQ এবং RS বাহুদ্বয় সমান্তরাল এবং সমান, [যেহেতু চিত্র হইতে ইহাদের প্রত্যেকের দৈর্ঘ্য = 5 একক]। অতএব PQRS একটি সামান্তরিক এবং ইহার ক্ষেত্রফল = ভূমি × উন্নতি = PQ.SN [চিত্র হইতে]

= 5.6 বর্গ-একক, [চিত্র হইতে গণনা দ্বারা]

= 30 বর্গ-একক।

161. ছক-কাগজের দ্বারা স্থূলভাবে ক্ষেত্রফল-নির্ণয়।

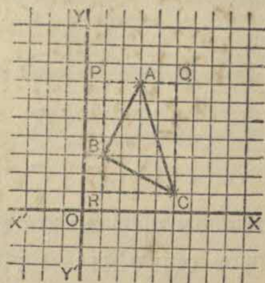
ছক-কাগজের ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রগুলির এক-এক বাহুকে একক ধরিলে প্রত্যেক ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = 1 বর্গ-একক হইবে। ইহা স্মরণ রাখিলে ছক-কাগজের উপর অঙ্কিত যে-কোন ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নিম্নলিখিত প্রণালীতে স্থূলভাবে (approximately) নির্ণয় করা যায় ; ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রগুলির মধ্যে যেগুলি সম্পূর্ণরূপে প্রদত্ত ক্ষেত্রের ভিতরে আছে. উহাদের সংখ্যা গণনা কর। যে-যে ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রগুলির ভিতর দিয়া ক্ষেত্রের সীমারেখা (boundary) গিয়াছে, উহাদের মধ্যে যেগুলির অর্দ্ধেক বা অর্দ্ধেকের অধিক অংশ প্রদত্ত ক্ষেত্রের ভিতর আছে, উহাদিগকে এক-একটি সম্পূর্ণ বর্গক্ষেত্র মনে করিয়া উহাদের সংখ্যাও গণনা কর এবং অবশিষ্টগুলি বাদ দাও। এইরূপে প্রদত্ত ক্ষেত্রের মধ্যে ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের মোট যে-সংখ্যা পাওয়া যাইবে, স্থূলতঃ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল তত বর্গ-একক হইবে।

উপরের চিত্রে PQRS ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল এই প্রণালীতে নির্ণয় করিয়া পূর্ব্বলব্ধ ফলের বিশুদ্ধতা পরীক্ষা করা যায়। চিত্র হইতে দেখা যাইতেছে যে, PQRSএর

অভ্যন্তরস্থ সম্পূর্ণ বর্গক্ষেত্রের সংখ্যা = 24 এবং যেগুলির অর্দ্ধেক বা তদধিক অংশ PQRSএর ভিতরে আছে, উহাদের সংখ্যা = 6। অতএব স্থূলভাবে PQRSএর অভ্যন্তরস্থ মোট বর্গক্ষেত্রের সংখ্যা = 24 + 6 = 30.

∴ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = 30 বর্গ-একক (প্রায়)।

উদাহরণ 9. A(3, 7), B(1, 3) এবং C(5, 1) বিন্দুগুলি অঙ্কিত কর এবং ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক লইয়া A, B এবং C বিন্দুগুলি অঙ্কিত কর (চিত্র)। A এবং C বিন্দু দিয়া x-অক্ষের ও B এবং C বিন্দু দিয়া y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কিত কর।

ABC ত্রিভুজ = PRCQ আয়তক্ষেত্র − APB ত্রিভুজ − BRC ত্রিভুজ − CQA ত্রিভুজ।

এখন PRCQএর ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ = PR.RC = 6.4 বা 24.

[চিত্র হইতে PR এবং RCএর দৈর্ঘ্য গণনা করিয়া]

APB সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ ভূমি × উন্নতি = $\frac{1}{2}$. PB.AP

$= \frac{1}{2} \times 4 \times 2$ বা 4, [চিত্র হইতে]

BRC সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$.RC.BR = $\frac{1}{2} \times 4 \times 2$ বা 4, [চিত্র হইতে]

CQA সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$.QA.CQ = $\frac{1}{2} \times 2 \times 6 = 6$.

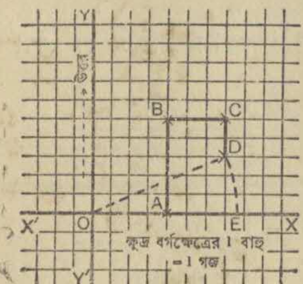
অতএব ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = 24 − 4 − 4 − 6 = 10.

বিশুদ্ধি-পরীক্ষার প্রণালী। 161 অণুচ্ছেদে বর্ণিত প্রণালীতে স্থূলভাবে ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিয়া ফলের বিশুদ্ধতা পরীক্ষা করা যায়।

চিত্র হইতে ABC ত্রিভুজের অভ্যন্তরস্থ সম্পূর্ণ বর্গক্ষেত্রের সংখ্যা = 4 এবং যেগুলির অর্দ্ধেক বা অর্দ্ধেকের বেশী ত্রিভুজটির ভিতরে আছে, উহাদের সংখ্যা = 6; অতএব স্থূলভাবে ABC ত্রিভুজের অভ্যন্তরস্থ মোট বর্গক্ষেত্রের সংখ্যা = 4 + 6 = 10.

∴ ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = 10 (প্রায়)।

উদাহরণ 10. একটি চলন্ত বিন্দু কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু O হইতে যাত্রা করিয়া পূর্ব্বদিকে A-বিন্দু পর্য্যন্ত 4 গজ, পরে উত্তরদিকে B-বিন্দু পর্য্যন্ত 5 গজ, তারপর আবার পূর্ব্বদিকে C-বিন্দু পর্য্যন্ত 3 গজ এবং সর্ব্বশেষে দক্ষিণদিকে D-বিন্দু পর্য্যন্ত 2 গজ অগ্রসর হইল। ছক-কাগজের উপর উহার ভ্রমণ-পথের একটি নক্সা প্রস্তুত কর এবং উহা যাত্রাস্থান হইতে সর্ব্বশেষে কত দূরে থাকিল, নির্ণয় কর।



ছক-কাগজের উপর X'OX এবং Y'OY-অক্ষ অঙ্কিত কর। মনে কর, X'OX পশ্চিম হইতে পূর্ব্বে এবং Y'OY দক্ষিণ হইতে উত্তরে অঙ্কিত হইল এবং ইহাদের ছেদবিন্দু Oই যাত্রাস্থান। মনে কর, ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রগুলির এক-একটি বাহু = 1 গজ। তাহা হইলে পার্শ্বের চিত্রের স্থূলরেখা OABCD হইবে ভ্রমণ-পথের নক্সা।

নির্ণেয় দূরত্ব = OD রেখার দৈর্ঘ্য।

Oকে কেন্দ্র করিয়া OD ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর, উহা যেন x-অক্ষকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। নির্ণেয় দূরত্ব = OD = OE = ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 7·6 বাহু (প্রায়), [চিত্র হইতে] = 7·6 গজ (প্রায়)।

পরিসংখ্যান লেখ-চিত্র

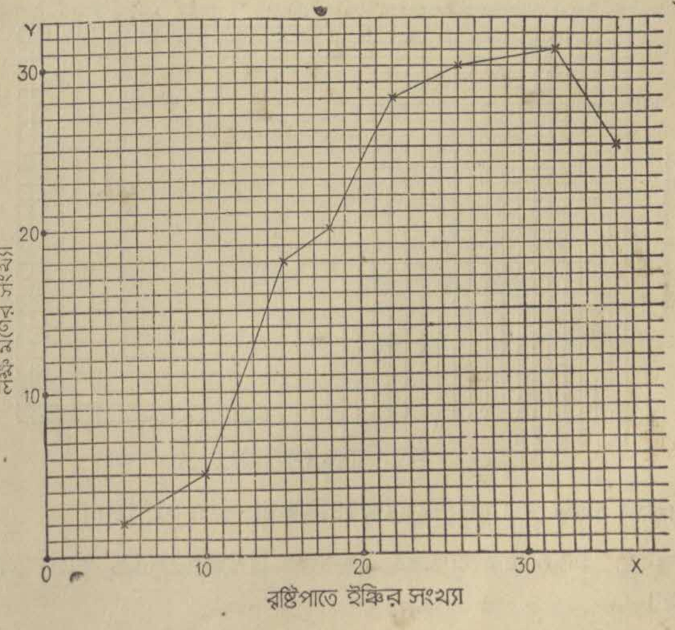
(Plotting of tabulated data)

162. উদাহরণ 1. কোন দেশের বার্ষিক বৃষ্টিপাত এবং উৎপন্ন শস্যের পরিমাণ এক পাটিতে সাজাইয়া নিম্নে ঐরূপ কয়েকটি বৎসরের হিসাব প্রদত্ত হইল।

বৃষ্টিপাত (ইঞ্চিতে)	5″	10″	15″	18″	22″	26″	32″	36″
শস্য (লক্ষ মণে)	2	5	18	20	28	30	31	25

এক-এক পাটির ইঞ্চির সংখ্যাকে ভুজ এবং লক্ষ মণের সংখ্যাকে কোটি ধরিয়া 160 অণুচ্ছেদের নিয়মে এক-একটি বিন্দু অঙ্কিত কর এবং অঙ্কিত বিন্দুগুলির প্রত্যেকটিকে উহার অব্যবহিত পরবর্তী বিন্দুর সহিত সরলরেখা দ্বারা যুক্ত করিয়া একটি লেখ-চিত্র অঙ্কিত কর।

ছক-কাগজের ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের এক-এক বাহুকে একক লইয়া নিম্নে লেখটি অঙ্কিত হইল।

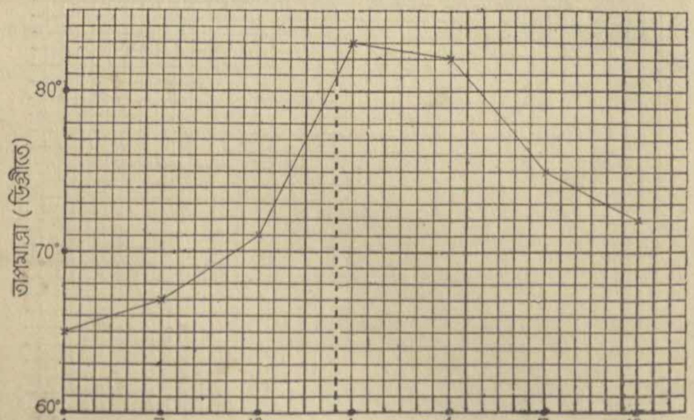


উদাহরণ 2. জানুয়ারী মাসের কোন এক তারিখে কলিকাতার তাপমাত্রা নিম্নলিখিতরূপ ছিল :

	সকাল						
ঘড়ির সময় (ঘণ্টায়)	4টা	7টা	10টা	1টা	4টা	7টা	10টা
তাপমাত্রা (ডিগ্রীতে)	65°	67°	71°	83°	82°	75°	72°

এক-এক পাটির ঘণ্টার সংখ্যাকে ভুজ এবং ডিগ্রীর সংখ্যাকে কোটি ধরিয়া 160 অণুচ্ছেদে প্রদত্ত নিয়মে এক-একটি বিন্দু অঙ্কিত কর এবং অঙ্কিত বিন্দুগুলির প্রত্যেকটিকে উহার ঠিক পরবর্তী বিন্দুর সহিত সরলরেখা দ্বারা যুক্ত করিয়া একটি লেখচিত্র অঙ্কিত কর। $12\frac{1}{2}$ টায় তাপমাত্রা কত ছিল, তাহা চিত্র-সাহায্যে স্থির কর।

অনুভূমিক (horizontal) সরলরেখার সমান্তরাল ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের দুই বাহু দ্বারা 1 ঘণ্টা এবং উল্লম্ব (vertical) রেখার সমান্তরাল ঐরূপ 1 বাহু দ্বারা 1° সূচিত করিয়া নিয়ে লেখচিত্রটি অঙ্কিত হইল।



লেখচিত্র হইতে দেখা যাইতেছে যে, $12\frac{1}{2}$টায় তাপমাত্রা 81° ছিল।

মন্তব্য। চিত্রে ছক-কাগজের যে-অংশে বিন্দুগুলি আছে, তাহাই প্রদর্শিত হইয়াছে।

উদাহরণ 3. নিম্নে একটি শিশুর বয়স মাসে এবং তৎকালীন ওজন পাউণ্ডে এক-এক পাটিতে সাজাইয়া তালিকাকারে প্রদত্ত হইল।

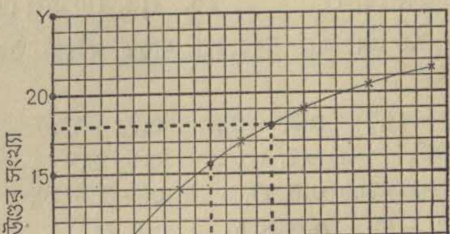
বয়স (মাসে)	0	2	4	6	8	10	12
ওজন (পাউণ্ডে)	3	10	14	17	19	20·5	21·5

এক-এক পাটির মাসের সংখ্যাকে ভুজ এবং পাউণ্ডের সংখ্যাকে কোটি ধরিয়া এক-একটি বিন্দু অঙ্কিত কর এবং কোন যন্ত্রের সাহায্য না লইয়া বিন্দুগুলির মধ্য দিয়া মুক্তহস্তে একটি অবিচ্ছিন্ন (Continuous) রেখা অঙ্কিত কর। অঙ্কিত রেখা-চিত্রের সাহায্যে স্থির কর :

(1) 5 মাস বয়সে শিশুর ওজন কত ছিল ?

(2) যখন উহার ওজন 18 পাউণ্ড, তখন উহার বয়স কত ?

x-অক্ষের সমান্তরাল ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু দ্বারা 1 মাস এবং y-অক্ষের সমান্তরাল ঐরূপ 1 বাহু দ্বারা 1 পাউণ্ড সূচিত করিয়া নিম্নে রেখা-চিত্রটি অঙ্কিত হইল :



চিত্র হইতে দেখা যাইতেছে যে, (1) 5 মাসের সময় ওজন = 15·5 পাউণ্ড ;
এবং (2) যখন ওজন 18 পাউণ্ড, তখন বয়স = 7 মাস।

প্রশ্নমালা 64

ছক-কাগজের উপর নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি অঙ্কিত কর :

1-10. $(2, 4)$; $(6, 2)$; $(7, 5)$; $(-4, -5)$; $(-3, 2)$; $(5, -6)$; $(-8, -8)$; $(-9, 10)$; $(-2, 11)$; $(3, -9)$.

11-15. $(2\cdot5, 3\cdot5)$; $(-2\cdot25, -3\cdot25)$; $(\frac{10}{3}, \frac{8}{3})$; $(\frac{6}{5}, -\frac{3}{10})$; $(-\frac{2}{3}, \frac{10}{3})$.

নিম্নের বিন্দুগুলি অঙ্কিত করিয়া মাপনী দ্বারা দেখাও যে, উহারা একই সরলরেখায় অবস্থিত :

16. $(-1, 2)$; $(-5, 2)$; $(-7, 2)$; $(8, 2)$; $(3, 2)$.

17. $(5, 4)$; $(5, 3)$; $(5, -2)$; $(5, -4)$; $(5, -11)$.

18. $(1, 5)$; $(2, 10)$; $(3, 15)$; $(-2, -10)$; $(-1, -5)$.

19. $(1, 5)$; $(2, 7)$; $(-2, -1)$; $(-3, -3)$; $(-4, -5)$.

নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি অঙ্কিত কর এবং উহাদের দূরত্ব নির্ণয় কর :

20. $(5, 2)$ এবং $(8, 6)$ **21.** $(3, 6)$ এবং $(4\cdot5, 8)$

22. $(-2, -6)$ এবং $(3, 6)$ **23.** $(2, 4)$ এবং $(6, 7)$

24. $(-8, 2)$ এবং $(4, 7)$ **25.** $(12, 16)$ এবং $(24, 32)$.

নিম্নলিখিত স্থলে AB এবং CD সরলরেখা অঙ্কিত করিয়া উহাদের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর :

26. (i) A$(5, -4)$, B$(3, -2)$, C$(2, -7)$, D$(6, 1)$;

(ii) A$(3, 5)$, B$(7, 1)$, C$(8, 2)$, D$(2, 4)$;

(iii) A$(-5, -7)$, B$(5, 7)$, C$(-3, -2)$, D$(3, 2)$;

(iv) A$(12, -3)$, B$(-8, 5)$, C$(6, 4)$, D$(-2, -2)$.

27. ছক-কাগজের উপর $(-5, 3)$, $(1, 3)$, $(-5, 7)$ এবং $(1, 7)$ বিন্দুগুলি অঙ্কিত করিয়া দেখাও যে, উহারা একটি আয়তক্ষেত্রের শীর্ষবিন্দু। আয়তক্ষেত্রটি অঙ্কিত কর এবং উহার অভ্যন্তরস্থ ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রগুলির সংখ্যা গণনা করিয়া আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল স্থির কর। ইহা হইতেই প্রমাণ কর যে, আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ। চিত্র হইতে আয়তক্ষেত্রটির কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নিরূপণ কর।

28. $(-3, -2)$, $(4, -2)$, $(1, 4)$ এবং $(8, 4)$ বিন্দুগুলি অঙ্কিত করিয়া দেখাও যে, উহারা একটি সামান্তরিকের শীর্ষ। এই সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল এবং উহার কর্ণের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

29. $A(-3, 2)$. $B(5, 2)$, $C(2, 6)$ এবং $D(10, 6)$ বিন্দুগুলি অঙ্কিত কর এবং ABCD চতুর্ভুজ অঙ্কিত করিয়া দেখাও যে, উহা একটি সামান্তরিক। উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। C হইতে ABএর উপর CN লম্ব টান এবং N-বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

30. নিম্নলিখিত স্থলে PQR ত্রিভুজ অঙ্কিত কর এবং উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :

(i) $P(2, 3)$; $Q(8, 3)$; $R(4, 9)$
(ii) $P(5, 4)$; $Q(5, 10)$; $R(9, 5)$
(iii) $P(2, 5)$; $Q(3, 8)$; $R(6, 7)$
(iv) $P(8, 1)$; $Q(6, -2)$; $R(-3, 5)$

31. একব্যক্তি কোন বিন্দু O হইতে রওনা হইয়া 4 মাইল পূর্ব্বদিকে এবং পরে 3 মাইল উত্তরদিকে অগ্রসর হইল। ছক-কাগজ ব্যবহার করিয়া O বিন্দু হইতে তাহার সর্ব্বশেষ অবস্থানের দূরত্ব নির্ণয় কর।

32. একব্যক্তি সাইকেলে 4 মাইল পূর্ব্বদিকে, পরে 5 মাইল দক্ষিণে, অতঃপর 8 মাইল পূর্ব্বদিকে যাইলে সে সর্ব্বশেষে যাত্রাস্থান হইতে কত দূরে থাকিবে ?

33. একটি খরগোস এক কুকুরকে দেখিয়া সেকেণ্ডে 3 গজ বেগে প্রথম 2 মিনিট পূর্ব্বদিকে, পরবর্ত্তী 3 মিনিট উত্তরদিকে, তৎপরবর্ত্তী 1 মিনিট পূর্ব্বদিকে এবং সর্ব্বশেষে 7 মিনিট দক্ষিণদিকে দৌড়াইল। এক্ষণে উহা যাত্রাস্থান হইতে কতদূরে পৌঁছিল ?

34. একটি নারিকেলবৃক্ষ ঝড়ে ভগ্ন হওয়াতে উহার অগ্রভাগ বৃক্ষের সহিত সংলগ্ন অবস্থায় 20 ফুট ব্যবধানে ভূমির সহিত 30° কোণ করিয়া সংযুক্ত হইল। ছক-কাগজের সাহায্যে বৃক্ষের উচ্চতা নির্ণয় কর।

35. কোন এরোপ্লেন হইতে দেখা গেল যে, উহার ঠিক নিম্নস্থ একটি সরল রাস্তায় অবস্থিত দুইটি ক্রমিক (consecutive) মাইল-চিহ্ন অনুভূমিক (horizontal) রেখার সহিত যথাক্রমে 45° এবং 30° কোণ করিয়াছে। ছক-কাগজের সাহায্যে এরোপ্লেনের উচ্চতা নির্ণয় কর।

162 অণুচ্ছেদের উদাহরণ 1 এবং 2এর প্রণালীতে নিম্নলিখিত তালিকাগুলির লেখ-চিত্র অঙ্কিত কর :

36. কোন বালকের বিভিন্ন বয়সের উচ্চতার তালিকা

বয়স (বৎসরে)	1	2	3	4	5	6	7	8	10
উচ্চতা (ইঞ্চিতে)	12″	17″	21″	26″	32″	42″	48″	52″	56″

37-42. 222 পৃষ্ঠার উদাহরণ 2, 223-224 পৃষ্ঠার 3, 1, 7, 2-প্রশ্ন এবং 221 পৃষ্ঠার উদাহরণ 1 এ প্রদত্ত তালিকাগুলির লেখ-চিত্র অঙ্কিত কর।

43. নিম্নে একটি জীবনবীমা-কোম্পানীর প্রিমিয়মের তালিকা প্রদত্ত হইল। 162 অণুচ্ছেদের উদাহরণ 3এর প্রণালীতে উহার একটি লেখ-চিত্র অঙ্কিত কর।

বয়স (বৎসরে)	20	24	26	30	36	38	42	45
প্রিমিয়ম (টাকায়)	23	26	28	32	41	46	56	69

44. একটি লোকের উচ্চতা এবং ওজনের নিম্নপ্রদত্ত-তালিকার একটি লেখ-চিত্র অঙ্কিত কর :

উচ্চতা (ইঞ্চিতে)	40	41	43	44	45	47	49	50·5
ওজন (পাউণ্ডে)	82	85	91	94	97	106	118	130

উত্তরমালা

প্রথম খণ্ড

প্রশ্নমালা 1 (পৃষ্ঠা 6-7)

1-5. aএর সহিত x যোগ কর ; a হইতে x বিয়োগ কর ; aকে x দ্বারা গুণ কর ; aকে x দ্বারা ভাগ কর ; aকে x দ্বারা ভাগলব্ধফল অথবা x ভাগের a ভাগ।

6-10. aএর x গুণ ; a-বর্গ ; aএর বর্গমূল ; 2, x এবং aএর ক্রমিক গুণফল ; 5, a, b এবং cএর ক্রমিক গুণফল।

11-13. aকে b দ্বারা গুণ কর এবং লব্ধ গুণফলকে c দ্বারা ভাগ কর ; bকে c দ্বারা ভাগ কর এবং লব্ধ ভাগফলকে a দ্বারা গুণ কর ; xকে y দ্বারা ভাগ কর এবং লব্ধ ভাগফলকে z দ্বারা ভাগ কর।

14-17. x-বর্গ এবং y-বর্গের অন্তরফল।

aএর বর্গমূল এবং bএর বর্গমূলের অন্তরফল।

aএর বর্গমূল হইতে b-বর্গ বিয়োগ কর এবং লব্ধ বিয়োগফলের সহিত c-ত্রিঘাত যোগ কর।

pএর বর্গমূল হইতে qএর বর্গমূল বিয়োগ কর এবং লব্ধ বিয়োগফল হইতে rএর বর্গমূল বিয়োগ কর।

18-20. aএর অর্দ্ধের সহিত bএর এক-তৃতীয়াংশ যুক্ত কর।

aএর এক-তৃতীয়াংশ হইতে bএর এক-চতুর্থাংশ বিযুক্ত কর এবং লব্ধ বিয়োগফলের সহিত cএর এর এক-পঞ্চমাংশ যুক্ত কর।

m-ভাগের 2 ভাগ, n-ভাগের 3 ভাগ এবং p-ভাগের 4 ভাগের সমষ্টি।

21-23. x এবং y পরস্পর সমান।

x এবং aএর যোগফল y এবং bএর যোগফলের সমান।

x, y এবং z পরস্পর সমান।

24-27. a b হইতে বৃহত্তর ; x y হইতে লঘুতর ; m এবং n পরস্পর অসমান ; x y হইতে বৃহত্তর নহে।

28-30. x-বর্গ এবং y-বর্গের যোগফল $2xy$ অপেক্ষা লঘুতর নহে।

mএর সহিত nএর যোগফল এবং nএর সহিত mএর যোগফল ইহারা সর্ব্বতোভাবে সমান।

xএর y গুণ এবং yএর x গুণ ইহারা সর্ব্বতোভাবে সমান।

31-32. x এবং aএর সমষ্টির 2 গুণের সহিত y এবং bএর সমষ্টির 3 গুণ যোগ কর।

a এবং bএর সমষ্টির 3 গুণ হইতে c এবং aএর সমষ্টির 2 গুণ বিয়োগ কর এবং লব্ধ বিয়োগফলের সহিত a এবং bএর সমষ্টির 4 গুণ যোগ কর।

33-35. $53=5$ দশ$+3$, ইহা 5×3 বা 15 হইতে পৃথক্; $5a=5\times a$; $ab=a\times b$.

36-38. $3\frac{2}{5}=3+\frac{2}{5}$, ইহা $3\times\frac{2}{5}$ বা $\frac{6}{5}$ হইতে পৃথক্; $3\frac{x}{y}=3\times\frac{x}{y}$;

$$a\frac{b}{c}=a\times\frac{b}{c}.$$

39-41. $\sqrt{x}$ বা $\sqrt[2]{x}$ দ্বারা xএর বর্গমূল বুঝায়, কিন্তু $2\sqrt{x}=2\times\sqrt{x}$ অর্থাৎ xএর বর্গমূলের দ্বিগুণ। $3\sqrt{x}=3\times\sqrt{x}$ অর্থাৎ xএর বর্গমূলের 3 গুণ; কিন্তু $\sqrt[3]{x}=x$এর ঘনমূল।

$x^3=x\times x\times x$, ইহা $x\times3$ নহে।

42-43. $x\div a\times b$ দ্বারা বুঝায় যে, xকে a দ্বারা ভাগ কর; এবং লব্ধ ভাগফলকে b দ্বারা গুণ কর; কিন্তু $x\div ab$ দ্বারা বুঝায় যে, xকে aএর b গুণ অর্থাৎ $(a\times b)$ দ্বারা ভাগ কর।

$x\div a\div b$ দ্বারা বুঝায় যে, xকে a দ্বারা ভাগ কর এবং লব্ধ ভাগফলকে b দ্বারা ভাগ কর।

কিন্তু $x\div\frac{a}{b}$ দ্বারা বুঝায় যে, xকে $\frac{a}{b}$ অর্থাৎ $(a\div b)$ দ্বারা ভাগ কর।

44-47. $a+b$; $c-d$; $m\times n$; $x\div y$

48-49. $\frac{a}{2}$; $\frac{x+y}{3}$ অথবা $\frac{1}{3}(x+y)$

50-51. a^2+b^2; $\sqrt{x}\sim\sqrt{y}$ **52.** $x-y+a$

53. $x^2+\sqrt{y}-\sqrt[3]{x}$ **54.** $ab-cd$ **55.** $ax\div by\times cz$

56. $a\div x+b\div y+c\div z$ বা $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}$

57. $(\sqrt{x}-y^2)\times n$ **58.** $x+y=z$ **59.** $a+b+c=s$

60. $x-y=z$ **61.** $ax=by=cz$ **62.** $\frac{x+y}{3}=\frac{a-b}{4}$

63. $a+b>c$ **64.** $x \sim y < x$ **65.** $c \not> d$

66. $am \neq bn$ **67.** $\left(\frac{a+x}{2}\right)^2 \not< ax$ **68.** $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

69. $x=y$ হইলে (i) $x+a=y+a$
(ii) $x-a=y-a$
(iii) $x \times a=y \times a$
(iv) $x \div a=y \div a$

প্রশ্নমালা 2 (পৃষ্ঠা 9-10)

70. $(x+a)m-(y+b)n-(z+c)p$.

1-5. 9 ; 3 ; 18 ; 2 ; 2. **6-10.** 12 ; 36 ; 36 ; 9 ; 81.

11-15. 216 ; 27 ; 8 ; 108 ; 143 **16-18.** 9 ; 4 ; 1.

19-22. 12 ; 6 ; 18 ; 0. **23-25.** 7 ; 8 ; 14.

26. (i) 8 ; (ii) 6. **27.** (i) 36 ; (ii) 12.

28. (i) 216 ; (ii) 18. **29-31.** 1 ; 14 ; $1\frac{13}{36}$.

32-35. 6 ; 5 ; 7 ; 10. **36-40.** 2 ; 3 ; 5 ; 1 ; 4.

41-42. 9 ; 1. **43.** (i) 32 ; (ii) 2.

44. (i) 2 ; (ii) 18. **45.** (i) 22 ; (ii) 25.

46. (i) 285 ; (ii) 165 **47-49.** $\frac{1}{12}$; $1\frac{2}{5}$; $27\frac{8}{9}$

50. 5 ; 7 ; 9 ; 11 ; 13 **51.** 7 ; 10 ; 13 ; 16 ; 19 ; 22

52. $x^2=4$; 16 ; 25 ; 36 ; 64 ; 100
$y=1$; 4 ; $6\frac{1}{4}$; 9 ; 16 ; 25

53. (i) 9 ; (ii) 35 ; (iii) 232.

54. (i) 64 ; ii) 15 ; (iii) 17.

55. 10 ; 14 ; 18 ; 28 ; 130.

প্রশ্নমালা 3 (পৃষ্ঠা 12-17)

1. (i) 3 ; (ii) $x-a$ **2.** (i) 8 ; (ii) $a+x$

3. (i) 6 ; (ii) ax **4.** (i) 3 ; (ii) $\frac{x}{a}$

5. (i) 3 টাকা ; (ii) $\frac{x}{a}$ টাকা **6.** (i) 24 টাকা ; (ii) ab টাকা

7. (i) 48 আনা ; (ii) $16a$ আনা **8.** (i) 48 ইঞ্চি ; (ii) $12x$ ইঞ্চি

9. (i) 60 শিলিং ; (ii) $20b$ শিলিং **10.** (i) 2 টাকা ; (ii) $\frac{x}{16}$ টাকা

11. (i) 2 গজ ; (ii) $\frac{y}{3}$ গজ **12.** $(3x+y)$ ফুট ; $\frac{3x+y}{3}$ গজ

13. $(16a+b)$ আনা ; $\frac{16a+b}{16}$ টাকা **14.** $(20m+n)$ শিলিং ; $\frac{20m+n}{20}$ পা.

15. (i) $n-1, n+1$; (ii) $n-2, n+2$; (iii) $2m-2, 2m+2$

16. $(a-x)$ বৎসর ; $(a+y)$ বৎসর

17. xy মাইল ; $\frac{z}{x}$ ঘণ্টা **18.** $(x-y)$ সের

19. $(ab+c)$ **20.** $(ab+c)$ টাকা

21. $(a-b)$ টাকা ; $(a-b-c)$ টাকা

22. $(x-a+b)$ টি **23.** $a>b$ হইলে $(a-b)$ টাকা লাভ ; $b>a$ হইলে $(b-a)$ টাকা ক্ষতি

24. (i) $(a+b)$ টাকা (ii) $y>x$ হইলে $(y-x)$ টাকা লাভ ; $x>y$ হইলে $(x-y)$ টাকা ক্ষতি

(iii) $(x-y)$ টাকা ; $(x+z)$ টাকা ; (iv) $\{c(x+y)-(ax+by)\}$ টাকা লাভ, কিংবা $\{ax+by-c(x+y)\}$ টাকা ক্ষতি

25. (ক) $a\times b=b\times a$; (খ) $D=dq$;
q যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা হইলে $2q=$ যুগ্মসংখ্যা

26. $N=\frac{S+D}{2}$; $n=\frac{S-D}{2}$

(i) $N=14, n=4$; (ii) $N=33{\cdot}4, n=4{\cdot}1$;

(iii) $N=6\frac{1}{2}, n=2\frac{1}{4}$ [প্রশ্নে $S=8\frac{3}{4}$ হইবে]

27. (i) $N\times n=G\times L$;

(ii) $L=\frac{N\times n}{G}$.

28. 1 হইতে 100 পর্য্যন্ত সংখ্যার যোগফল $=5050$;
1 হইতে 1000 .... $=500500$.

29. (i) $A=LB$; (ii) $P=2(L+B)$; (iii) $D=\sqrt{L^2+B^2}$

30. (i) $A=L^2$; (ii) $L=\sqrt{A}$; (iii) $P=4\sqrt{A}$; (iv) $D=\sqrt{2A}$.

31. $\triangle=\frac{1}{2}bh$. **32.** $C=2\pi R$; $A=\pi R^2$

33. $a^2=b^2+c^2$ **34.** (i) $V=LBH$; (ii) $S=2(L+B)H$.

35. (i) $V=\frac{4\pi}{3}R^3$; (ii) $S=4\pi R^2$.

36. $x \ngtr 8$ হইলে $y=a$;

$x>8$ হইলে $y=a+(x-8)b$. **37.** $I=\frac{PRT}{100}$.

38. (i) $S=VT$; (ii) $V=\frac{S}{T}$; (iii) $T=\frac{S}{V}$

39. $S=2\pi RN$ **40.** $s=16t^2$; গভীরতা = 100 ফুট।

41. $Q=\pi VR^2T$

42. x গজ y ফুট z ইঞ্চি $=(36x+12y+z)$ ইঞ্চি $=\frac{36x+12y+z}{36}$ গজ

$=\frac{36x+12y+z}{63360}$ মাইল

43. x পা. y শি. z পে. $=(240x+12y+z)$ পে.

$=\frac{240x+12y+z}{240}$ পা.।

প্রশ্নমালা 4 (পৃষ্ঠা 17-18)

1.	সদৃশ ;	সংখ্যাসূচক সহগ	প্রত্যেকটির 1.
2.	সদৃশ ;	" "	প্রত্যেকটির 11.
3.	সদৃশ ;	যথাক্রমে	4, 5, 7, 11.
4.	সদৃশ ;	"	2, 3, 7, 9.
5.	সদৃশ ;	"	2, 1, 5, 20
6.	প্রথম তিনটি সদৃশ ;	"	2, 5, 7;
	শেষের তিনটিও সদৃশ ;	"	2, 9, 3
7.	$2a^2x^2, a^2x^2, 5a^2x^2$ সদৃশ ;	"	2, 1, 5
	$3b^2y^2, 4b^2y^2, 2b^2y^2$	"	3, 4, 2
8.	$2ax, 8ax, 5ax$	"	2, 8, 5
	$3by, 5by, 2by$	"	3, 5, 2
	$2cz, 7cz, 9cz$	"	2, 7, 9

[প্রশ্নে সপ্তম রাশিটি $9cz$ হইবে]

9. অসদৃশ। **10.** অসদৃশ।

প্রশ্নমালা 5 (পৃষ্ঠা 20)

1. $5a$. 2. $16x$. 3. $3m$. 4. $10s$.
5. $11x^2$. 6. $13ab$ 7. $16abc$. 8. $9a^2b$
9. $30{\cdot}2a^2x^2$. 10. $28x^2y^2z^2$. 11. $5xyz$. 12. $27ax$.
13. $39a^3$. 14. $18\sqrt{abc}$. 15. $30x^2$. 16. $64\frac{bc}{a}$.
17. $10xyz$. 18. 2520. 19. 24000. 20. 400.
21. 829440000.

প্রশ্নমালা 6 (পৃষ্ঠা 22)

1. $4a$. 2. $6x$. 3. $5m^2$. 4. $3ab$.
5. $8ab$. 6. $2{\cdot}1xyz$. 7. $0{\cdot}5a^2x^2$. 8. $11{\cdot}69y^2z^2$.
9. $2\frac{1}{4}x^2y^2z^2$. 10. mnp. 11. $4ax$. 12. $5xyz$.
13. $4{\cdot}91x^2y^2z^2$ 14. $4\frac{1}{4}a^2$ 15. $7xy$. 16. $16xy$.
17. $3ab$. 18. $4xy$. 19. $12a^2$. 20. $2x^2$
21. $2xy$. 22. $14a$. 23. 0. 24. $3x^2$.
25. $3x^2$. 26. $5x$. 27. $3a$. 28. $4xy$.
29. $5x^2$. 30 $10abc$.

প্রশ্নমালা 7 (পৃষ্ঠা 25)

1-5. $6x$; $12a$; $28a^2$; $30ab$; $10xyz$.
6. $10ab$. 7. $12xy$. 8. $10a^2b$. 9. $6xy^2$.
10. $30ab^2c$. 11. $6xy^2z$. 12. $14a^5$. 13. $15x^3y^3$.
14. $4x^2y^2$. 15. $9m^2n^2p^2$. 16. $66x^2y^2z^2$. 17. $60a^3b^3c^3$.
18. $24a^4b^4c^4$. 19. $8m^3n^3p^3$. 20. $36x^4y^4z^4$.

প্রশ্নমালা 8 (পৃষ্ঠা 26)

1. 2. 2. 4. 3. $2b$. 4. $2x$. 5. 3.
6. $2x$. 7. $4bc$. 8. $3z$. 9. $3a$. 10. $5x$.
11. $4by$. 12. $3nr$. 13. $5x^2$. 14. $2x$. 15. $4ax$.
16. $5xyz$. 17. $3nqy$. 18. $5x^2$. 19. $3xz$. 20. xyz.
21. $3xyz$.

প্রশ্নমালা 9 (পৃষ্ঠা 30)

11. 20 টাকা ক্ষতি **12.** 30 টাকা লাভ **13.** 10 টাকা ব্যয়
14. 25 টাকা আয় **15.** 10 মা. উত্তরে **16.** 11 গজ পশ্চিমে
17. 100 হাত নীচে **18.** 9 মা. দক্ষিণ-পশ্চিমে **19.** 2 মাইল উপরে
20. সন্ধ্যার তিন ঘণ্টা পরে **21.** মধ্যাহ্নের 4 ঘণ্টা পরে
22. 500 টাকা হ্রাস **23.** ক খ হইতে 25 নম্বর কম পাইয়াছে
24. গ ঘ হইতে 15 টাকা বেশী পাইল **25.** ওজনের 9 সের হ্রাস
26. মধ্যাহ্ন-তাপের 10° হ্রাস **27.** জ্বরের 3° বৃদ্ধি
28. 15 টাকা লাভ **29.** 10 পাউণ্ড ব্যয়
30. 20 ফুট উপরে **31.** −10 টাকা লাভ
32. −25 পাউণ্ড ব্যয় **33.** −8 মণ কম **34.** −3 মাইল উত্তরে
35. −15° বৃদ্ধি **36.** 3. **37.** 7. **38.** 5.
39. 3. **40.** 10. **41.** 11. **42.** 14 টাকা
43. 15 পাউণ্ড **44.** 20° **45.** 17″.

প্রশ্নমালা 10 (পৃষ্ঠা 34-35)

1. $-5x$ **2.** $-9x$ **3.** $-10ab$ **4.** $-16abx$
5. $50{\cdot}3x^2$ **6.** $-14{\cdot}16x^3$ **7.** $-17.$ **8.** $-11x^2$
9. $-10xyz$ **10.** $-15a^2x^2.$ **11.** $2a.$ **12.** $2b.$
13. 0. **14.** $-3d.$ **15.** $6ex.$ **16.** $-17xy.$
17. $-5abc.$ **18.** $2cd.$ **19.** $3d^2.$
20. $-6{\cdot}8x^2y^2z^2.$ **21.** $-5x.$ **22.** $-9{\cdot}72a.$
23. $x.$ **24.** $-9x.$ **25.** 0.

প্রশ্নমালা 11 (পৃষ্ঠা 37-38)

1. $5a.$ **2.** $12b.$ **3.** 19. **4.** $31x.$
5. $35m.$ **6.** $-7n.$ **7.** $-6z.$ **8.** $-22ab.$
9. $3x^2$ **10.** $-70pq.$ **11.** $40xyz.$ **12.** $13ab.$
13. $-18x^2y^2.$ **14.** $2xyz.$ **15.** $15a.$ **16.** $-21x.$
17. $13ab.$ **18.** $5x+3a.$ **19.** $-2a^2.$ **20.** $7x^2+5a^2.$
21. $20a^2x^2.$ **22.** $-40x^2y^2z^2.$ **23.** $-53a^2b^2c^2.$ **24.** $21x^2.$

প্রশ্নমালা 12 (পৃষ্ঠা 40)

1. 0. 2. 0. 3. 0. 4. $2(a^2-b^2)$.
5. 0. 6. x^2. 7. $-5xy$. 8. 0.
9. $-6abc$. 10. $4b^2$. 11. $-12a^2$. 12. $-32xyz$.
13. $56x^3$. 14. x^2y^2. 15. -6. 16. -10.
17. 14. 18. -20. 19. 0. 20. 10.

প্রশ্নমালা 13 (পৃষ্ঠা 43)

1. -6. 2. 12. 3. 24. 4. -60.
5. 120. 6. $-\frac{1}{4}$. 7. 1. 8. 9.
9. -64. 10. 16. 11. -12. 12. -72.
13. $-{\cdot}06$. 14. ·06. 15. ·0625.

প্রশ্নমালা 14 (পৃষ্ঠা 45)

6. a^{15}. 7. x^{18}. 8. b^{12}. 9. a^{10}. 10. x^{13}.
11. a^{29}. 12. x^{36}. 13. a^{28}. 14. a^{11}. 15. a^{24}.
16. a^{11}. 17. x^{121}. 18. x^{22}. 19. x^{24}. 20. x^{198}.

প্রশ্নমালা 15 (পৃষ্ঠা 46-47)

1. $10a^2b$. 2. $6xy^2$. 3. $30a^3b^2$. 4. $-6x^4y^4$.
5. $15x^6y^4$. 6. $6abcxyz$. 7. $6abcmnp$. 8. $-6a^2bcxy$
9. $-15a^2b^2cx$. 10. $32x^4y^3z^5$. 11. $-99a^3b^5c^4$.
12. $-24a^3m^3$ 13. $81c^6d^2$. 14. $15a^6b^4$. 15. $15x^6y^{10}$.
16. $-56x^5y^{17}$. 17. $120x^{11}y^5z^5$. 18. $49x^4y^6z^2$.
19. $8a^6$. 20. $30a^{12}$. 21. $-8a^6b^3$. 22. $-64x^6y^9$.
23. $270x^2y^2z^2$. 24. $105a^6b^8c^{16}$. 25. $-90x^5y^{16}z^{14}$.
26. $48a^3b^3c^3$. 27. $x^{5m}y^{6n}$. 28. x^8. 29. $-x^3y^3$.
30. $81a^8b^4$. 31. $16x^8y^{12}$. 32. $81a^8b^{12}c^4$.
33. $144a^5b^5c^5d^5$. 34. $-2800a^9b^9c^{25}x^{13}$. 35. $x^{14}y^6z^3$.

প্রশ্নমালা 16 (পৃষ্ঠা 48)

1. -3. 2. 2. 3. 2. 4. -3. 5. 3.
6. 2. 7. -2. 8. 6. 9. $\frac{1}{3}$. 10. $-\frac{1}{2}$.
11. $-\frac{1}{4}$. 12. $\frac{1}{4}$. 13. $-\frac{1}{2}$. 14. $\frac{1}{6}$.

প্রশ্নমালা 17 (পৃষ্ঠা 49)

1. a. 2. x^5. 3. y^7. 4. a^3. 5. a^3.
6. b^3. 7. x^4. 8. x^4. 9. c^3. 10. d^3.

প্রশ্নমালা 18 (পৃষ্ঠা 52)

1. $-2by$. 2. $2ab$. 3. $-2x$. 4. $3ax$.
5. $4ac$. 6. $-4xy$. 7. $-3cz$. 8. $5xy$.
9. $-4x$. 10. $-3a^2$. 11. $-2x^2$. 12. $2a^2$.
13. $5a^4$. 14. $-5x^4$. 15. $2xy$. 16. $3xyz$.
17. $3a^2bc$. 18. $-\frac{1}{2}a^2bc$. 19. $-\frac{8}{5}ab$. 20. $-\frac{5}{2}mn^2$.
21. $-\frac{3}{5}abcd$. 22. $-\frac{5}{2}mr$. 23. $10a^6$. 24. $5x^2$.
25. $18x^4y^4$. 26. 1. 27. $7x$. 28. $2a^2$.
29. $4x^4$.

বিবিধ প্রশ্নমালা (ক) (পৃষ্ঠা 53-57)

I

1. $10\frac{1}{6}$ 2. 52. 3. $(3x+y)$ ফুট $=\dfrac{3x+y}{3}$ গজ
4. $18x$. 5. $3a$. 7. (ক) $15a^5b^9$; (খ) $3x^2y$.
8. $337\frac{1}{2}$.

II

2. -5. 4. $-2, 2, 2$. 5. 18.

6.

$x=$	0	1	2	3	4	5
$y=$	3	5	7	9	11	13

7. $7, 5, 1, -2, -5, -16$

8. $(x-y)$ টাকা লাভ বা $(y-x)$ টাকা ক্ষতি।

III

2. $-3\sqrt{a^2bc}$; -60. 3. 8. 4. 459.
6. (1) 0 ; (2) 0 ; (3) 0. 7. $6a^{12}$. 8. $35x^2y^2z^2$.

IV

2. 18. 5. $-3780x^3y^3z^3$. 6. $6xyz$. 7. 2185. 8. 0.

V

1. xy. 2. x. 3. 0. 4. $(x-y)$ টা. ; $(x-y-10)$ টা.
5. $-a$. 6. $24a^{10}$. 8. (i) 4 ; (ii) $\frac{b}{a}$.

VI

2. $2\frac{14}{85}$. 3. $15-x$. 4. a. 5. 3, 7, 5, 11, 19, 20.

VII

1. $\frac{36}{49}$. 2. সূচক $=1$, সহগ $=1$; $a^0=1$; 18. 3. 114, 170.
5. 35. 6. $x \not> a$ হইলে b আনা ; $x>a$ হইলে $(b+x-a)$ আ.
7. xy বর্গফুট ; xyz টাকা 8. 3.

VIII

2. (i) $9\frac{3}{4}$; (ii) $5\frac{5}{8}$; (iii) $8\frac{1}{2}$. 3. $2x$. 4. $(x+y+z)$ বৎসর
7. 0. 8. 59.

প্রশ্নমালা 19 (পৃষ্ঠা 59)

1. (i) x^2+3x+2 ; (ii) $2+3x+x^2$.
2. (i) $-9x^3+3x^2+15x$; (ii) $15x+3x^2-9x^3$.
3. (i) $6x^3+3x^2+2x+5$; (ii) $5+2x+3x^2+6x^3$.
4. (i) $15x^3-9x^2+8x-17$; (ii) $-17+8x-9x^2+15x^3$.
5. (i) $2x^4-15x^3+9x^2+17x+3$;
(ii) $3+17x+9x^2-15x^3+2x^4$.
6. (i) $2x^4-3x^3y+20x^2y^2+9xy^3+3y^4$;
(ii) $3y^4+9xy^3+20x^2y^2-3x^3y+2x^4$.

7. (i) $2x^6+20x^5y+4x^3y^2+3xy^6+y^4$;
(ii) $y^4+3xy^6+4x^3y^2+20x^5y+2x^6$.

8-9. (i) $3y^4+9xy^3+20x^2y^2-3x^3y+2x^4$;
$3xy^6+y^4+4x^3y^2+20x^5y+2x^6$.
(ii) $2x^4-3x^3y+20x^2y^2+9xy^3+3y^4$;
$2x^6+20x^5y+4x^3y^2+y^4+3xy^6$.

10. (i) $-7x^6y^5z^3+x^5y^3z^4+2x^4-3x^3yz+4x^2y^2z^5+5xy^4z^2$;
(ii) $-7x^6y^5z^3+5xy^4z^2+x^5y^3z^4+4x^2y^2z^5-3x^3yz+2x^4$;
(iii) $4x^2y^2z^5+x^5y^3z^4-7x^6y^5z^3+5xy^4z^2-3x^3yz+2x^4$.

প্রশ্নমালা 20 (পৃষ্ঠা 61-62)

1. $10a+6b$. 2. $15x+12y$. 3. $13m+22n$.
4. $11a+6b+8c$. 5. $18x+12y+10z$. 6. $11p+10q+11r$.
7. $x+y+z$. 8. $15a+5b+3c$. 9. $4f-2g+2h$.
10. $6x^2$ 11. $12ax$. 12. $\frac{5}{2}qr+\frac{33}{8}rp+\frac{43}{42}pq$.
13. $\frac{19}{16}a^2+\frac{5}{18}b^2+\frac{3}{20}c^2+\frac{47}{66}d^2$. 14. $13a^3+6a^2x+12ax^2+18x^3$.
15. xyz. 16. $\frac{19}{8}x^4+\frac{11}{10}x^3y+\frac{30}{7}x^2y^2+\frac{41}{6}xy^3-\frac{29}{6}y^4$.
17. 0. 18. 0. 19. $a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$.
20. $-5fx+23gy-2hz$. 21. $10cxy$.
22. $8x^3-8x^2y+12xy^2+6y^3$. 23. $-8x^3+13y^3-2z^3+xyz$.
24. 48. 25. 32. 26. 18.

প্রশ্নমালা 21 (পৃষ্ঠা 64-65)

1. 3. 2. $3a+2b$. 3. $3a-x$. 4. $-2a-e$.
5. $p-11q$. 6. $-8x+2y$. 7. $m+2n$. 8. $a-b+c$.
9. x^2+4x-4. 10. $\frac{1}{8}x^2+\frac{9}{4}xy+\frac{4}{2}y^2$.
11. $1{\cdot}3x^2+2y^2+\frac{5}{2}z^2+a^2$. 12. $2x^3-x^2y+3xy^2-3y^3$.
13. $5x^3-5x^2+21x+5$. 14. $3a^4+6a^2b^2+3ab^3+b^4$.
15. $-2ax-by-5cz$. 16. $3x^3-x^2+6x+5$.
17. $x^3+2x^2y+8xy^2+2y^3$. 18. $bc+ca+ab$.
19. $x^2+5xy+y^2$. 20. $6x^2y+2y^3$. 21. $8a^3b+8ab^3$.
22. $x^2-xa+a^2+x+a+1$.

23. (i) $a^2-2ab+b^2$; (ii) $7x^2+10y^2-4xy$.

24. (i) $2x^3+x^2+4x+1$; (ii) $a^3-2a^2b-ab^2+2b^3$.

25. (i) $p^2+q^2+r^2-2qr-2rp-2pq$;
(ii) $x^2+y^2+z^2-x-y-z-1$.

প্রশ্নমালা 22 (পৃষ্ঠা 68)

1. $3x+6y$. **2.** $8ax+12ay$. **3.** $42ax-30bx$.
4. $-8ax-12ay$. **5.** $35a^2-15ab$. **6.** $-15x^2-6xy$.
7. $15xy+20y^2$. **8.** $12x^2y-15xy^2$. **9.** $-14a^2b+21ab^2$.
10. $-27x^3y^2+15x^2y^3$. **11.** $12a^3b-18a^2b^2+30ab^3$.
12. $12m^3n+24m^2n^2-8mn^3$. **13.** $4x^8-12x^6+8x^4-20x^2$.
14. $-18xy^2z^2+12x^2yz^2+24x^2y^2z$.
15. $8a^3bcx^2-12ab^3cy^2-20abc^3z^2$.
16. $-2x^5y^2+6x^4y^3-6x^3y^4+2x^2y^5$.
17. $9x^6y^5z^4-27x^4y^6z^8+72x^3y^8z^5$.
18. 0. **19.** $6x^3+12$. **20.** $7m^4-5$. **21.** 0.
22. $-18y^2z^2$. **23.** 115780000. **24.** 8795·6.
25. $5x^2-6y^2-5z^2-xy-10yz-3zx$.

প্রশ্নমালা 23 (পৃষ্ঠা 70-71)

1. x^2+5x+6. **2.** x^2-2x-8. **3.** $x^2-2x-35$.
4. $x^2-11x+24$. **5.** $8x^2+22x+15$. **6.** $12x^2+x-35$.
7. $12x^2+x-6$. **8.** $24x^2-71x+35$.
9. $-14x^2+11xy-2y^2$. **10.** $40x^2+7xy-66y^2$.
11. a^3-a+6. **12.** $6a^3-5a^2+6a+8$.
13. $6x^3-17x^2+8x+6$. **14.** $-9x^3+33x^2-13x-20$.
15. $33x^3+x^2-2x+8$. **16.** $6a^3-5a^2b-3ab^2+2b^3$.
17. $24x^3-58x^2y+23xy^2+15y^3$.
18 $14m^3-25m^2n+12mn^2-9n^3$.
19. $12x^3+4x^2y-17xy^2+6y^3$. **20.** x^4-y^4.
21. $a^4+a^2b^2+b^4$. **22.** $x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$.

23. $6x^2+6y^2+20z^2+13xy+22yz+23zx$.

24. $6x^4-13x^3y+19x^2y^2-17xy^3+5y^4$.

25. $-6a^4-a^3b+20a^2b^2-22ab^3+8b^4$.

প্রশ্নমালা 24 (পৃষ্ঠা 72-73)

1. $a+2$. 2. $2b+3$. 3. $3x-4$. 4. $2y-5$.
5. $x+y$. 6. $x-2y$. 7. $a-3b$. 8. $2a-b$.
9. $a-\frac{3}{2}b$. 10. $3x-4y$. 11. $2x-3y$. 12. a^2-2a+1.
13. $a-3b-2c$. 14. $a^2-2ab-3b^2$.
15. $-a^3b^3+2a^2b-3b^2$. 16. $x^2-3xy-4y^2$.
17. $x^2+2xy+\frac{2}{3}y^2$. 18. $a^2+3ab-2b^2$.
19. $2a-3b-c+4$. 20. $x^2+2xy-3yz-\frac{1}{2}z^2$.

প্রশ্নমালা 25 (পৃষ্ঠা 75-76)

1. x. 2. $2x$. 3. $a+1$. 4. $x-2$.
5. $2x+5$. 6. $5x+2y$. 7. $x-2a$. 8. $a+x$.
9. $3x-2y$. 10. $3a-2x$. 11. $5x-6y$.
12. x^2+5x+6. 13. x^2+3x+2. 14. $3x^2+4xy-y^2$.
15. $3a^2-ab+b^2$. 16. $3+3a+a^2$. 17. $3-11x+6x^2$.
18. $12a^4+8a^2-1$. 19. $3x^2-x-4$. 20. $8x^3+12x^2+6x+1$.
21. $8a^3-28a^2b+28ab^2-8b^3$. 22. $27x^3-54x^2y+33xy^2-6y^3$.
23. $x+1$. 24. x^2-xy+y^2. 25. $3x^2-2xy+y^2$.

প্রশ্নমালা 26 (পৃষ্ঠা 79-80)

1. b. 2. b. 3. $2a$. 4. $2b$.
5. 0. 6. 0. 7. $a+b+c$. 8. $2x-2y$.
9. 2. 10. $6x-6y$. 11. 0. 12. 0.
13. $3a-3b$. 14. $-2z$. 15. 0. 16. 0.
17. $-30x+30z$. 18. $8a+9b-3c$. 19. $-9x+22y+9z$.
20. $a+b+c$. 21. $2a+2b+2c$. 22. 0. 23. $b+c-a$.

প্রশ্নমালা 27 (পৃষ্ঠা 81-82)

1. 2601. **2.** 3844. **3.** 6561. **4.** 10404.
5. 50625. **6.** a^2+6a+9. **7.** $4x^2+20x+25$.
8. $9m^2+12mn+4n^2$. **9.** $16a^2+40ax+25x^2$.
10. $9c^2+30cz+25z^2$. **11.** $81x^2+144xy+64y^2$.
12. $25p^2+70pq+49q^2$. **13.** $4a^2b^2+12ab^2c+9b^2c^2$.
14. $9b^2c^2+24abc^2+16c^2a^2$. **15.** $4a^4+12a^2b^2+9b^4$.
16. 100. **17.** 4. **18.** $9a^2$. **19.** $9x^2+6x+1$.
20. $36a^2$. **21.** $36x^2$. **22.** 100. **23.** 10000.
24. 105094. **25.** 16. **26.** 0. **27.** 13.

প্রশ্নমালা 28 (পৃষ্ঠা 84-85)

1. 1521. **2.** 9801. **3.** 7921. **4.** 38809.
5. 992016. **6.** $x^2-10x+25$. **7.** $4x^2-20x+25$.
8. $9m^2-12mn+4n^2$. **9.** $16a^2-40an+25n^2$.
10. $9c^2-30cz+25z^2$. **11.** $81x^2-144xy+64y^2$.
12. $4a^2b^2-12ab^2c+9b^2c^2$. **13.** $9b^2c^2-24abc^2+16c^2a^2$.
14. $4a^4-12a^2b^2+9b^4$. **15.** 4. **16.** 16.
17. a^2. **18.** $4x^2$. **19.** $x^2+2xy+y^2$. **20.** 4.
21. ·16. **22.** 74943. **23.** 0. **24.** 4.
25. 2500. **26.** 400. **27.** (i) 13 ; (ii) 11 ; (iii) 119
29. (i) p^2-2. **30.** (i) 29 ; (ii) 49 ; (iii) ± 7.
31. (i) 9 ; (ii) ± 3. **32.** (i) 274 ; (ii) 176.

প্রশ্নমালা 29 (পৃষ্ঠা 87-88)

1. a^2-4. 2. a^2-x^2 **3.** $4a^2-9x^2$.
4. $25m^2-49n^2$. **5.** $a^2x^2-b^2y^2$. **6.** $x^4-y^2z^2$.
7. $4a^4-9b^4$. 8. $25a^2b^2-9b^2c^2$. 9. $x^{2m}-a^{2n}$.
10. $4x^{2m}-9a^{2n}$. **11.** $x^2+2zx+z^2-y^2$.
12. x^4-1. **13.** $1-a^4$. **14.** $16a^4-81b^4$.
15 x^8-y^8. **16.** 144. **17.** 4383

18. 69295. **19.** 165460. **20.** 357842.
21. 15004. **22.** 126244. **23.** $4a+16$.
24. $5x^2+18xy$. **25.** $-16a^2+32ab+80a$.
26. $40x^2-40xy-160zx$. **27.** $4mn-7n^2-14np$.
28. $(x+5)^2-2^2$. **29.** $(2a+4)^2-1^2$.
30. $(2a+4b)^2-(a+b)^2$.

প্রশ্নমালা 30 (ক) (পৃষ্ঠা 89)

1. x^2+3x+2 **2.** x^2+5x+6. **3.** a^2+6a+8.
4. $m^2+14m+45$. **5.** $x^2+17x+72$. **6.** n^2+2n-3.
7. $y^2+3y-10$. **8.** $x^2+4x-21$. **9.** $x^2+2x-99$.
10. $x^2-11x-60$. **11.** $x^2-7x-44$. **12.** $y^2-5y-24$.
13. $a^2-8a-20$. **14.** x^2-5x+6. **15.** $c^2-10c+21$.
16. $m^2-11m+30$. **17.** $n^2-15n+56$. **18.** x^2+5x+6.
19. $10-3x-x^2$. **20.** $x^2+3x-10$. **21.** $2-3p+p^2$.
22. $15-8m+m^2$. **23.** $-x^2+7x-10$. **24.** $21-4x-x^2$.
25. $4x^2+8x+3$. **26.** $9x^2+21x+10$.
27. $16a^2+16a-21$. **28.** $25a^2-35a-18$.
29. $49x^2-77x+24$. **30.** $-4b^2+16b-15$.
31. $-9c^2+27c-20$. **32.** $-16x^2+8x+99$.
33. $-25x^2+85x-72$. **34.** $9a^2-27a+20$.
35. $56-60y+16y^2$.

প্রশ্নমালা 30 (খ) (পৃষ্ঠা 90-91)

1. x^3+1. **2.** x^3+8. **3.** $27+a^3$. **4.** $8x^3+a^3$
5. $27m^3+8n^3$. **6.** x^6+y^6. **7.** $64p^3+27q^3$.
8. $8x^3+343y^3$. **9.** x^6-1. **10.** x^6-64.
11. $64x^6-1$. **12.** $x^{12}-y^{12}$. **13.** 100.
14. 1260.

প্রশ্নমালা 30 (গ) (পৃষ্ঠা 91)

1. x^3-1. **2.** x^3-8. **3.** $27-a^3$. **4.** $8x^3-a^3$.
5. $27m^3-8n^3$. **6.** x^6-y^6. **7.** $64p^3-27q^3$. **8.** x^6-1.

9. x^6-64. 10. $64x^6-1$. 11. $x^{12}-y^{12}$. 12. x^6-y^6.
13. 0 14. 742. 15. 1.

প্রশ্নমালা 31 (পৃষ্ঠা 94-95)

1. 3.	2. 4.	3. 8.	4. 3.	5. 11.
6. 6.	7. 20.	8. 98.	9. 60.	10. 96.
11. 2.	12. 12.	13. 2.	14. 5.	15. 17.
16. 30.	17. 2.	18. 4.	19. 4.	20. 2.
21. 7.	22. 20.	23. 12.	24. 3.	25. 4.
26. 10.	27. 12.	28. 25.	29. 15.	30. 3.
31. 2.	32. 4.	33. 2.	34. 1.	35. 2.
36. 12.				

প্রশ্নমালা 32 (পৃষ্ঠা 96-98)

1. 6.	2. 27.	3. 7.	4. 45.	5. 7.
6. 26.	7. 6.	8. 11.	9. 13.	10. 125.
11. 27.	12. 40.	13. 32.	14. 60.	15. 96.

16. 56. 17. 80. 18. 8, 24. 19. 23 বৎসর
20. 120 টা. 21. *A* 200 টা., *B* 100 টা. 22. 20.
23. 55, 15. 24. 20, 60. 25. 65, 35.
26. *A* 20 টা., *B* 15 টা. 27. 55 বৎ., 25 বৎ.
28. প্রথম 6000 টা., দ্বিতীয় 3000 টা., তৃতীয় 1000 টা.
29. ঘড়ি 125 টা., কলম 25 টা. 30. 1000 টা.
31. 60 বৎ., 30 বৎ. 32. 17, 18, 19.
33. 22, 24, 26. 34. 29, 31, 33.
35. *A* 25 টা., *B* 15 টা, *C* 10 টা. 36. 40, 30, 15.
37. *A* 85, *B* 25, *C* 10. 38. 25.
39. 20, 30, 50. 40. *A* 30 টা., *B* 40 টা., *C* 50 টা.।

বিবিধ প্রশ্নমালা (খ) (পৃষ্ঠা 104-108)

I

1. 0. 2. $-2x^2+10xy+2y^2$.
3. (i) $9x^4-5x^3+7x^2+2x-2$; (ii) $-2+2x+7x^2-5x^3+9x^4$.
5. $2x^2-3xa+2a^2$. 6. 0. 8. 25.

II

1. 186·426. 2. 0. 4. $9x^2+9xa+5a^2$. 5. 0.
6. 100. 8. 6.

III

1. 1. 3. 4. 4. 0. 5. $6x^5+5x^4-11x^3+17x^2-37x+20$.
6. $2x^2-xy-y^2$. 7. 0. 8. 26 ; 6.

IV

2. 0. 3. 1. 4. 0. 6. (i) $ax^4+5bx^3y^3+3cx^2y^2+4dxy^4+9ey^5$; (ii) $9ey^5+4dxy^4+5bx^3y^3+3cx^2y^2+ax^4$.
7. 1. 8. 36 বৎসর।

V

1. $3x^2-11$. 2. 0. 3. 38. 4. $2x^5-9x^4+22x^3-35x^2+38x-24$. 5. $2x^3-x^2+3x-4$
7. (i) 44 ; 45 ; 46 ; (ii) 9, 10.

VI

1. 128. 2. a. 3. 0. 4. $(2x+3)^2-(x-2)^2$.
5. $2x^8+x^6+x^4-7x^2+3$. 6. $1+2a+5a^2$. 7. 1.
8. 9 বৎসর।

VII

1. (i) $x^2+6xy+7y^2$; (ii) $2p^2-pq-6q^2$. 2. a^4-b^4.
3. $a+3b+2d$. 4. $3x^3-4x^2+6x-12$. 6. 1.
7. 2. 8. 24 ফুট।

VIII

1. 1. 2. $9a^2$. 3. $-3x^5+8x^4y-15x^3y^2+9x^2y^3+2xy^4-y^5$.
4. a^4-a^2+a. 5. $-27x+78y-88z$. 6. 1.
7. 84 বৎসর।

প্রশ্নমালা 34 (পৃষ্ঠা 110-112)

1. x^2+xy+y^2. 2. $2x$. 3. $\frac{9}{8}b-\frac{1}{8}c$. 4. 0.
5. $2y-z$. 6. $10\sqrt{bc}$. 7. 0.
8. $(a^2+a+1)x+(b^2+b+1)y+(c^2+c+1)z$.
9. $2(a+b+c)y^2+2(a+b+c)yz+2(a+b+c)z^2$. 10. 0.
11. $x^3+(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x+abc$. 12. 0.
13. $-\frac{3}{40}x+\frac{17}{120}y$. 14. $\frac{7}{40}x-2\frac{59}{80}y$.
15. $6x^5-5x^4y+7x^3y^2-8x^2y^3-19xy^4+y^5$.
16. $a^3+b^3+c^3-3abc$. 17. 0. 18. 0.
19. $a^4+b^4+c^4-2b^2c^2$. 20. $-27x^2+49x-153$.

প্রশ্নমালা 35 (পৃষ্ঠা 113-114)

1. $2y$. 2. $a+4b$. 3. $5a-b$. 4. $\frac{11}{7}p+\frac{1}{7}q-\frac{19}{8}r$
5. $(a+l)x+(b+m)y+(c+n)z$. 6. $ax^2+abxy+by^2$.
7. $(l+m-n)x^2+(-p+5q)y^2+(c+d)z^2$. 8. $\frac{61}{30}a+\frac{17}{6}b$.
9. $-2x^2-3xy+\frac{47}{8}y^2$. 10. $4x^2+2xy-y^2$.
11. $4x^2+92x-79$. 12. $-248x^3+159x^2+38x+9$.
13. $ax^2+cxy+ey^2$. 14. $2pa^2+2qb^2+(-p+q)ab$
15. $2x+2y+2z$.

প্রশ্নমালা 36 (পৃষ্ঠা 119-121)

1. $x^8+x^4y^4+y^8$. 2. $2a^8+a^6+a^4-7a^2+3$.
3. $2a^6+a^5-17a^4-33a^3-2a^2+23a-4$.
4. $6x^6+11x^5y-5x^4y^2+15x^3y^3-29x^2y^4+14xy^5-12y^6$.

5. $2a^6+5a^5b-6a^4b^2-24a^3b^3-8a^2b^4+31ab^5+15b^6$.

6. $\frac{1}{16}a^6+\frac{7}{24}a^5-\frac{91}{160}a^4-\frac{1}{16}a^3+\frac{17}{180}a^2-\frac{13}{150}a+\frac{4}{15}$.

7. $-x^8+\frac{7}{4}x^7-\frac{89}{24}x^6-\frac{2}{15}x^5+\frac{21}{5}x^4-\frac{373}{90}x^3+\frac{259}{120}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{6}$.

8. $-2x^8-10x^7-2x^6+26x^5-10x^4+17x^3-3x^2-30x+20$

9. $m^8+2m^7n+3m^6n^2-8m^5n^3-18m^4n^4+14m^3n^5+37m^2n^6-12mn^7-33n^8$.

10. $-\frac{1}{4}+\frac{17}{15}a-\frac{433}{240}a^2+\frac{317}{360}a^3+\frac{41}{42}a^4-\frac{3}{2}a^5-a^6-\frac{3}{2}a^7$.

11. $\frac{6}{5}x^6-x^5y-\frac{3}{10}x^4y^2-5\frac{19}{20}x^3y^3+\frac{1}{6}x^2y^4+\frac{3}{2}xy^5+y^6$.

12. $10a^{12}-17a^{10}-21a^8+21a^6-2a^4-14a^2+3$.

13. $9x^8-18x^7+36x^6+21x^5-19x^4+92x^3+14x^2-45x+10$.

14. $8x^9+6x^8-20x^7+8x^6-17x^5-20x^4+59x^3-49x^2+50x-25$.

15. $6x^{10}-43x^9+261x^8-316x^7-187x^6+1791x^5-119x^4-852x^3-408x^2-317x+492$.

16. $apx^4+(bp+aq)x^3+(cp+bq+ar)x^2+(cq+br)x+cr$.

17. $aa'x^4+2(ah'+a'h)x^3y+(ab'+a'b+4hh')x^2y^2+2(bh'+b'h)xy^3+bb'y^4$.

18. $-alx^5+(2bl-3am)x^4+(6bm+2an-3cl)x^3+(4dl-9cm-4bn)x^2+(12dm+6cn)x-8dn$.

19. $-2amx^5+(6an+3bm)x^4+(4ap-9bn+cm)x^3-(2aq+6bp+3cn)x^2+(3bq-2cp)x+cq$.

20. $adx^2+bey^2+cfz^2+(ae+bd)xy+(bf+ce)yz+(af+cd)zx$.

21. $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2z^2x^2-2y^2z^2$.

22. $b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+a^2b+ab^2+3abc$.

23. $x^3+y^3-z^3+3xyz$. 24. $8a^3+27b^3+c^3-18abc$.

25. $8m^3-n^3-p^3-6mnp$. 26. $x^3+6x^2+11x+6$.

27. $a^3-a^2-22a+40$. 28. $6x^3-13x^2-13x+30$.

29. x^4-a^4. 30. a^6-b^6. 31. a^8-b^8. 32. x^6-y^6.

33. $x^{12}-y^{12}$. 34. $a^{16}-b^{16}$ 35. $24x^8+18x^7y-124x^6y^2+x^5y^3+116x^4y^4+46x^3y^5-163x^2y^6+22xy^7+24y^8$.

36. $a^{16}+a^8b^8+b^{16}$. 37. $b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+a^2b+ab^2+2abc$.

38. $-y^2z+yz^2-z^2x+zx^2-x^2y+xy^2$. 39. $-\frac{1}{9}x^3-\frac{5}{54}x^2y+$

$\frac{41}{432}xy^2+\frac{1}{36}y^3$. **40.** $\frac{x^8}{256}-\frac{y^8}{6561}$. **41.** $-a^3-b^3-c^3+a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2-2abc$. **42.** $\frac{1}{4}x^3+\frac{5}{36}y^3-\frac{3}{32}z^3-\frac{91}{144}x^2y+\frac{14}{27}xy^2+\frac{19}{72}y^2z+\frac{29}{192}yz^2-\frac{41}{384}z^2x+\frac{199}{576}zx^2-\frac{523}{864}xyz$. **43.** $3x^8+2\frac{169}{420}x^7-5\frac{13}{28}x^6+3\frac{947}{1260}x^5-5\frac{11}{14}x^4+1\frac{319}{360}x^3-1\frac{11}{72}x^2+\frac{89}{120}x-\frac{1}{3}$. **44.** $1-2x^8+x^{16}$. **45.** 2.
46. 25. **47.** 44. **48.** -11; -28. **49.** -35; -76.
50. $2a^4+12a^3b+12a^2b^2+10ab^3+b^4$. **51.** $6x^3-5x^2+6x+8$.
52. $10a^4-a^3b-27a^2b^2+10ab^3+8b^4$. **53.** $9a^5-24a^4+28a^3-19a^2+8a-2$. **54.** $x^7-6x^6y+17x^5y^2-30x^4y^3+35x^3y^4-26x^2y^5+11xy^6-2y^7$. **55.** $2x^9-7x^8+11x^7-17x^6+11x^5+19x^4-53x^3+48x^2+18x-4$.

প্রশ্নমালা 37 (পৃষ্ঠা 126-129)

1. $3+2x+5x^2$. **2.** $1-3x+x^2$.
3. $2a^4-4a^2+5a-3$. **4.** x^2-x+2.
5. $7+3a-5a^2$. **6.** $\frac{2}{9}x^2+\frac{1}{6}xy+\frac{5}{4}y^2$.
7. $-\frac{2}{3}a^2-ab+\frac{3}{2}b^2$. **8.** $\frac{1}{4}a\ -\ \frac{}{2}a-\frac{2}{9}$.
9. $x^3-3x^2y+2xy^2-5y^3$. **10.** $y^3-2y^2+6y-12$.
11. $\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{5}x^2-x-2$. **12.** a^2+a+3.
13. $\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{3}ab+\frac{1}{9}b^2$. **14.** $a^4-2a^3+3a^2-2a+1$.
15. $3x^4-2x^3+\frac{3}{2}x^2-3$. **16.** x^2+2x+1.
17. $2x^3-x^2-5$. **18.** a^3-99a^2+a-29.
19. $2x^2-3xy+y^2$. **20.** $3x^3-2x^2+8x-3$.
21. $7x^4-4x^3-3x+1$.
22. $x-a$. **23.** $x+1$.
24. $x^2-(a+b)x+ab$. **25.** $x^2+y^2+a^2$.
26. $2x^2-2(a+b)x+ab$. **27.** $x^2-2ax-(a^2-1)$.
28. $x^2+5(a-1)x-b$. **29.** $2ax-(3b-4c)y$.
30. $a^4-8(x^2+y^2)a^2+16(x^4-x^2y^2+y^4)$.
31. $2a-3b+4c$. **32.** $b-c$.
33. $b+c$. **34.** $a+b+c$.

35. $b^2+2bc+c^2-a^2$.
36. $b^2-c^2+a(b-c)$.
37. $x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy$.
38. $xy-yz+zx-x^2$.
39. $a^2+b^2+c^2+bc-ca+ab$.
40. $x+y-2z$.
41. $x-3$.
42. $x+12y$.
43 $2a+3$.
44. $2a^2-2ab+5b^2$.
45. $16a^4+8a^3b-2ab^3-b^4$.
46. $4x^2-a^2$.
53. $x+\dfrac{3}{x+2}$.
54. $x+y+\dfrac{3y^2}{2x+y}$.
55. $a-\frac{9}{5}b-\dfrac{\frac{19}{5}b^2}{5a-b}$.
56. $1+2x+3x^2+3x^3+\cdots\cdots$
57. $1-x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^3+\cdots$
58. $2-3x+15x^2-45x^3+\cdots$
59. $1+x+x^2+x^3+\cdots$
60. $1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$

প্রশ্নমালা 38 (পৃষ্ঠা 131-132)

1. $x^2+y^2+z^2+2yz+2zx+2xy$.
2. $4a^2+9b^2+16c^2+12ab+16ca+24bc$.
3. $9x^2+4y^2+16z^2-12xy+24xz-16yz$.
4. $a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2$.
5. $y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2-2xyz(x-y+z)$.
6. $x^2+y^2+z^2+t^2+2xy+2xz+2xt+2yz+2yt+2zt$.
7. $a^2+b^2+c^2+d^2-2ab+2ac-2ad-2bc+2bd-2cd$.
8. 40. 9. 594. 10. ± 25. 11. 70. 12. 34.
16. 36. 17. ± 15. 18. 72.

প্রশ্নমালা 39 পৃষ্ঠা (133-134)

1. $x^2+y^2-z^2+2xy$.
2. $4x^2+9y^2-25z^2+12xy$
3. $9a^2-49b^2+4c^2+12ac$.
4. $x^4+3x^2y^2+4y^4$.
5. $a^4-2a^2b^2+b^4$.
6. $4x^4-5x^2y^2+y^4$
7. (i) x^4-1; (ii) x^8-1.
8. (i) $1-a^4$; (ii) $1-a^8$.
9. x^8-y^8.
10. $x^8+x^4y^4+y^8$.
11. x^6-y^6.
12. x^6-y^6.
16. $1-a^6$.
17. x^6-1.
18. 0.
19. 0.
20. 0.

প্রশ্নমালা 40 পৃষ্ঠা (136-137)

1. $x^3+15x^2+75x+125.$ 2. $8x^3+36x^2+54x+27.$
3. $27a^3+135a^2+225a+125$ 4. $a^3+9a^2x+27ax^2+27x^3$
5. $8a^3+60a^2b+150ab^2+125b^3.$
6. $64a^3+144a^2x+108ax^2+27x^3.$
7. $27p^3+135p^2q+225pq^2+125q^3.$
8. $8x^6+36x^5+54x^4+27x^3.$
9. $8a^3+b^3+c^3+12a^2b+12a^2c+6ab^2+6ac^2+12abc$ $+3b^2c+3bc^2.$
10. $8a^3+27b^3+c^3+36a^2b+12a^2c+54ab^2+36abc+6ac^2+27b^2c$ $+9bc^2.$

11. 125. 12. $27a^3.$ 13. $64x^3,$ 14. $216a^3.$
15. 1000. 16. $1000x^3.$ 17. $512x^3.$ 18. 64.
19. $10^6.$ 20. 0. 21. 64. 22. 1000.
23. $-1.$ 24. 0. 25. 110. 26. 35.
27. $a^3-3ab.$

প্রশ্নমালা 41 (পৃষ্ঠা 138-139)

1. $x^3-15x^2+75x-125.$ 2. $8x^3-36x^2+54x-27.$
3. $27a^3-135a^2+225a-125.$ 4. $27x^3-27x^2a+9xa^2-a^3.$
5. $8a^3-60a^2b+150ab^2-125b^3.$
6. $64a^3-144a^2x+108ax^2-27x^3.$
7. $8x^6-36x^5+54x^4-27x^3.$
8. $a^3-b^3+c^3-3a^2b+3a^2c+3ab^2+3ac^2-6abc+3b^2c-3bc^2.$
9. $8a^3-27b^3-c^3-36a^2b-12a^2c+54ab^2+6ac^2+36abc-$ $27b^2c-9bc^2.$

10. 64. 11. 27. 12. 1. 13. $a^3.$
14. $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3.$ 15. $x^3.$
16. $x^3+3x^2a+3xa^2+a^3.$ 17. $m^3-3m^2n+3mn^2-n^3.$
18. 0. 19. $-8.$ 20. 343. 21. $-64.$ 22. 36.
23. $a^3+3a.$ 24. 553.

প্রশ্নমালা 43 (পৃষ্ঠা 145)

1. $3(x+4)$. 2. $6(2x-y)$. 3. $a(x+y)$.
4. $a(1+a)$. 5. $x(x-y)$. 6. $x(3x^2+2y)$.
7. $a(-2a+3b)$. 8. $x(b+a)$. 9. $ab(a+b)$.
10. $2ab(2p+3q)$. 11. $3ab(2c-3d)$. 12. $4x^2(x-3y)$.
13. $4ab(c^2-2ab)$. 14. $x^2y(x+y+1)$. 15. $a^2(3x-4y+2z)$.
16. $3xyz(2x-3y+4z)$. 17. $4a^3(a^2-5ab+4b^2d)$.
18. $2abc(x^2-4xy+2y^2)$. 19. $6xya^2(xa^2-4yza+5xy^2)$.
20. $a^2b^2c^2(pa+5qb-20rc)$. 21. $(a+b)(x+2)$.
22. $(x+y)(a+b)$. 23. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)$.
24. $2a(y+z)$. 25. $(2x+3y)(a+b+c+d)$.
26. $(x+y)(a+b+c)$. 27. $(x+y+z)(a+b+c)$.
28. $(a+b)(2x^2+3xy+4y^2)$. 29. $(ax+by+cz)(a+b+c)$
30. $2(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)$. 31. $(a+3)(x+y)$.
32. $(a-b)(x+y)$. 33. $(a-b)(a-c)$. 34. $(a+1)(b+1)$.
35. $(x+y)(a-b+2)$. 36. $(a+2b-3c)(x+y-2z)$.

প্রশ্নমালা 44 (পৃষ্ঠা 146-147)

1. $(2a+b)(2a-b)$. 2. $(a+2b)(a-2b)$.
3. $(a+3b)(a-3b)$. 4. $(3x+5y)(3x-5y)$.
5. $(a+3)(a-3)$. 6. $(2a+5)(2a-5)$.
7. $(ax+2)(ax-2)$. 8. $(3+by)(3-by)$.
9. $(4m+7n)(4m-7n)$. 10. $(4x^2+1)(2x+1)(2x-1)$.
11. $(3a+x)(3a-x)(9a^2+x^2)$. 12. $(2a+5b)(2a-5b)(4a^2+25b^2)$.
13. $3(a+b)(b-a)$. 14. $4a(b-c)$.
15. $(x-y+2z)(3x-5y+8z)$. 16. $(11a-b)(5b-7a)$.
17. $(17x-20y)(40y-7x)$. 18. $(20a-5b-6c)(13b-4a-18c)$
19. $x^2(a-1)(a+1)$. 20. $x^2(2x+a)(2x-a)$.
21. $3a^2(a+3b)(a-3b)$. 22. $5x^4(3x^2+a^2)(3x^2-a^2)$.
23. $3x^2y^2z^2(9x^2+2y^2)(9x^2-2y^2)$.
24. $x^2y^2z(3x+2z)(3x-2z)(9x^2+4z^2)$.
25. $(x+a)(y+b)(x+y+a+b)(x-y+a-b)$.

প্রশ্নমালা 45 (পৃষ্ঠা 148-149)

1. $(a+b+c)(a+b-c)$.
2. $(x+2y+z)(x+2y-z)$.
3. $(2m+3n+4p)(2m+3n-4p)$.
4. $(x+a+1)(x-a+1)$.
5. $(2x+a+2b)(2x+a-2b)$.
6. $(2a+3b+c)(2a+3b-c)$.
7. $(3x-2y+4z)(3x-2y-4z)$.
8. $(3a-2b+4)(3a-2b-4)$.
9. $(x+y+1)(x-y-1)$.
10. $(a+x-y)(a-x+y)$.
11. $(x+y+z)(x-y-z)$.
12. $(a+b+c+d)(a+b-c-d)$.
13. $(x+a+y+b)(x+a-y-b)$.
14. $(x+a+y-b)(x+a-y+b)$.
15. $(x-a+y+b)(x-a-y-b)$.
16. $(m+n-p-q)(m-n-p+q)$.
17. $(2x-3a+3y-b)(2x-3a-3y+b)$.
18. $(3a+5b)(3a-b)$.
19. $(x+3z)(x-4y-3z)$.
20. $(x+y-4a)(x-y-2a)$.
21. $(2x+3y-2z)(2x-3y)$.
22. $(4a+5b-2c)(4a-5b)$.
23. $(a^2+x^2+b^2+y^2)(a^2+x^2-b^2-y^2-2c^2-2z^2)$.
24. $(a^2+b^2-c^2+d^2+x+y-z+t)(a^2-b^2-c^2-d^2+x-y-z-t)$.
25. $(8a^2+4ax+x^2)(8a^2-4ax+x^2)$.
26. $(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)$.
27. $(2a^2+6ax+9x^2)(2a^2-6ax+9x^2)$.
28. $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$.
29. $(x^2+x+2)(x^2-x+2)$.
30. $(3x^2+2x+2)(3x^2-2x+2)$.
31. $(3x^2+4x+4)(3x^2-4x+4)$.
32. $(4x^2+3x+3)(4x^2-3x+3)$.
33. $(3m^2+2mn+5n^2)(3m^2-2mn+5n^2)$.
34. $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$.
35. $(x+4)(x+10)$.
36. $(a^2+4)(a^2+14)$.
37. $(x^2-ax-3)(x^2-ax-13)$.
38. $(a^2+16a+61)(a^2+16a+57)$.
39. $(x^2+7x+11)(x^2+7x+7)$.
40. $7(7x^2+7x+2)(49x^2+49x+8)$.
41. $(x^2+12ax+34a^2)(x^2+12ax+28a^2)$.
42. $3(9x^4+39x^2y+43y^2)(3x^4+13x^2y+11y^2)$.

প্রশ্নমালা 46 (পৃষ্ঠা 153-154)

1. $(x+1)(x+3)$. 2. $(x+2)(x+7)$. 3. $(x+3)(x+7)$.
4. $(a+3)(a+8)$. 5. $(m-2)(m-4)$.
6. $(n-4)(n-7)$ 7. $(x-3)(x-4)$. 8. $(x-4)(x-5)$.
9. $(x-4)(x+5)$. 10. $(a+5)(a-6)$. 11. $(x-2)(x+5)$.
12. $(m+5)(m-9)$. 13. $(x+3)(x-20)$. 14. $(y+2)(y-25)$.
15. $(x-4)(x+19)$. 16. $(a+5)(a-7)$. 17. $(x-9)(x+16)$.
18. $(m-7)(m-19)$. 19. $(x-6)(x+20)$. 20. $(x+7)(x-19)$.
21. $(a+8)(a-15)$. 22. $(b-12)(b-15)$.
23. $(m-12)(m-18)$. 24. $(x-21)(x+26)$.
25. $(x-24)(x+25)$. 26. $(x+24)(x-30)$.
27. $(y-25)(y-26)$. 28. $(a+30)(a-33)$.
29. $\left(x-a\right)\left(x-\frac{1}{a}\right)$ 30. $(x-a)(x-bc)$.
31. $(x+a)(x+b+c)$. 32. $(x+a+b)(x+c+d)$.
33. $(x+a+b)(x+a+2b)$ 34. $(x+2q+p)(x-2q-3p)$.
35. $(x-2a+b)(x+3a-b)$. 36. $(x+6y)(x+10y)$.
37. $(m-5n)(m-16n)$. 38. $(c+6d)(c-16d)$.
39. $(m+12n)(m-22n)$. 40. $(p-15q)(p+18q)$.
1. $(x+16y)(x-20y)$. 42. $(x+2)(x-2)(x^2+7)$.
43. $(a+3)(a-3)(a^2+7)$. 44. $(m+4)(m-4)(m^2+9)$.
45. $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$. 46. $(a+b)(a-b)(a+3b)(a-3b)$.
47. $(m+2n)(m-2n)(m+3n)(m-3n)$.
48. $(x^2+2x+2)(x^2+2x+3)$.
49. $(m^2+3m-1)(m^2+3m-3)$.
50. $(a+2)^2(a^2+4a-9)$. 51. $(x+a)^2(x^2+2xa+4a^2)$.
52. $(x+a+y+b)(x+a+3y+3b)$.
53. $(5x+9y)(7x+13y)$. 54. $-(5x+13a)(21x+26a)$.
55. $2(2a^2-b^2)(13b^2-11a^2)$.
56. $(x+a+5y+5b)(x+a-9y-9b)$.
57. $(x-1)(x-2)(x+5)(x-8)$.
58. $(x-2y)(x-3y)(x+4y)(x+5y)$.
59. $(x+1)(x+3)(x^2+4x+1)(x^2+4x-1)(x^2+4x-3)$.
60. $(a+1)(a+4)(a^2+5a-4)(a^4+10a^3+25a^2+1)$.

প্রশ্নমালা 47 (পৃষ্ঠা 157)

1. $(a+3)(2a+1)$. 2. $(a+2)(3a+2)$. 3. $(2x-1)(2x-5)$.
4. $(x-3)(5x-3)$. 5. $(2x-1)(3x-4)$. 6. $(x-2)(3x-7)$.
7. $(2x-1)(2x-9)$. 8. $(2m-1)(3m-8)$. 9. $(x+3)(3x-2)$.
10. $(x+2)(2x-3)$. 11. $(2x+3)(4x-1)$ 12. $(x+4)(4x-3)$.
13. $(2m+1)(3m-10)$. 14. $(x-2)(7x+5)$.
15. $(2x+1)(5x-8)$. 16. $(2x-7)(3x+5)$.
17. $(x+1)(-8x+9)$. 18. $-(a-6)(4a+1)$.
19. $(m+4)(-3m+2)$. 20. $(2a-3)(-2a+1)$.
21. $(2a-b)(3a+8b)$. 22. $(2x-3y)(3x+2y)$.
23. $(m+3n)(2m-3n)$. 24. $(a-4b)(3a+2b)$.
25. $(2m+n)(3m-2n)$. 26. $(4c+d)(3c-4d)$.
27. $(7m+2n)(5m-3n)$. 28. $(2x+y)(-5x+7y)$.
29. $-(8m+5n)(m-2n)$. 30. $-(2x+9y)(x-3y)$.
31. $(9a-11b)(11a-9b)$. 32. $(a+b+1)(2a+2b+1)$.
33. $(2x+y-1)(6x+3y-1)$. 34. $(x^2+2x-2)(3x^2+6x-1)$.
35. $(2a+2b-c-d)(2a+2b-3c-3d)$.
36. $-(7x+11y)(5x+12y)$.
37. $-(a^2+5ab+b^2)(7a^2-13ab+7b^2)$.
38. $(x+1)(ax+b)$, 39. $(x+q)(px-1)$.
40. $(x+1)\{(a+b)x+a-b\}$. 41. $(x+cd)(abx+1)$.
42. $(x-r)(pqx-s)$. 43. $\{(a+b)x+c-d\}\{(c+d)x+a-b\}$.

প্রশ্নমালা 48 (পৃষ্ঠা 158-159)

1. $(x+1)^2$. 2. $(a+2)^2$. 3. $(x+3)^2$.
4. $(a-5)^2$ 5. $(x-7)^2$. 6. $(2m+n)^2$.
7. $(6a-5b)^2$. 8. $(9x-2a)^2$. 9. $(5x+8y)^2$.
10. $(7a-10b)^2$. 11. $(x+11z)^2$. 12. $(x^2+y^2+z^2)^2$.
13. $(bc+ca+ab)^2$. 14. $(x+y+z)^2$. 15. $4(x-2y-z)^2$.

প্রশ্নমালা 49 (পৃষ্ঠা 160)

1. $(x+1)^3$. 2. $(x-1)^3$. 3. $(x+2)^3$.
4. $(2x+1)^3$. 5. $(2x-3y)^3$. 6. $8y^3$.
7. $(3a+4b)^3$. 8. $27y^3$. 9. $(7c-a-7b)^3$.

প্রশ্নমালা 50 (পৃষ্ঠা 162)

1. $(x+1)(x^2-x+1)$. 2. $(x+2)(x^2-2x+4)$.
3. $(2x+1)(4x^2-2x+1)$. 4. $(a+4b)(a^2-4ab+16b^2)$.
5. $(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$.
6. $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz+2yz)$.
7. $(x-1)(x^2+x+1)$. 8. $(a-2)(a^2+2a+4)$.
9. $(3-x)(9+3x+x^2)$. 10. $(x-5a)(x^2+5xa+25a^2)$.
11. $(10-7a^3)(100+70a^3+49a^6)$.
12. $(a+b)^2(a^4-2a^3b+6a^2b^2-2ab^3+b^4)$.
13. $(3y-2x)(13x^2-21xy+9y^2)$.
14. $(a-4b)(19a^2+28ab+16b^2)$.
15. $(a+7b)(37a^2+14ab+13b^2)$.
16. $(4x+23y)(196x^2-266xy+259y^2)$.
17. $(a+2)(a-2)(a^2+2a+4)(a^2-2a+4)$.
18. $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.
19. $(2x+1)(2x-1)(4x^2+2x+1)(4x^2-2x+1)$.
20. $(3a^2+1)(3a^2-1)(9a^4+3a^2+1)(9a^4-3a^2+1)$.
21. $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)\times(x^4-x^2y^2+y^4)$
22. $(x-y+z)(x^2+y^2+z^2+yz-zx-2xy)$.
23. $(a-2b)\ a^2-ab+b^2)$. 24. $(2a+3b)(4a^2+3b^2)$.
25. $(3x-y)(9x^2-15xy+7y^2)$.
26. $(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2cd-ac-ad-bc-bd)$.
27. $2x(x+2)(x^2-2x+4)$.
28. $2ab(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)$.
29. $15xyz(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.
30. $(x+y)(x^2+xy+y^2)$. 31. $(x+a)(x-a)^2$. 32. $mn(m-n)$.

প্রশ্নমালা 51 (পৃষ্ঠা 165)

1. a^2. 2. x^5. 3. a^3. 4. x^2.
5. x^2y^2. 6. x^2y^3. 7. m^2n^2. 8. a^2b^2c.

9. $m^2n^2p^4$. 10. $a^7b^5c^9$. 11. $2abc$. 12. $5xy^2z$.
13. $\frac{7}{10}m^2n^2a^4$. 14. $5a^2b^2c^3$. 15. $\frac{3}{14}m^2n^3x^2$.
16. $\frac{2}{75}a^2b^2c^3d$. 17. $7x^2y^2z^3$. 18. $3a^2b^2c^2d^2$.

প্রশ্নমালা 52 (পৃষ্ঠা 166-167)

1. $x+1$. 2. $a+2$. 3. $x-3$. 4. $x+y$.
5. $a+b$. 6. $2x+1$. 7. $2(a-2b)$. 8. $a+b$.
9. $x-y$. 10. $x+y$. 11. $x-1$. 12. $x-2$.
13. $x+4$. 14. $a-4$. 15. $2a+3$. 16. $ab(3a+2)$.
17. $x-y$. 18. $x-2$. 19. $a-1$. 20. $xy(x-y)$.
21. $2(a^2+b^2)$. 22. x^2+2a^2. 23. $x+3y$.
24. x^2-a^2. 25. x^2+xy+y^2.

প্রশ্নমালা 53 (পৃষ্ঠা 169)

1. x^7. 2. a^2b^2. 3. $4x^3y^3$ 4. $30x^5y^4z^3$.
5. $6a^5b^3c^3$. 6. $42m^5n^6p^8$. 7. $6a^3b^3$ 8. $10x^4y^3z^3$.
9. $20m^4n^3p^7$. 10. $12a^5b^5c^5d^5$. 11. $6x^3y^3z^3$.
12. $a^8b^5c^8x^7y^9z^7$.

প্রশ্নমালা 54 (পৃষ্ঠা 170-171)

1. $ab(a+b)$. 2. $ab(a^2-b^2)$. 3. $x(x+1)^2$.
4. $x(x+1)(x+2)$. 5. $a(a^2-9)$. 6. $a(4a^2-1)$.
7. $4(x^2-4y^2)$. 8. $20ab(a+b)^2(a-b)$.
9. $x(x-y)^2(x^2+xy+y^2)$. 10. $(a-1)(a-2)(a-3)$.
11. $(a-2)(a-3)(a+4)$. 12. $(a+4)(a-6)(2a+1)$.
13. $(x-4)(2x-1)(2x-3)$. 14. $(2x+3)(x-8)(5x-7)$.
15. $6x^2y^2(3x+2)(5x-4)(7x-5)$.
16. $(a+3)(a+4)(a^3-27)$. 17. $(a^2-b^2)(a^3+b^3)$.
18. $(a-1)(a-2)^2(a-3)$. 19. $(2a-b)(a+2b)(3a+b)$.
20. $24(x^6-y^6)$ 21. $120a^2b^4(a-2b)(2a+3b)(3a-4b)$.
22. $4(x^2-9y^2)(9x^2-4y^2)$. 23. $(x+a)(x-a)^3$.
24. $x(3x+1)^2(29x-7)(27x^3+1)$.
25. $(9x^2-1)(x^2-3)^2(9x^4-1)$.

বিবিধ প্রশ্নমালা (গ) (পৃষ্ঠা 172-177)

I

1. $(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^6-a^3b^3+b^6)$. 3. 0.
4. $x^3-(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x-abc$; $x^3-12x^2+48x-64$.
5. $x^2+5(a-1)x-b$. 6. $(x^2+7x+11)^2$. 7. $x-3$.
8. $a(a+b+c)(a+b-c)(a-b-c)$.

II

1. (i) 28 ; (ii) 49. 3. $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^2+xy+y^2)\times(x^2-xy+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$.
4. 0. 5. 0. 6. $2x^3-x^2+3x-4$.
7. $6x^5-13x^4+20x^3-28x^2+19x-23$. 8. 0.

III

1. 155. 2. $1+x^4+x^8$. 3. $x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4$.
4. $-9xy$. 5. $(a+b-c+d)(a-b-c-d)$.
7. $2(x+y)$. 8. $(x+2y)(x-3y)(x-5y)(x+7y)$.

IV

1. (i) $(a-2)(a^2+2a+4)(2a^3+3)$; (ii) $(x+y+z)(x-y+z)$.
4. $ae'+bd'+cc'+db'+ea'$. 5. $a_1x+b_1y+c_1z$.
8. গ. সা. গু. $=4(x-3)$; ল. সা. গু. $=24(x-2)(x-3)(x-4)(x+27)$.

V

2. (i) $(x+2y+2)(x-2y+2)$; (ii) $(x-9)(x+64)$
3. (i) 1 ; (ii) 1. 4. 2. 5. (i) 0 ; (ii) 0.
6. (i) $a^4+2a^3b+6a^2b^2+2ab^3+b^4$; (ii) $(x^2-xa+a^2)\times(x^4-x^2a^2+a^4)$. 7. $8x^3+27y^3-64z^3+72xyz$.
8. $(x^2-4xy-13y^2)^2$.

VI

1. (ii) $1-3x^6+3x^{12}-x^{18}$. 2. $a^3+b^3+c^3-3abc$
3. (i) $(a+b)(x+y)\{(a^2-ab+b^2)(x^2+y^2)-(a^2-4ab+b^2)xy\}$.
(ii) $-(14x+13y)(24x+5y)$. 4. $x+y+z+xyz$.
7. $(x^2-13xy+35y^2)^2-(4y^2)^2$.

VII

1. (i) $(9a-11b)(11a-9b)$; (ii) $\{x^2+(a+b)x+(a+1)(b+1)\}\times$ $\{x^2+(a+b)x+(a-1)(b-1)\}$. 2. -36 ; 38.
3. (i) $x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4$; (ii) $bx^3+(a-b)x^2-(a-b)x+a$
5. $(x-a)(x-b)(x+a+b)$. 6. $8p^3x^3$. 7. $-a-1$.

VIII

2. $(a+1)x^2+(a^2+1)x+a^3$. 3. (i) $2(2x^2-17xy-36y^2)\times$ $(x^2+2xy+3y^2)$; (ii) $(x^2+3xy-y^2)(x^2-3xy-y^2)$; (iii) $(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$. 6. (ii) $(3x+2y)^2+(2x+y)^2$.
7. (i) $2a+7$; (ii) $(x^2-a^2)(x^2-b^2)$.

প্রশ্নমালা 55 (পৃষ্ঠা 182)

1. $\frac{b}{a}$. 2. $\frac{2}{a}$. 3. $\frac{x}{2}$. 4. $\frac{a}{3}$. 5. $\frac{a}{2b}$.
6. $\frac{y}{2}$. 7. $\frac{1}{a}$. 8. $\frac{x}{2y}$. 9. $\frac{3b}{5a}$. 10. $-\frac{2mn}{3l}$.
11. $\frac{3ps}{q}$. 12. $-\frac{2a^2x^2}{3y}$ 13. $-\frac{4c^2}{5a^2x^2}$.
14. $\frac{a}{b}$. 15. $\frac{x}{y^2}$. 16. $-\frac{c}{ab}$.
17. $-\frac{x+2a}{2}$. 18. $\frac{a}{1+a}$. 19. $\frac{a}{1-a}$.
20. $-\frac{3x+2a}{3x}$. 21. $\frac{x+1}{x-2}$. 22. $\frac{x(y+x)}{x^2+xy+y^2}$.
23. $\frac{x+2}{x^2}$. 24. $\frac{x-5}{x-6}$. 25. $\frac{x-b}{x-c}$.
26. $\frac{x-y}{x-2y}$. 27. $\frac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}$. 28. $\frac{x}{x-y}$.
29. $\frac{x+y-z}{x-y-z}$. 30. $\frac{a+b-c-d}{a-b-c+d}$. 31. $-\frac{x}{x+1}$.
32. $\frac{1}{x}$. 33. $\frac{a-3}{3a-1}$ 34. $\frac{2a-1}{2a+1}$. 35. $\frac{2a+1}{a+5}$.

প্রশ্নমালা 56 (পৃষ্ঠা 185)

1. $\frac{6a}{12}, \frac{4b}{12}, \frac{3c}{12}$.

2. $\frac{8x}{12}, \frac{10y}{12}, \frac{9z}{12}$.

3. $\frac{40x}{60}, \frac{36y}{60}, \frac{35z}{60}$.

4. $\frac{3xy}{6y}, \frac{12}{6y}, \frac{2yz}{6y}$.

5. $\frac{bc}{abc}, \frac{ca}{abc}, \frac{ab}{abc}$.

6. $\frac{a^2}{abc}, \frac{b^2}{abc}, \frac{c^2}{abc}$.

7. $\frac{bc(b-c)}{abc}, \frac{ca(c-a)}{abc}, \frac{ab(a-b)}{abc}$.

8. $\frac{a(b+c)}{abc}, \frac{b(c+a)}{abc}, \frac{c(a+b)}{abc}$.

9. $\frac{a^2(b-c)}{a^2b^2c^2}, \frac{b^2(c-a)}{a^2b^2c^2}, \frac{c^2(a-b)}{a^2b^2c^2}$.

10. $\frac{2x(y-z)}{y^2-z^2}, \frac{3y(y+z)}{y^2-z^2}, \frac{4z}{y^2-z^2}$.

11. $\frac{3x^2(y+z)}{x(y^2-z^2)}, \frac{2xy(y-z)}{x(y^2-z^2)}, \frac{4z^2}{x(y^2-z^2)}$.

12. $\frac{3(x^2-xy+y^2)}{x^3+y^3}, \frac{2y(x+y)}{x^3+y^3}, \frac{x^2}{x^3+y^3}$.

13. $\frac{2(a^2+ab+b^2)}{a^3-b^3}, \frac{3x(a-b)}{a^3-b^3}, \frac{4a^2}{a^3-b^3}$.

14. $\frac{a^3-b^3}{a^6-b^6}, \frac{a^2-b^2}{a^6-b^6}, \frac{a^3+b^3}{a^6-b^6}$.

15. $\frac{2x(a-3)}{(a-1)(a-2)(a-3)}, \frac{3y(a-1)}{(a-1)(a-2)(a-3)}, \frac{4z(a-2)}{(a-1)(a-2)(a-3)}$

16. $\frac{-a^2(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}, \frac{-b^2(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}, \frac{-c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$.

17 $\frac{yz(y-z)}{(y-z)(z-x)(x-y)}, \frac{zx(z-x)}{(y-z)(z-x)(x-y)}, \frac{xy(x-y)^2}{(y-z)(z-x)(x-y)}$.

18. $\frac{(x+a)^2}{(x+a)(x+b)(x+c)}, \frac{(x+b)^2}{(x+a)(x+b)(x+c)}, \frac{(x+c)^2}{(x+a)(x+b)(x+c)}$.

19. $\frac{(y+z)^2}{(x+y)(y+z)(z+x)}, \frac{(z+x)^2}{(x+y)(y+z)(z+x)}, \frac{(x+y)^2}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

20. $\frac{2x+y}{(x-y)(x-4y)(2x+y)}$, $\frac{x-4y}{(x-y)(x-4y)(2x+y)}$,

$\frac{x-y}{(x-y)(x-4y)(2x+y)}$.

প্রশ্নমালা 57 (পৃষ্ঠা 189-190)

1. x. 2. a. 3. $\frac{5}{a}$. 4. $\frac{2}{x}$.

5. $\frac{2x}{9a}$. 6. 1. 7. 1. 8. $\frac{3x}{8}$.

9. $\frac{4a}{9}$. 10. $\frac{x}{10}$ 11. $\frac{7x}{18}$. 12. $\frac{9x}{4}$.

13. $\frac{9a}{7}$. 14. $\frac{15x}{16}$. 15. $\frac{7a}{18}$. 16. $\frac{19m}{30}$.

17. $\frac{12a+9b+8c}{30}$. 18. $\frac{8a-9b+10c}{12x}$. 19. $\frac{a+b}{ab}$

20. $\frac{2b-3a}{ab}$. 21. $\frac{a^2-b^2}{ab}$. 22. $\frac{b^2-a^2}{ab}$. 23. $\frac{bc+ca+ab}{abc}$.

24. $\frac{a+b+c}{abc}$. 25. 0. 26. 0. 27. $\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{abc}$.

28. $\frac{x^2-3xy+4y^2}{y^2}$ 29. $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$ 30. $\frac{3b+5c}{8b}$.

31. $\frac{3x}{x^2-x-2}$. 32. 1. 33. $\frac{1}{x+y}$ 34. $\frac{2x}{x^2-y^2}$.

35. $\frac{4xy}{x^2-y^2}$ 36. $\frac{1}{x(x^2+5x+6)}$ 37. $\frac{1}{(x-a)(x-b)}$.

38. $\frac{x^2+2xy-y^2}{xy(x^2-y^2)}$. 39. $\frac{3}{(x-2)(x-4)}$.

40. $\frac{4x+18}{(x+1)(x+2)(x+5)}$ 41. 0. 42. $\frac{2(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

43. $\frac{2(x+y)}{(x-y)}$. 44. $\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$. 45. $\frac{a^2+1}{a^2-1}$.

46. 0. 47. $\frac{3}{a+c}$. 48. -1. 49. 0. 50. $\frac{a}{x-a}$. 51. 0.

52. $\frac{4a^3}{a^4-b^4}$. 53. $\frac{1}{(a+1)^2}$. 54. $\frac{4a^2x^2}{a^4-x^4}$. 55. $\frac{8x^7}{x^8-y^8}$.

প্রশ্নমালা 58 (পৃষ্ঠা 193-194)

1. 1. 2. $\frac{b^2}{c^2}$. 3. $\frac{x}{a}$.
4. $\frac{b}{ac}$. 5. $\frac{3ab}{4xy}$. 6. 1.
7. $\frac{y^2}{b^2}$. 8. $\frac{9}{14}$. 9. $\frac{3y}{4x}$. 10. $\frac{a^4y^3(x+1)}{c^3x}$.
11. 1. 12. $\frac{(a+b)(x-y)}{(a-b)(x+y)}$. 13. $\frac{x-1}{a-1}$. 14. $\frac{y}{x}$.
15. 1. 16. $\frac{a^2+b^2}{a}$. 17. $\frac{a+4}{a+5}$. 18. 1.
19. 1. 20. 1. 21. $\frac{x+1}{x+5}$. 22. 1.
23. 1. 24. 1.

প্রশ্নমালা 59 (পৃষ্ঠা 196-197)

1. $\frac{c}{b}$. 2. $\frac{ad}{bc}$. 3. $\frac{b^2}{c^2}$. 4. $\frac{bx}{ay}$.
5. $\frac{5bx^2}{2a}$. 6. $\frac{4x}{3p}$. 7. $\frac{5d}{2ap}$. 8. $\frac{a-b}{x}$.
9. 1. 10. $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. 11. $\frac{a-1}{x-1}$. 12. $\frac{(a-b)(x+y)}{(a+b)(x-y)}$.
13. 1. 14. $\frac{x^2+y^2}{x}$. 15. $\frac{x+4}{x+5}$. 16. $\frac{y}{x}$.
17. 1. 18. $\frac{1}{x+y}$. 19. $\frac{a+b}{a-b}$. 20. $\frac{2a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}$.
21. $\frac{b(c+a)}{a(b+c)}$. 22. $\frac{x-2}{x-1}$. 23. 1.
24. 1. 25. $\frac{7}{5(15x-19)}$.

প্রশ্নমালা 60 (পৃষ্ঠা 201-203)

1. 5.	2. 2.	3. 2.	4. $\frac{1}{2}$.	5. 4.
6. 1.	7. 4.	8. 1.	9. 9.	10. 12.
11. $-1\frac{1}{2}$.	12. 5.	13. 18.	14. $\frac{4}{5}$.	15. $1\frac{1}{2}$.
16. $2\frac{2}{5}$.	17. 6.	18. 20.	19. 7.	20. 3.
21. $\frac{1}{2}$.	22. 6.	23. 8.	24. 3.	25. 8.

26. $\frac{6}{7}$. 27. $2\frac{275}{288}$. 28. $-\frac{6}{7}$. 29. 18. 30. 7.
31. 6. 32. $-2\frac{39}{73}$. 33. 11. 34. 5. 35. $13\frac{3}{5}$.
36. −19. 37. 5. 38. 7. 39. 13. 40. 60.
41. 56. 42. 1. 43. $2\frac{1}{2}$. 44. $10\frac{3}{8}$. 45. 6.
46. 2. 47. 1. 48. $-2\frac{5}{18}$. 49. $2\frac{1}{4}$. 50. 1.

প্রশ্নমালা 61 (পৃষ্ঠা 207-210)

1. 4. 2. 4. 3. 3. 4. 75 টাকা
5. 50 বৎসর 6. 15, 25. 7. A 35টা. ; B 25টা.
8. 7, 23. 9. X 35টা. ; Y 15টা. 10. 45, 25.
11. A 50টা. ; B 15 টাকা 12. 45, 35.
13. A 60 বৎসর ; B 50 বৎসর 14. 15 ফুট 15. 21 টাকা
16. 40 মাইল 17. 240টি 18. 2400 টাকা
19. 192 জন 20. 48 টাকা 21. 12 ফুট
22. 7500 টাকা 23. 750 টাকা 24. 3200 টাকা
25. 96. 26. 240. 27. 35200 টাকা
28. 16000 টাকা 29. A 30 বৎ ; , B 18 বৎসর
30. 15 বৎসর 31. A 300 টাকা ; B 200 টাকা
32. 64 বৎ. ; 8 বৎ. 33. 40 বৎ. ; 20 বৎ.
34. 25. 35. 15. 36. 11 ; 7.
37. 42 বৎ. ; 18 বৎ. 38. 51 ; 29. 39. A 50 টা.; B 40টা.
40. A 120 টাকা; B 80 টাকা 41. 40 ; 30. 42. 41 বৎ. ; 11 বৎ.
43. 1500 টাকা 44. 80 বালক, 40 বালিকা
45. A320 টাকা; B 20 টাকা 46. A 800 পা. ; B 40 পা.
47. 36 ফুট ; 3 ফুট 48. 160, 161, 162.
49. A 56 টা. ; B 68 টা. ; C 68 টা.
50. A 24 টা. ; B 32 টা. ; C 16 টা.।

প্রশ্নমালা 64 (পৃষ্ঠা 236-238)

20. 5. 21. 2·5. 22. 13. 23. 5. 24. 13.
25. 20. 26. (i) 4, −3 ; (ii) 5, 3 ; (iii) 0, 0 ; (iv) 2, 1.
27. ক্ষেত্রফল 24 ; (−2, 5). 28. ক্ষেত্রফল 42 ; (2·5, 1).
29. ক্ষেত্রফল 32 ; (2, 2). 30. (i) 18 ; (ii) 12 ; (iii) 5 ; (iv) 20·5.
31. 5 মাইল 32. 13 মাইল 33. 900 গজ
34. 34·6 ফুট (প্রায়) 35. 1·36 মাইল (প্রায়)।

বীজগণিত

দ্বিতীয় খণ্ড

বীজগণিত

দ্বিতীয় খণ্ড

প্রথম অধ্যায়

1. বীজগণিতের নিম্নলিখিত প্রয়োজনীয় সূত্র এবং উহাদের প্রয়োগের বিষয় পূর্ব্বে প্রথম খণ্ডে আলোচিত হইয়াছে :

(1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$ [অণু. 75]

(2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$ [অণু. 76]

(3) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$ [অণু. 77]

(4) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$ [অণু. 78 (ক)]

$(x-a)(x+b)=x^2+(b-a)x-ab.$

$(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab$

(5) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$ [অণু. 100]

$=a^3+b^3+3ab(a+b).$

(6) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ [অণু. 101]

$=a^3-b^3-3ab(a-b).$

(7) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2).$

$=(a+b)^3-3ab(a+b).$

[অণু. 78 (খ) এবং অণু. 100]

(8) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$=(a-b)^3+3ab(a-b).$ [অণু. 78 (গ) এবং অণু. 101]

(9) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ [অণু. 75, অনুসিদ্ধান্ত 1

$=(a-b)^2+2ab.$ এবং অণু. 76, অনুসিদ্ধান্ত 1]

(10) $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$ [অণু. 76, অনুসিদ্ধান্ত 2]

(11) $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab.$ [অণু. 76, অনুসিদ্ধান্ত 2]

(12) $2a^2+2b^2=(a+b)^2+(a-b)^2$ [অণু. 76, অনুসিদ্ধান্ত 3]

অথবা $a^2+b^2=\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{2}(a-b)^2.$

(13) $4ab=(a+b)^2-(a-b)^2$ [অণু. 76, অনুসিদ্ধান্ত 3]

অথবা $ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

অর্থাৎ দুইটি রাশির গুণফল

=(রাশিদ্বয়ের সমষ্টির অর্দ্ধ $)^2$ −(রাশিদ্বয়ের অন্তরের অর্দ্ধ $)^2$ ।

(14) $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$.

[উদাহরণ 1, অনু. 99]

(15) $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab$
$= a^2+b^2+c^2+2(bc+ca+ab)$.

[অনু, 98, উদা. 1]

(16) $(bc+ca+ab)^2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2abc(a+b+c)$.

[অনু. 98, উদা. 2]

এইগুলি ব্যতীত তোমরা বীজগণিতীয় রাশিমালার যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ, সহজ রাশিমালার উৎপাদক-নির্ণয়, উৎপাদক-সাহায্যে রাশিমালার গ. সা. গু. এবং ল. সা. গু.-নির্ণয়, সহজ ভগ্নাংশের যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ, নির্দ্দিষ্ট রাশি-সমাবেশের স্তম্ভলেখ-অঙ্কন ইত্যাদি বহু বিষয়ও পূর্ব্বে শিখিয়াছ। এস্থলে পুনরনুশীলনের জন্য এইসকল বিষয়-ঘটিত একটি বিবিধ প্রশ্নমালা প্রদত্ত হইল।

বিবিধ প্রশ্নমালা (ক)

I

1. $v=4+6t$. যদি $t=0, 1, 2, 3, 4, 5$, অথবা 6 হয়, তাহা হইলে vএর মানগুলি কত হইবে স্থির কর এবং উহাদিগকে tএর অনুরূপ মানের নিম্নে স্থাপন করিয়া নিম্ন-প্রদর্শিত ভাবে একটি তালিকা প্রস্তুত কর :

t	0	1	2	3	4	5	6
v							

2. যোগ কর :

$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z$, $(c-a)x+(a-b)y+(b-c)z$,
$(a-b)x+(b-c)y+(c-a)z$.

3. মান নির্ণয় কর :

$1{\cdot}73\times1{\cdot}73+2\times1{\cdot}73\times3{\cdot}27+3{\cdot}27\times3{\cdot}27$

4. কোন্ রাশিকে $4+3x+x^2$ দ্বারা গুণ করিলে গুণফল $12+17x+29x^2+17x^3+5x^4$ হইবে ?

5. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করিয়া গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

$a^2+3a+2,\ a^2-3a-10,\ 5a^2+13a+6$এর

6. সমাধান কর : $5x-2=12-2x$.

7. একব্যক্তির বয়সের দ্বিগুণের সহিত ঐ বয়সের অর্দ্ধেক এবং এক-চতুর্থাংশ যোগ করিয়া এক বৎসর বাড়াইলে এক শতাব্দী হয়, উহার বয়স কত ?

8. ছক-কাগজের উপর $A\ (2, 4)$, $B\ (5, 8)$, $C\ (2, 8)$ বিন্দুগুলি অঙ্কিত কর এবং কম্পাসের সাহায্যে চিত্র হইতে BC, CA, AB বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর ।

II

1. (*i*) একব্যক্তির বর্ত্তমান বয়স x বৎসর, y বৎসর পূর্ব্বে তাহার বয়স কত ছিল এবং বর্ত্তমান সময়ের z বৎসর পরে তাহার বয়স কত হইবে ?

(*ii*) কোন ঘরের দৈর্ঘ্য x ফুট এবং প্রস্থ y ফুট, ইহার মেঝের ক্ষেত্রফল কত ?

2. সরল কর :

$$\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{y^2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{x}\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{z^2}\right)$$
$$+\frac{1}{y}\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{z}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right).$$

3. প্রমাণ কর যে, $ax\div bx=a\div b$

এবং $a\div b\div c=a\div bc$.

4. সরল কর :

$$\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).$$

5. গুণের নিম্নলিখিত সূত্রটি জ্যামিতিক প্রণালীতে প্রমাণ কর :

$$(a+b)(x+y)=ax+ay+bx+by.$$

6. $2x^3-9ax^2+12a^2x-9a^3$কে $x-3a$ দ্বারা বিচ্ছিন্ন-সহগ-প্রণালীতে ভাগ কর ।

7. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিয়া ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

$a^2-a-2,\ a^2+4a+3,\ \ a^2+a-6$এর

8. ছক-কাগজের উপর $(1, 7)$, $(3, 11)$, $(-2, 1)$ এবং $(-3, -1)$ বিন্দুগুলি অঙ্কিত কর । মাপনীর সাহায্যে দেখাও যে, উহারা একই সরলরেখায় অবস্থিত এবং এই সরলরেখাটি অঙ্কিত কর ।

III

1. যোগ কর : $a(b-c)x+b(c-a)y+c(a-b)z$; $b(c-a)x+c(a-b)y+a(b-c)z$; $c(a-b)x+a(b-c)y+b(c-a)z$.

2. অভেদ কাহাকে বলে ? দৃষ্টান্ত দ্বারা বুঝাইয়া দাও।
প্রমাণ কর যে,

$$(x+a)^2+2(x+a)(y+b)+(y+b)^2$$
$$=(x+b)^2+2(x+b)(y+a)+(y+a)^2$$

3. সরল কর :

$$\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{z^2}\right)+\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{x^2}\right)+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}\right).$$

4. সমাধান কর :

$$(x+1)^2+3(x+2)^2=4(x+3)^2-33.$$

5. $x+\frac{1}{x}=a+\frac{1}{a}$ হইলে দেখাও যে, $x^3+\left(\frac{1}{x}\right)^3=a^3+\frac{1}{a^3}$.

6. একসঙ্গে সমুদয় বন্ধনী অপসারিত করিয়া সরল কর :

$$5x-[7y-\{8z-(5x-\overline{7y-8z})\}].$$

7. পাটীগণিত এবং বীজগণিতে গুণফল এবং মিশ্র-ভগ্নাংশ-লিখন-প্রণালীতে কোন পার্থক্য থাকিলে দৃষ্টান্ত দ্বারা বুঝাইয়া দাও।

$x=4$, $y=9$ হইলে

$$\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{49}}-\frac{xy}{49}+\frac{4y}{49}=\text{কত ?}$$

8. 56 টাকা A এবং Bএর মধ্যে এইরূপে ভাগ করিয়া দাও, যেন Aএর টাকার দ্বিগুণের সহিত 14 টাকা যোগ করিলে যোগফল Bএর টাকার 4 গুণ অপেক্ষা 6 টাকা বেশী হয়।

IV

1. মান নির্ণয় কর :

$$\frac{57{\cdot}61\times57{\cdot}61\times57{\cdot}61-56{\cdot}61\times56{\cdot}61\times56{\cdot}61}{57{\cdot}61\times57{\cdot}61+57{\cdot}61\times56{\cdot}61+56{\cdot}61\times56{\cdot}61}.$$

2. সরল কর :

$$(x-y+z)^3+(x+y-z)^3+6x\{x^2-(y-z)^2\}.$$

3. $2a^5-11a^4+30a^3-66a^2+72a-72$কে $2a^2-3a+6$ দ্বারা ভাগ কর।

4. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

(i) $a^2-b^2+x^2-y^2+2ax-2by$;
(ii) $2x^2+7xy-15y^2$.

5. সরল কর :

$$\frac{a^2-4a+3}{a^2-5a+4}\div\frac{a^2-5a+6}{a^2-3a+2}\times\frac{a^2-6a+8}{a^2-3a+2}.$$

6. $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$কে $(a+b+c)$ দ্বারা গুণ কর।

7. সমাধান কর :

$$7(x-1)+5(2x+3)+6=3(2x-5)+4(2-3x)+44.$$

8. 32কে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর, যেন এক অংশ অপর অংশের 4 গুণ অপেক্ষা 2 বেশী হয়।

V

1. সরল কর :

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)-\{bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)\}.$$

2. $x^3+y^3+z^3-3xyz$কে $x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$ দ্বারা ভাগ কর।

3. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ দ্বারা ল. সা. গু নির্ণয় কর :

$$a^2-(b-c)^2,\ b^2-(c-a)^2,\ c^2-(a-b)^2.$$

4. সমাধান কর : $\frac{1}{3}(x-4)+\frac{3}{7}(2x-7)=\frac{7}{9}(5x+1)+4(1-x)$.

5. $a^2=b+c$, $b^2=c+a$, $c^2=a+b$ হইলে দেখাও যে,

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=1.$$ [ক. প্র., 1949]

6. একটি খুঁটির $\frac{1}{4}$ কাদায়, $\frac{1}{3}$ জলে এবং 10 ফুট জলের উপর আছে। খুঁটিটির দৈর্ঘ্য কত?

7. $(a+b+c)$, $(b+c-a)$, $(c+a-b)$, $(a+b-c)$এর ক্রমিক গুণফল নির্ণয় কর।

8. $(-8,-6)$ এবং $(-4,\ 10)$ বিন্দুগামী সরলরেখা ও $(-2,6)$ এবং $(-10,-2)$ বিন্দুগামী সরলরেখা অঙ্কিত কর এবং উহাদের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

VI

1. সরল কর : $\frac{(a-b)^2-c^2}{a^2-(b+c)^2}+\frac{(b-c)^2-a^2}{b^2-(c+a)^2}+\frac{(c-a)^2-b^2}{c^2-(a+b)^2}$.

2. সরল কর :
$10{\cdot}26\times10{\cdot}26\times10{\cdot}26-9{\cdot}26\times9{\cdot}26\times9{\cdot}26-3\times10{\cdot}26\times9{\cdot}26$.

3. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করিয়া গ. সা. গু. নির্ণয় কর :
$2x^2+3xa+a^2$, $4x^2-a^2$, $6x^2+xa-a^2$ এর

4. $8x^3+y^3+z^3-6xyz$কে $4x^2+y^2+z^2-yz-2zx-2xy$ দ্বারা ভাগ কর।

5. $x+y+z=0$ হইলে প্রমাণ কর যে, $x^3+y^3+z^3=3xyz$.
ইহা হইতে প্রমাণ কর যে,
$(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3=3(y-z)(z-x)(x-y)$.

6. সমাধান কর : $\frac{x-1}{2}+\frac{x-2}{3}+\frac{x-3}{4}=1$ [ঢা. বো., 1948]

7. এক রাজা 32 বৎসর বয়সে রাজা হইয়া তাঁহার জীবিতকালের $\frac{5}{13}$ অংশ রাজত্ব করিয়াছিলেন। তিনি কত বৎসর বাঁচিয়াছিলেন ? [ক. প্র., 1951]

8. ছক-কাগজের উপর (0,7), (4, 15), (−3,1), (−8, −9) বিন্দুগুলি অঙ্কিত কর এবং মাপনী-সাহায্যে দেখাও যে, উহারা একই সরলরেখায় অবস্থিত ; এই সরলরেখাটি অঙ্কিত কর।

VII

1. যোগ কর :
$6a^2(7a+3)$, $3a(8a-2-5a^2)$, $9(2-2a-4a^2-3a^3)$ এবং $6(1-a)(a-3)$.

2. (i) $(a-x)$, $(a+x)$, (a^2+x^2), (a^4+x^4) এর ক্রমিক গুণফল নির্ণয় কর এবং (ii) দেখাও যে, $(a+x)(a^2+x^2)(a^4+x^4)=\frac{x^8-a^8}{x-a}$.

3. সরল কর : $a+b(1-a)+c(1-a)(1-b)+(1-a)(1-b)(1-c)$.

4. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :
$a^2-c^2+2ab-2bc$.
(: $2x^2-7xa+6a^2$.

5. কোন্ রাশিকে $x^2+2xy+3y^2$ দ্বারা ভাগ করিলে $2x^2-3xy+y^2$ ভাগফল হইবে ?

6. দেখাও যে, x^2+px+qকে $x-a$ দ্বারা ভাগ করিলে যে x-নিরপেক্ষ ভাগশেষ হইবে, তাহা ভাজ্যের xএর স্থলে a লিখিলেই পাওয়া যায়।

7. যদি $x+y+z=1$ হয়, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{x+yz}{(x+y)(x+z)}=\frac{y+zx}{(y+z)(y+x)}=\frac{z+xy}{(z+x)(z+y)}=1.$$

8. 20 বৎসর পূর্ব্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের চারিগুণ ছিল। বর্ত্তমান সময়ের 4 বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হইবে। উহাদের বর্ত্তমান বয়স কত ? [ক. প্র., 1951]

VIII

1. $x=b-c,\ \ y=c-a,\ \ z=a-b$ হইলে $x^2-y^2+z^2+2xz$এর মান নির্ণয় কর। [ক. প্র., 1922]

2. যোগ কর :

$(a-1)(a+2),\ (a-2)(a+3),\ (a-3)(a+1)$ এবং $3(2+a)(2-a)$.

3. সরল কর : $(m-2n)(m^2+2mn+4n^2)+(2n-3p)(4n^2+6np+9p^2)+(3p-m)(9p^2+3pm+m^2)$.

4. সমাধান কর : $(x+4)^2=(x+2)^2+16$.

5. $x^2+2xy-z^2-2yz$কে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর।

6. সরল কর :

$$\frac{1}{a^2-(b+c)a+bc}+\frac{1}{b^2-(c+a)b+ca}+\frac{1}{c^2-(a+b)c+ab}.$$

7. $gh+hf+fg=0$ হইলে দেখাও যে,

$$\frac{f^2}{f^2-gh}+\frac{g^2}{g^2-hf}+\frac{h^2}{h^2-fg}=1.$$

8. নিম্নলিখিত দেশগুলির প্রতিশত লোকে শিক্ষিতের সংখ্যা প্রদত্ত হইল। একটি স্তম্ভলেখ অঙ্কিত করিয়া শিক্ষিতের সংখ্যাগুলির তুলনা কর :

কানাডা 96, রাশিয়া 90, ইটালি 81, পোলণ্ড 79, জাপান 98, ভারত 17.

দ্বিতীয় অধ্যায়

দুরূহ সূত্রাবলী

(Harder Formulae)

প্রথম খণ্ডের ষষ্ঠ এবং দশম অধ্যায়ে কতিপয় সূত্র এবং উহাদের প্রয়োগ-বিষয় আলোচিত হইয়াছে। এস্থলে ঐগুলির অপেক্ষা অধিকতর জটিল সূত্রাবলী প্রদত্ত হইবে।

2. সূত্র : $(x+a)(x+b)(x+c)$
$$= x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc.$$

অর্থাৎ তিনটি দ্বিপদ রাশির প্রত্যেকটিতে প্রথম পদ একইরূপ হইলে দ্বিপদ রাশিগুলির গুণফল
= (প্রথম পদ)^3 + স্ব-স্ব চিহ্নযুক্ত দ্বিতীয় পদগুলির সমষ্টি × (প্রথম পদ)^2
+ স্ব-স্ব চিহ্নযুক্ত দ্বিতীয় পদগুলির দুই-দুইটির গুণফলের সমষ্টি × প্রথম পদ
+ স্ব-স্ব চিহ্নযুক্ত দ্বিতীয় পদগুলির গুণফল।

সূত্রটি গুণন দ্বারা প্রমাণ করা যায়। [প্রথম খণ্ডের 116 পৃষ্ঠার উদাহরণ 1 দেখ।]

উল্লিখিত সূত্র হইতে নিম্নলিখিত ফলগুলি সহজে পাওয়া যায় :

1. $(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc.$
2. $(x+a)(x-b)(x-c)=x^3+(a-b-c)x^2+(-ab+bc-ca)x+abc.$
3. $(x+a)(x+b)(x-c)=x^3+(a+b-c)x^2+(ab-bc-ca)x-abc.$

যথা, $(x-a)(x-b)(x-c)=\{x+(-a)\}\{x+(-b)\}\{x+(-c)\}$
$$=x^3+\{(-a)+(-b)+(-c)\}x^2+\{(-a)(-b)+(-b)(-c)+(-c)(-a)\}x+(-a)(-b)(-c)$$
$$=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc.$$

এইরূপে অন্যফলগুলিও প্রমাণ করা যায়।

উদাহরণ 1. $(x+2)$, $(x+3)$ এবং $(x+4)$এর গুণফল নির্ণয় কর।

এস্থলে $2+3+4=9$;

$2\times3+3\times4+4\times2=6+12+8=26$;

$2\times3\times4=24$

অতএব নির্ণেয় গুণফল $=x^3+9x^2+26x+24.$

উদাহরণ 2. $2a-5$, $2a-7$ এবং $2a-10$এর গুণফল নির্ণয় কর।

এস্থলে $(-5)+(-7)+(-10)=-22$;

$$(-5)(-7)+(-7)(-10)+(-10)(-5)=35+70+50=155.$$

$$(-5)(-7)(-10)=-350.$$

অতএব নির্ণেয় গুণফল $=(2a)^3+(-22)(2a)^2+155(2a)+(-350)$

$$=8a^3-88a^2+310a-350.$$

উদাহরণ 3. a^2+2, a^2-5 এবং a^2-8এর গুণফল লিখ।

$$2+(-5)+(-8)=-11 \; ;$$

$$(2)(-5)+(-5)(-8)+(-8)(2)=-10+40-16=14 \; ;$$

$$2(-5)(-8)=80 \; ;$$

অতএব নির্ণেয় গুণফল $=(a^2)^3+(-11)(a^2)^2+14a^2+80$

$$=a^6-11a^4+14a^2+80.$$

3. পূর্ব্ববর্ত্তী অণুচ্ছেদে প্রদত্ত প্রণালী অনুসরণ করিয়া সাধারণ পদবিশিষ্ট **তিনের** অধিকসংখ্যক দ্বিপদরাশির গুণফলও নির্ণয় করা যায় এবং এই **গুণফল-নির্ণয়ের সূত্র** নিম্নলিখিতরূপ হইবে :

n-সংখ্যক দ্বিপদরাশির প্রত্যেকটির প্রথম পদ একইরূপ হইলে দ্বিপদরাশিগুলির গুণফল

$=$(প্রথম পদ)^n + স্ব-স্ব চিহ্নযুক্ত দ্বিতীয় পদগুলির সমষ্টি $\times$ (প্রথম পদ)$^{n-1}$ + স্ব-স্ব চিহ্নযুক্ত দ্বিতীয় পদগুলির দুই-দুইটির গুণফলের সমষ্টি $\times$ (প্রথম পদ)$^{n-2}$ + স্ব-স্ব চিহ্নযুক্ত দ্বিতীয় পদগুলির তিন-তিনটির গুণফলের সমষ্টি $\times$ (প্রথম পদ)$^{n-3}$ + …… + স্ব-স্ব চিহ্নযুক্ত দ্বিতীয় পদগুলির গুণফল।

দ্রষ্টব্য। লক্ষ্য কর যে, n-সংখ্যক দ্বিপদরাশির গুণফলে $(n+1)$টি পদ থাকিবে।

উদাহরণ 1. $(a+2)$, $(a+3)$, $(a+5)$ এবং $(a+8)$এর গুণফল লিখ।

$$2+3+5+8=18 \; ;$$

$$2\times3+2\times5+2\times8+3\times5+3\times8+5\times8$$

$$=6+10+16+15+24+40=111 \; ;$$

$$2\times3\times5+2\times3\times8+2\times5\times8+3\times5\times8$$

$$=30+48+80+120=278 \; ;$$

এবং $2\times3\times5\times8=240.$

অতএব নির্ণেয় গুণফল $=a^4+18a^3+111a^2+278a+240.$

উদাহরণ 2. $2x-2$, $2x+3$, $2x-5$ এবং $2x+10$এর গুণফল নির্ণয় কর।

$(-2)+3+(-5)+10=6$;

$(-2)(3)+(-2)(-5)+(-2)(10)+(3)(-5)+3.10+(-5)(10)$

$=-6+10-20-15+30-50=-51$;

$(-2)(3)(-5)+(-2)(3)(10)+(-2)(-5)(10)+(3)(-5)(10)$

$=30-60+100-150=-80$;

$(-2)(3)(-5)(10)=300.$

অতএব নির্ণেয় গুণফল $=(2x)^4+6(2x)^3+(-51)(2x)^2+(-80)(2x)+300$

$=16x^4+48x^3-204x^2-160x+300.$

প্রশ্নমালা 1

নিম্নলিখিত গুণফলগুলি লিখ :

1. $(x+2)(x+3)(x+5)$
2. $(x+3)(x+5)(x+8)$
3. $(2x+5)(2x+3)(2x-7)$
4. $(3a-3)(3a-4)(3a+8)$
5. $(2x-3)(2x-4)(2x-7)$
6. $(3x^2-5)(3x^2-2)(3x^2+1)$
7. $(x+\frac{1}{2})(x+\frac{5}{6})(x+\frac{3}{4})$
8. $(a-\frac{3}{4})(a-\frac{1}{8})(a+\frac{5}{4})$
9. $(a^2+2p)(a^2+3q)(a^2+4r)$
10. $(2x+a)(2x+3c)(2x+5f)$
11. $(x+y)(x-3y)(x+2y)$
12. $(2a+b)(2a-5b)(2a-7b)$
13. $(x^2+a^2)(x^2+3a^2)(x^2-7a^2)$
14. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$
15. $(2x-1)(2x-5)(2x-6)(2x-4)$
16. $(x-1)(x+3)(x-4)(x+5)$
17. $(2a+b)(2a+3b)(2a+4b)(2a+6b)$
18. $(p+3q)(p-5q)(p+8q)(p-10q)$
19. $(x+a)^4$
20. $(x+a)^5$.

4. সূত্র : $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$
$=a^3+b^3+c^3-3abc.$

সূত্রটি গুণ দ্বারা পূর্ব্বে প্রমাণ করা হইয়াছে।

[প্রথম খণ্ডের 115 পৃষ্ঠার উদাহরণ 3 দেখ]

বিপরীতক্রমে $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab).$

অনুসিদ্ধান্ত 1. $\frac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$
$=a^3+b^3+c^3-3abc.$

প্রমাণ। যেহেতু $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$
$=\frac{1}{2}\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\},$
অতএব $a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$
$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}.$

অনুসিদ্ধান্ত 2. $a+b+c=0$ **হইলে** $a^3+b^3+c^3=3abc.$

প্রমাণ। $a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$
$=0\times(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)=0.$
পক্ষান্তর করিয়া $a^3+b^3+c^3=3abc.$

উদাহরণ 1. $(x+2y+3z)(x^2+4y^2+9z^2-6yz-3zx-2xy)$এর গুণফল লিখ।

নির্ণেয় গুণফল $=(x+2y+3z)\{x^2+(2y)^2+(3z)^2-(2y)(3z)-(3z)(x)-(x)(2y)\}$
$=(x)^3+(2y)^3+(3z)^3-3(x)(2y)(3z)$
$=x^3+8y^3+27z^3-18xyz.$

উদাহরণ 2. $(3x-4y-2z)(9x^2+16y^2+4z^2-8yz+6zx+12xy)$এর গুণফল লিখ।

নির্ণেয় গুণফল $=\{3x+(-4y)+(-2z)\}\{(3x)^2+(-4y)^2+(-2z)^2-(-4y)(-2z)-(-2z)(3x)-(3x)(-4y)\}$
$=(3x)^3+(-4y)^3+(-2z)^3-3(3x)(-4y)(-2z)$
$=27x^3-64y^3-8z^3-72xyz.$

উদাহরণ 3. $a=332,\ b=333,\ c=335$ হইলে $a^3+b^3+c^3-3abc$এর মান নির্ণয় কর।

$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$
$=\frac{1}{2}(332+333+335)\{(333-335)^2+(335-332)^2+(332-333)^2\}$
$=\frac{1}{2}\times1000\times\{(-2)^2+3^2+(-1)^2\}=\frac{1}{2}\times1000\times14=7000.$

উদাহরণ 4. $x=b+c-a,\ y=c+a-b,\ z=a+b-c$ হইলে a, b এবং c $x^3+y^3+z^3-3xyz$এর মান প্রকাশ কর। [পা. প্র. 1898]

$x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=\frac{1}{2}(x+y+z)\{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2\}$ $\cdots(1)$

এখন $x+y+z=(b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)=a+b+c.$

[সরল করিয়া]

$$y-z=(c+a-b)-(a+b-c)=2c-2b=-2(b-c)\ ;$$

$\therefore\quad (y-z)^2=\{-2(b-c)\}^2=4(b-c)^2.$

এইরূপে $(z-x)^2=4(c-a)^2$ এবং $(x-y)^2=4(a-b)^2$.

অতএব (1) হইতে $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{4(b-c)^2+4(c-a)^2+4(a-b)^2\}$

$=4.\frac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$

$=4(a^3+b^3+c^3-3abc).$ [অনুসিদ্ধান্ত 1]

উদাহরণ 5. $a=y-z,\ b=z-x,\ c=x-y$ হইলে $a^3+b^3+c^3-3abc$এর মান নির্ণয় কর। [ক. প্র., 1923]

$a+b+c=(y-z)+(z-x)+(x-y)=0\ ;$

$\therefore\quad a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$

$=0\times(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)=0.$

উদাহরণ 6. প্রমাণ কর যে, $(y+z-2x)^3+(z+x-2y)^3+(x+y-2z)^3$

$$=3(y+z-2x)(z+x-2y)(x+y-2z).$$

$y+z-2x$কে a, $z+x-2y$কে b এবং $x+y-2z$কে c ধরিলে

$a+b+c=(y+z-2x)+(z+x-2y)+(x+y-2z)=0,$

[সরল করিয়া]

$(y+z-2x)^3+(z+x-2y)^3+(x+y-2z)^3$

$\quad -3(y+z-2x)(z+x-2y)(x+y-2z)$

$=a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$

$=0\times(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)=0.$

পক্ষান্তর করিয়া $(y+z-2x)^3+(z+x-2y)^3+(x+y-2z)^3$

$\quad =3(y+z-2x)(z+x-2y)(x+y-2z).$

দ্রষ্টব্য। উদাহরণ 6এর প্রশ্নটিকে নিম্নলিখিতরূপেও প্রকাশ করা চলে :
$(y+z-2x)^3+(z+x-2y)^3+(x+y-2z)^3$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

প্রশ্নমালা 2

নিম্নলিখিত গুণফলগুলি লিখ :

1. $(2x+y+1)(4x^2+y^2+1-y-2x-2xy)$
2. $(x+2y+3)(x^2+4y^2+9-6y-3x-2xy)$
3. $(2x+y+3z)(4x^2+y^2+9z^2-3yz-6zx-2xy)$
4. $(a-b+c)(a^2+b^2+c^2+bc-ca+ab)$
5. $(a-2b+3c)(a^2+4b^2+9c^2+6bc-3ca+2ab)$
6. $(2p-3q-5r)(4p^2+9q^2+25r^2+6pq-15qr+10rp)$
7. $(x^2-x-1)(x^4+x^3+2x^2-x+1)$
8. $(a^2-2a-3)(a^4+2a^3+7a^2-6a+9)$

11 পৃষ্ঠার উদাহরণ 3এর প্রণালীতে মান নির্ণয় কর :

9. $x=264,\ y=267,\ z=269$ হইলে $x^3+y^3+z^3-3xyz$এর
10. $a=m+2,\ b=m+3,\ c=m+4$ হইলে $a^3+b^3+c^3-3abc$এর
11. $p=798,\ q=796,\ r=-794$ হইলে $p^3+q^3-r^3+3pqr$এর

11 পৃষ্ঠার উদাহরণ 4এর প্রণালীতে $x^3+y^3+z^3-3xyz$এর মান নির্ণয় কর :

12. $x=b+c,\ y=c+a,\ z=a+b$ হইলে
13. $x=b+c+2a,\ y=c+a+2b,\ z=a+b+2c$ হইলে
14. $x=b+c-(n-1)a,\ y=c+a-(n-1)b,\ z=a+b-(n-1)c$

হইলে দেখাও যে,

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=n^2(3-n)(a^3+b^3+c^3-3abc).$$

12 পৃষ্ঠার উদাহরণ 5এর প্রণালীতে মান নির্ণয় কর :

15. (i) $a=y+z-2x,\ b=z+x-2y,\ c=x+y-2z$ হইলে $a^3+b^3+c^3-3abc$এর

 (ii) $x=(b-c)(m-a),\ y=(c-a)(m-b),\ z=(a-b)(m-c)$ হইলে $x^3+y^3+z^3-3xyz$এর।

16. $3s=a+b+c$ হইলে

 $(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3-3(s-a)(s-b)(s-c)$এর

17. (i) $a=\cdot 427,\ b=\cdot 573$ হইলে $a^3+b^3-1+3ab$এর

 (ii) $a+4b=5$ হইলে $a^3+64b^3+60ab-125$এর

 (iii) $3x-5=2y$ হইলে $27x^3-8y^3-90xy-125$এর

 (iv) $x=23,\ y=31,\ z=11$ হইলে $125x^3-27y^3-8z^3-90xyz$এর

18. $x = \cdot 521$, $y = \cdot 359$ এবং $z = \cdot 035$ হইলে $8x^3 - 27y^3 + z^3 + 18xyz$এর

19. $x = 5078$, $y = 7534$, $z = 12612$ হইলে $x^3 + y^3 - z^3 + 3xyz$এর

12 পৃষ্ঠার উদাহরণ 6এর প্রণালীতে প্রমাণ কর যে,

20. $(y-z)^3 + (z-x)^3 + (x-y)^3 = 3(y-z)(z-x)(x-y)$

21. $x^3(y-z)^3 + y^3(z-x)^3 + z^3(x-y)^3$
$= 3xyz(y-z)(z-x)(x-y)$

22. $(3x-2y-z)^3 + (3y-2z-x)^3 + (3z-2x-y)^3$
$= 3(3x-2y-z)(3y-2z-x)(3z-2x-y)$

23. $(by-cz)^3 + (cz-ax)^3 + (ax-by)^3$
$= 3(by-cz)(cz-ax)(ax-by)$

24. $x^3(bz-cy)^3 + y^3(cx-az)^3 + z^3(ay-bx)^3$
$= 3xyz(bz-cy)(cx-az)(ay-bx)$

12 পৃষ্ঠার উদাহরণ 6এর 'দ্রষ্টব্য'-অনুসারে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর :

25. $(b+c-2a)^3 + (c+a-2b)^3 + (a+b-2c)^3$কে

26. $(4x-3y-z)^3 + (4y-3z-x)^3 + (4z-3x-y)^3$কে

27. $(y^2-z^2)^3 + (z^2-x^2)^3 + (x^2-y^2)^3$কে

28. $x^6(y^2-z^2)^3 + y^6(z^2-x^2)^3 + z^6(x^2-y^2)^3$কে।

5. প্রমাণ করা যায় যে,

$$\boldsymbol{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}$$
$$\boldsymbol{=bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)} \quad \cdots(i)$$
$$\boldsymbol{=-\{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\}.} \quad \cdots(ii)$$

প্রমাণ। (i) $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$
$= a^2b - a^2c + b^2c - b^2a + c^2a - c^2b$
$= (b^2c - c^2b) + (c^2a - a^2c) + (a^2b - b^2a)$,

[পদগুলিকে সজ্জবদ্ধ করিয়া]

$= bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b)$.

(ii) $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$
$= a^2b - a^2c + b^2c - b^2a + c^2a - c^2b$
$= -(b^2a - c^2a) - (c^2b - a^2b) - (a^2c - b^2c)$
$= -a(b^2-c^2) - b(c^2-a^2) - c(a^2-b^2)$
$= -\{a(b^2-c^2) + b(c^2-a^2) + c(a^2-b^2)\}$.

6. সূত্র : $-(b-c)(c-a)(a-b)$
$=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ ...I
$=bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$ ... II
$=-\{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\}$ ...III

প্রমাণ। যেহেতু $(c-a)=-(a-c)$; অতএব

$-(b-c)(c-a)(a-b)$
$=(b-c)\{(a-b)(a-c)\}$ [অনু. 88]
$=(b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\}$
$=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)$
$=a^2(b-c)-ab^2+ac^2+b^2c-bc^2$
$=a^2(b-c)+(b^2c-ab^2)+(ac^2-bc^2)$
$=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ ...I
$=bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$, [5 অনু. দ্বারা] ...II
$=-\{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\}$ ...III

দ্রষ্টব্য। নিম্নলিখিত উদাহরণগুলির সমাধানে

$$(b-c)+(c-a)+(a-b)=0$$

এবং $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0$

এই সূত্রগুলির প্রয়োজন হইবে। এইগুলি সহজে প্রমাণ করা যায়।

উদাহরণ 1. সরল কর :

$$(a^2-bc)(b-c)+(b^2-ca)(c-a)+(c^2-ab)(a-b).$$

প্রদত্ত রাশি $=a^2(b-c)-bc(b-c)+b^2(c-a)-ca(c-a)$
$+c^2(a-b)-ab(a-b)$
$=\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\}$
$-\{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)\}=0.$ [5 অনু.]

উদাহরণ 2. সরল কর : $(x^2+pxa+a^2)(b-c)+(x^2+pxb+b^2)(c-a)$
$+(x^2+pxc+c^2)(a-b)+(b-c)(c-a)(a-b).$

xএর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইলে প্রদত্ত রাশিমালা

$=x^2\{(b-c)+(c-a)+(a-b)\}+px\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}$
$+\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\}+(b-c)(c-a)(a-b)$
$=x^2.0+px.0-(b-c)(c-a)(a-b)+(b-c)(c-a)(a-b)$
$=0.$

উদাহরণ 3. দেখাও যে, $(y-z)^2(y+z-2x)+(z-x)^2(z+x-2y)$
$+(x-y)^2(x+y-2z)+(y+z-2x)(z+x-2y)(x+y-2z)=0.$

$(y-z)$কে a, $(z-x)$কে b এবং $(x-y)$কে c ধরিলে

$$b-c=(z-x)-(x-y)=z-x-x+y=y+z-2x;$$
$$c-a=(x-y)-(y-z)=x-y-y+z=z+x-2y;$$
$$a-b=(y-z)-(z-x)=y-z-z+x=x+y-2z.$$

$\therefore$ বামপক্ষ

$$=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)+(b-c)(c-a)(a-b)$$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)+(b-c)(c-a)(a-b)=0.$$

উদাহরণ 4. দেখাও যে, $(x+b)(x+c)(b-c)+(x+c)(x+a)(c-a)$
$+(x+a)(x+b)(a-b)$
$=(x+a)^2(b-c)+(x+b)^2(c-a)+(x+c)^2(a-b).$

পদগুলিকে সরল করিয়া xএর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইলে

বামপক্ষ $=\{x^2+x(b+c)+bc\}(b-c)+\{x^2+x(c+a)+ca\}(c-a)$
$+\{x^2+x(a+b)+ab\}(a-b)$
$=\{x^2(b-c)+x(b^2-c^2)+bc(b-c)\}+\{x^2(c-a)+x(c^2-a^2)$
$+ca(c-a)\}+\{x^2(a-b)+x(a^2-b^2)+ab(a-b)\}$
$=x^2\{(b-c)+(c-a)+(a-b)\}+x\{(b^2-c^2)+(c^2-a^2)+$
$(a^2-b^2)\}+\{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)\}$
$=x^2.0+x.0+\{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)\}$
$=bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b).$

এবং ডানপক্ষ $=(x^2+2xa+a^2)(b-c)+(x^2+2xb+b^2)(c-a)$
$+(x^2+2xc+c^2)(a-b)$
$=\{x^2(b-c)+2xa(b-c)+a^2(b-c)\}$
$+\{x^2(c-a)+2xb(c-a)+b^2(c-a)\}$
$+\{x^2(a-b)+2xc(a-b)+c^2(a-b)\}$
$=x^2\{(b-c)+(c-a)+(a-b)\}+2x\{a(b-c)+b(c-a)$
$+c(a-b)\}+\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\}$
$=x^2.0+2x.0+\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\}$
$=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b);$
$=bc(b-c)+ca(c-a)+ab\ a-b).$

অতএব বামপক্ষ = ডানপক্ষ।

প্রশ্নমালা 3

সরল কর :

1. $(y^2z^2-x^4)(y^2-z^2)+(z^2x^2-y^4)(z^2-x^2)$
$+(x^2y^2-z^4)(x^2-y^2)$

2. $(x^2+2xa+a^2-bc)(b-c)+(x^2+2xb+b^2-ca)(c-a)$
$+(x^2+2xc+c^2-ab)(a-b)$

3. (i) $\{(y+z)^2-(z+x)(x+y)\}(z-y)+\{(z+x)^2-(x+y)(y+z)\}\times$
$(x-z)+\{(x+y)^2-(y+z)(z+x)\}(y-x)$

[সঙ্কেত : $y+z$, $z+x$, $x+y$কে যথাক্রমে a, b, c ধর ; তাহা হইলে $b-c=z-y$ ইত্যাদি।]

(ii) $(y+z)(z-y)(2x+y+z)+(z+x)(x-z)(x+2y+z)$
$+(x+y)(y-x)(x+y+2z)$

4. $(b+c)^2(b-c)+(c+a)^2(c-a)+(a+b)^2(a-b)$
$+a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)c+(a^2-b^2)$

5. $(x+a)^2(b-c)+(x+b)^2(c-a)+(x+c)^2(a-b)$
$+(b-c)(c-a)(a-b)$

6. $(2a+b+c)^2(b-c)+(a+2b+c)^2(c-a)+(a+b+2c)^2(a-b)$.

[সঙ্কেত : $2a+b+c$, $a+2b+c$, $a+b+2c$কে যথাক্রমে x, y, z ধর ; তাহা হইলে $y-z=b-c$ ইত্যাদি।]

দেখাও যে,

7. $a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)$
$=-(b-c)(c-a)(a-b)(b+c)(c+a)(a+b)$

8. $(z+x)(x+y)(y-z)+(x+y)(y+z)(z-x)+(y+z)(z+x)(x-y)$
$=-(y-z)(z-x)(x-y)$.

9. $(y+z-x)^2(y-z)+(z+x-y)^2(z-x)+(x+y-z)^2(x-y)$
$=-4(y-z)(z-x)(x-y)$.

10. $(x+2y+z)(x+y+2z)(y-z)+(x+y+2z)(2x+y+z)(z-x)$
$+(2x+y+z)(x+2y+z)(x-y)=-(y-z)(z-x)(x-y)$.

11. $(ma+b+c)^2(b-c)+(a+mb+c)^2(c-a)+(a+b+mc)^2(a-b)$
$=(a+mb+c)(a+b+mc)(b-c)+(a+b+mc)(ma+b+c)(c-a)$
$+(ma+b+c)(a+mb+c)(a-b)=-(m-1)^2(b-c)(c-a)(a-b)$.

12. $(y^2-z^2)(2x+y+z)+(z^2-x^2)(x+2y+z)+(x^2-y^2)\times$
$(x+y+2z)=(y-z)(z-x)(x-y)$.

13. $(b^2-c^2)(ma+b+c)+(c^2-a^2)(a+mb+c)+(a^2-b^2)\times$
$(a+b+mc)=(m-1)(b-c)(c-a)(a-b)$.

14. $(px-a)^2(b-c)+(px-b)^2(c-a)+(px-c)^2(a-b)$
$=(qx-b)(qx-c)(b-c)+(qx-c)(qx-a)(c-a)+(qx-a)(qx-b)(a-b)$.

7. প্রমাণ করা যায় যে,

$$\boldsymbol{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)}$$
$$\boldsymbol{=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)} \quad \cdots \text{(i)}$$
অথবা
$$\boldsymbol{=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)}. \quad \cdots \text{(ii)}$$

প্রমাণ। (i) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$
$=a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b$
$=(b^2c+c^2b)+(c^2a+a^2c)+(a^2b+b^2a)$
$=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)$.

(ii) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$
$=a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b$
$=(b^2a+c^2a)+(c^2b+a^2b)+(a^2c+b^2c)$
$=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)$.

8. সূত্র : $\boldsymbol{(b+c)(c+a)(a+b)}$
$$\boldsymbol{=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc} \quad \cdots \text{(i)}$$
বা $$\boldsymbol{=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc} \quad \cdots \text{(ii)}$$
বা $$\boldsymbol{=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc} \quad \cdots \text{(iii)}$$

প্রমাণ। $(b+c)(c+a)(a+b)$
$=(b+c)\{(a+b)(a+c)\}$
$=(b+c)\{a^2+a(b+c)+bc\}$
$=a^2(b+c)+a(b+c)^2+bc(b+c)$
$=a^2(b+c)+a(b^2+2bc+c^2)+b^2c+bc^2$
$=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$, $\quad \cdots$ (i)

[পদগুলিকে সাজাইয়া]

(7 অনু. দ্বারা) $= bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc$ ··· (ii)

$= a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc.$ ··· (iii)

9. সূত্র : $\boldsymbol{(a+b+c)(bc+ca+ab)}$

$\boldsymbol{=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc}$ ··· (i)

বা $\boldsymbol{=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+3abc}$ ··· (ii)

বা $\boldsymbol{=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+3abc}$ ··· (iii)

প্রমাণ। $(a+b+c)(bc+ca+ab)$

$= (a+\overline{b+c})bc+(b+\overline{c+a})ca+(\overline{a+b}+c)ab$

$= \{abc+bc(b+c)\}+\{abc+ca(c+a)\}+\{ab(a+b)+abc\}$

$= bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+3abc$; (ii)

$= a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$, [অনুচ্ছেদ 7] (i)

$= a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+3abc.$ ··· (iii)

অনুসিদ্ধান্ত। $\boldsymbol{(a+b+c)(bc+ca+ab)-(b+c)(c+a)(a+b)}$

$\boldsymbol{=abc.}$

উদাহরণ 1. $3y+4z$, $4z+2x$ এবং $2x+3y$এর গুণফল লিখ।

$2x$কে a, $3y$কে b, $4z$কে c ধরিলে নির্ণেয় গুণফল

$= (3y+4z)(4z+2x)(2x+3y)$

$= (b+c)(c+a)(a+b) = a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$

$= (2x)^2(3y+4z)+(3y)^2(4z+2x)+(4z)^2(2x+3y)+2.2x.3y.4z$

$= 12x^2y+16x^2z+36y^2z+18xy^2+32xz^2+48yz^2+48xyz.$

উদাহরণ 2. $(x+3y+5z)(15yz+5zx+3xy)$এর গুণফল লিখ।

xকে a, $3y$কে b, $5z$কে c ধরিলে $bc=15yz$, $ca=5zx$, $ab=3xy$.

অতএব $(x+3y+5z)(15yz+5zx+3xy)$

$= (a+b+c)(bc+ca+ab)$

$= a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$

$= x^2(3y+5z)+(3y)^2(5z+x)+(5z)^2(x+3y)+3.x.3y.5z.$

$= 3x^2y+5x^2z+45y^2z+9xy^2+25xz^2+75yz^2+45xyz.$

উদাহরণ 3. দেখাও যে, $(y+z)^2(2x+y+z)+(z+x)^2(x+2y+z)$
$$+(x+y)^2(x+y+2z)+2(y+z)(z+x)(x+y)$$
$$=(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z).$$

$y+z$কে a, $z+x$কে b, $x+y$কে c ধরিলে

$b+c=2x+y+z$; $c+a=x+2y+z$; $a+b=x+y+2z$.

অতএব বামপক্ষ $=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc.$
$$=(b+c)(c+a)(a+b)$$
$$=(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z).$$

প্রশ্নমালা 4

নিম্নলিখিত গুণফলগুলি লিখ :

1. $(y+2z)(2z+3x)(3x+y)$ 2. $(3y+z)(z+2x)(2x+3y)$
3. $(x+3y)(3y-5z)(-5z+x)$ 4. $(x+2y+3z)(6yz+3zx+2xy)$
5. $(x^2+2xy+3y^2)(6xy^3+3x^2y^2+2x^3y)$
6. $(2a+3b-4c)(12bc+8ca-6ab)$
7. $(4a-3b-c)(3bc-4ca-12ab)$

সরল কর :

8. $(a^2-bc)(b+c)+(b^2-ca)(c+a)+(c^2-ab)(a+b)$
9. $\{(y+z)^2-(z+x)(x+y)\}(2x+y+z)+\{(z+x)^2-(x+y)(y+z)\}$
$\times(x+2y+z)+\{(x+y)^2-(y+z)(z+x)\}(x+y+2z)$
10. $(x+2y+3z)(6yz+3zx+2xy)-(2y+3z)(3z+x)(x+2y)$
11. $2(a+b+c)\{(c+a)(a+b)+(a+b)(b+c)+(b+c)(c+a)\}$
$-(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)-(b+c)(c+a)(a+b).$

দেখাও যে,

12. $(a+2b+3c)(6bc+3ca+2ab)-6abc=(2b+3c)(3c+a)(a+2b)$
13. $(3y+5z)(5z+2x)(2x+3y)+30xyz$
$$=(2x+3y+5z)(15yz+10zx+6xy)$$
14. $(z+x)(x+y)(2x+y+z)+(x+y)(y+z)(x+2y+z)$
$$+(y+z)(z+x)(x+y+2z)+2(y+z)(z+x)(x+y)$$
$$=(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)$$

15. $x(y+z-x)^2+y(z+x-y)^2+z(x+y-z)^2$
$+(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)=4xyz.$

10. সূত্র : $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b).$

প্রমাণ। $(a+b+c)^3$

$=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3a^2c+3ac^2+3b^2c+3bc^2+6abc.$

[প্রথম খণ্ডের 134 পৃষ্ঠার উদাহরণ 2 দ্রষ্টব্য]

$=a^3+b^3+c^3+3\{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc\}$

$=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b).$

অনুসিদ্ধান্ত। $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$
$=3(b+c)(c+a)(a+b).$

এই সূত্রের সাহায্যে '$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$-'আকারে প্রকাশিত রাশিকে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যায়।

উদাহরণ 1. $(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3$কে সরল কর।

$b+c-a$কে x, $c+a-b$কে y, $a+b-c$কে z ধরিলে

$x+y+z=(b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)=a+b+c$;

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$

$=3(y+z)(z+x)(x+y)=3.2a.2b.2c.=24abc.$

[যেহেতু $y+z=(c+a-b)+(a+b-c)=2a$ ইত্যাদি।]

উদাহরণ 2. দেখাও যে,

$64(a+b+c)^3-(2a+b+c)^3-(a+2b+c)^3-(a+b+2c)^3$
$=3(2a+3b+3c)(3a+2b+3c)(3a+3b+2c).$

$2a+b+c$কে x, $a+2b+c$কে y, $a+b+2c$কে z ধরিলে

$x+y+z=4(a+b+c)$;

$y+z=2a+3b+3c$; $z+x=3a+2b+3c$; $x+y=3a+3b+2c.$

বামপক্ষ $=\{4(a+b+c)\}^3-(2a+b+c)^3-(a+2b+c)^3-(a+b+2c)^3$

$=(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$

$=3(y+z)(z+x)(x+y)$

$=3(2a+3b+3c)(3a+2b+3c)(3a+3b+2c).$

দ্রষ্টব্য। উদাহরণ 2এর বামপক্ষকে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করিলে ডানপক্ষটি পাওয়া যাইবে।

প্রশ্নমালা 5

সরল কর :

1. $(y-z)^3+(z+x)^3+(x-y)^3+3(2x-y+z)(x-z)(x+y)$

2. $(a+2b+2c)^3+(a-b-c)^3+(2a-b-c)^3$
$$+3(3a-2b-2c)(3a+b+c)(2a+b+c)$$

দেখাও যে,

3. $8(a+b+c)^3-(b+c)^3-(c+a)^3-(a+b)^3$
$$=3(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)$$

4. $(x+y+z)^3-(3x-y-z)^3-(3y-z-x)^3-(3z-x-y)^3$
$$=24(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$$

5. $2s=a+b+c$ হইলে দেখাও যে,
$$s^3-(s-a)^3-(s-b)^3-(s-c)^3=3abc.$$

[সঙ্কেত : $s-a$কে x, $s-b$কে y, $s-c$কে z ধর ; তাহা হইলে
$x+y+z=3s-(a+b+c)=3s-2s=s$.]

6. $s=x+y+z$ হইলে দেখাও যে,
$$8s^3-(s-x)^3-(s-y)^3-(s-z)^3=3(s+x)(s+y)(s+z)$$

7. $2s=x+y+z$ হইলে দেখাও যে,
$$s^3+(s-2x)^3+(s-2y)^3+(s-2z)^3=24(s-x)(s-y)(s-z)$$

গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর :

8. $(a+b+c)^3-(2a-b)^3-(2b-c)^3-(2c-a)^3$

9. $8(a+b+c)^3-(2b+c-a)^3-(2c+a-b)^3-(2a+b-c)^3$

10. $27(a+b+c)^3-(2a+b)^3-(2b+c)^3-(2c+a)^3$.

11. সূত্র : $(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$
$=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$.

প্রমাণ। $(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

$$=\{(b+c)+a\}\{(b+c)-a\}\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}$$
$$=\{(b+c)^2-a^2\}\{a^2-(b-c)^2\}$$
$$=(b^2+c^2+2bc-a^2)(a^2-b^2-c^2+2bc)$$
$$=\{2bc+(b^2+c^2-a^2)\}\{2bc-(b^2+c^2-a^2)\}$$
$$=(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2$$
$$=4b^2c^2-(b^4+c^4+a^4+2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2)$$
$$=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4.$$

প্রশ্নমালা 6

গুণফল লিখ :

1. $(2x+3y+z)(3y+z-2x)(z+2x-3y)(2x+3y-z)$
2. $(2x+3y+5z)(3y+5z-2x)(5z+2x-3y)(2x+3y-5z)$
3. $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)$
4. $(a^2+ab+b^2)(ab+b^2-a^2)(b^2+a^2-ab)(a^2+ab-b^2)$
5. $(ap+bq+cr)(bq+cr-ap)(cr+ap-bq)(ap+bq-cr)$.

12. দ্বিপদরাশির ঘাত-নির্ণয়। ক্রমিক গুণন দ্বারা দ্বিপদরাশির কোন ঘাতের যে বিস্তৃত আকার পাওয়া যায়, তাহা গুণনক্রিয়া ব্যতীতও সহজে লেখা যায়।

নিম্নে ইহার নিয়ম বিবৃত হইল।

গুণন দ্বারা দেখান যায় যে,

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$.

$(a+b)$এর বিভিন্ন ঘাতের এই বিস্তৃত আকারগুলি পরীক্ষা করিলে উহাদের গঠন-বিষয়ক নিম্নলিখিত নিয়মগুলি সহজে লক্ষ্য করা যায় :

(1) বিস্তৃত আকারের পদসংখ্যা। যেহেতু $(a+b)^2$এর বিস্তৃত আকারে পদের মোট সংখ্যা $=3$, অর্থাৎ $(2+1)$; $(a+b)^3$এর বিস্তৃত আকারে পদ-সংখ্যা $=4$

অর্থাৎ $(3+1)$ ইত্যাদি, অতএব দ্বিপদরাশির কোন ঘাতের বিস্তৃত আকারের পদ-সংখ্যা ঘাতের সূচক-সংখ্যা হইতে 1 বেশী।

(2) প্রথম এবং শেষ পদ। $(a+b)^2$এর প্রথম পদ a^2 এবং শেষপদ b^2 ; $(a+b)^3$এর প্রথম পদ a^3 এবং শেষপদ b^3 ইত্যাদি। অতএব $(a+b)$এর কোন ঘাতে a এবং bএর উক্ত ঘাতই যথাক্রমে বিস্তৃত আকারের প্রথম এবং শেষ পদ।

(3) পদগুলির সূচক নিয়ম। কোন পদে aএর সূচক পূর্ব্ববর্ত্তী পদের aএর সূচক অপেক্ষা 1 (এক) কম এবং bএর সূচক পূর্ব্ববর্ত্তী পদের bএর সূচক অপেক্ষা 1 (এক) বেশী।

(4) পদগুলির সংখ্যা-সূচক সহগ। প্রথম পদের সংখ্যা-সূচক সহগ = **1.**
দ্বিতীয় পদের সংখ্যা-সূচক সহগ = প্রথম পদে aএর সূচক।
তৃতীয় পদের সংখ্যা-সূচক সহগ

$$=\frac{\text{দ্বিতীয় পদের সংখ্যা-সূচক সহগ} \times \text{দ্বিতীয় পদে } a\text{এর সূচক}}{2}$$

এইরূপ চতুর্থ পদের সংখ্যা-সূচক সহগ

$$=\frac{\text{তৃতীয় পদের সংখ্যা-সূচক সহগ} \times \text{তৃতীয় পদের } a\text{এর সূচক}}{3}$$

ইত্যাদি।

অতএব কোন পদের সংখ্যা-সূচক সহগকে ঐ পদের aএর সূচক-সংখ্যা দ্বারা গুণ করিয়া প্রাপ্ত গুণফলকে উক্ত পদের সংখ্যা দ্বারা ভাগ করিলে পরবর্ত্তী পদের সংখ্যা-সূচক সহগ পাওয়া যায়।

(5) দ্বিপদরাশির ঘাতের বিস্তৃত আকারে প্রথম এবং শেষপদ হইতে সমদূরবর্ত্তী পদ-দুইটির সংখ্যা-সূচক সহগ সমান।

যথা, $(a+b)^5$এ প্রথম দিক্ হইতে তৃতীয় পদের সাংখ্য সহগ $=10$ এবং শেষ দিক্ হইতে তৃতীয় পদের সাংখ্য সহগও 10.

প্রমাণ করা যায় যে, উল্লিখিত নিয়মগুলি $(a+b)$এর যে-কোন ঘাতের পক্ষে সত্য। কিন্তু ইহার প্রমাণ উচ্চতর বীজগণিতের আলোচ্য বিষয় বলিয়া উহা এস্থলে প্রদত্ত হইল না।

নিম্নের উদাহরণগুলি হইতে নিয়মগুলির প্রয়োগ-প্রণালী সুস্পষ্ট হইবে।

উদাহরণ 1. $(a+b)^8$কে বিস্তৃত আকারে লিখ।

বিস্তৃত আকারে মোট পদ-সংখ্যা $=8+1$ বা 9. [নিয়ম (1) দ্বারা]
প্রথম পদ $=a^8$ এবং শেষ বা নবম পদ $=b^8$. [নিয়ম (2) দ্বারা]

দ্বিতীয় পদ $=8a^7b$.

তৃতীয় পদ $=\frac{8\times7}{2}a^6b^2 = 28a^6b^2$;

চতুর্থ পদ $=\frac{28\times6}{3}a^5b^3 = 56a^5b^3$; [নিয়ম (3) এবং (4) দ্বারা]

পঞ্চম পদ $=\frac{56\times5}{4}a^4b^4 = 70a^4b^4$;

অবশিষ্ট পদগুলিকে নিয়ম (5) এবং (3) দ্বারা সহজে লিখা যায়। প্রথম পদ হইতে ষষ্ঠ, সপ্তম এবং অষ্টম পদ হইবে যথাক্রমে শেষ পদ হইতে চতুর্থ, তৃতীয় এবং দ্বিতীয় পদ। কিন্তু যেহেতু প্রথম এবং শেষপদ হইতে সমদূরবর্ত্তী পদের সাংখ্য সহগ সমান ; অতএব ষষ্ঠ, সপ্তম এবং অষ্টম পদের সাংখ্য সহগ হইবে যথাক্রমে চতুর্থ, তৃতীয় এবং দ্বিতীয় পদের সাংখ্য সহগের সমান, অর্থাৎ যথাক্রমে 56, 28 এবং 8 ; কাজেই উক্ত পদগুলি যথাক্রমে হইবে $56a^3b^5, 28a^2b^6, 8ab^7$.

$$\therefore \quad (a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8.$$

উদাহরণ 2. $(3m-2n)^8$কে বিস্তৃত আকারে লিখ।

$3m$কে a এবং $-2n$কে b ধরিলে

$$(3m-2n)^8 = (a+b)^8$$

$$= a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8,$$ [উদা. 1 দ্বারা]

$$= (3m)^8 + 8.(3m)^7(-2n) + 28(3m)^6(-2n)^2 + 56(3m)^5(-2n)^3 + 70(3m)^4(-2n)^4 + 56(3m)^3(-2n)^5 + 28(3m)^2(-2n)^6 + 8(3m)(-2n)^7 + (-2n)^8$$

(সরল করিলে) $= 6561m^8 - 34992m^7n + 81648m^6n^2 - 108864m^5n^3 + 90720m^4n^4 - 48384m^3n^5 + 16128m^2n^6 - 3072mn^7 + 256n^8$.

উদাহরণ 3. দেখাও যে, $(x+y)^7$এর বিস্তৃত আকারের পদগুলির সাংখ্য-সহগ-সমূহের সমষ্টি $=128$.

1এর যে-কোন ঘাত $=1$; অতএব $(x+y)^7$এর বিস্তৃত আকারে $x=1$, $y=1$ বসাইলে প্রত্যেক পদ উহার সহগের সমান হইবে ; কিন্তু তখন উহা $= (x+y)^7 = (1+1)^7 = 2^7 = 128$; অতএব নির্ণেয় সমষ্টি $=128$.

উদাহরণ 4. $x=\sqrt[5]{7}-1$ হইলে $x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+4$এর মান নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=(x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1)+3$

$=(x+1)^5+3=(\sqrt[5]{7}-1+1)^5+3$

$=(\sqrt[5]{7})^5+3=7+3=10.$

প্রশ্নমালা 7

নিম্নলিখিত ঘাতগুলিকে বিস্তৃত আকারে লিখঃ

1. $(a+b)^6$ 2. $(x+y)^7$ 3. $(a+b)^9$ 4. $(x-y)^6$
5. $(m-n)^7$ 6. $(a-b)^8$ 7. $(2x+y)^5$ 8. $(3x+2y)^6$
9. $(x-2y)^7$ 10. $(2x-1)^7$ 11. $(a-3)^8$.

নিম্নলিখিত ঘাতগুলির বিস্তৃত আকারে পদসমূহের সাংখ্য সহগগুলির বীজগণিতীয় সমষ্টি নির্ণয় কর :

12. $(x+y)^6$ 13. $(x+y)^8$ 14. $(x-y)^7$
15. $(3x-2y)^6$ 16. $(2x-3)^7$.

নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :

17. $x=\sqrt[4]{9}-1$ হইলে $x^4+4x^3+6x^2+4x+1$এর
18. $x=\sqrt[3]{5}+1$ হইলে $x^6-6x^5+15x^4-20x^3+15x^2-6x+1$এর।
19. $m=\sqrt[5]{8}-1$ হইলে $m^5+5m^4+10m^3+10m^2+5m+7$এর।
20. $a=\sqrt[3]{19}+5,\ b=\sqrt[3]{19}+4$ হইলে

$a^7-7a^6b+21a^5b^2-35a^4b^3+35a^3b^4-21a^2b^5+7ab^6-b^7$এর।

দ্রষ্টব্য। শিক্ষার্থিগণের ব্যবহারের সুবিধার জন্য যাবতীয় সূত্রাবলীর তালিকা পুস্তকের পরিশিষ্টে সন্নিবেশিত হইয়াছে। বীজগণিতে পটুতা অর্জ্জন করিতে হইলে সূত্রগুলি উত্তমরূপে মুখস্থ রাখা দরকার।

তৃতীয় অধ্যায়

দুরূহ গুণনীয়ক ও অভেদাবলী

(Harder Factors and Identities)

গুণনীয়ক

13. প্রথম খণ্ডের দ্বাদশ অধ্যায়ে a^2-b^2, a^3+b^3, a^3-b^3, ax^2+bx+c প্রভৃতি আকারের সহজ-সহজ রাশিমালাকে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করিবার প্রণালী বিবৃত হইয়াছে। বর্ত্তমান অধ্যায়ে দুরূহ রাশিমালার গুণনীয়ক নির্ণয় করিবার বিভিন্ন প্রণালী এবং দুরূহ অভেদের বিষয় আলোচিত হইবে।

14. '$a^3+b^3+c^3-3abc$'-আকারের রাশিমালাকে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ।

যেহেতু $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$, [প্রথম খণ্ড, 100 অনু.]

$$\therefore\ a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$$
$$=\{(a+b)^3+c^3\}-3ab(a+b)-3abc$$
$$=\{(a+b)+c\}\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3ab(a+b+c)$$
$$=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab)$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$$
$$=\tfrac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}.$$

অনুসিদ্ধান্ত। যদি $a^3+b^3+c^3=3abc$ হয়, তবে

(i) $a+b+c=0$;

অথবা (ii) $a=b=c$.

প্রমাণ। $a^3+b^3+c^3=3abc$; $\therefore\ a^3+b^3+c^3-3abc=0$;

অর্থাৎ $\frac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}=0$;

$\therefore$ হয় (i) $a+b+c=0$;

না হয় (ii) $(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2=0.$

$\therefore\ (b-c)=0,\ (c-a)=0$ এবং $(a-b)=0$; কারণ এরূপ না হইলে $(b-c), (c-a)$ এবং $(a-b)$, ইহারা ধনরাশি বা ঋণরাশি যাহাই হউক না কেন, ইহাদের প্রত্যেকটির বর্গ এক-একটি ধনরাশি হইবে, কাজেই ইহাদের বর্গের সমষ্টি শূন্য হইতে পারে না।

$\therefore\ b=c$; $c=a$; এবং $a=b$; অর্থাৎ $a=b=c$.

উদাহরণ 1. $x^3-8y^3+27z^3+18xyz$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=(x)^3+(-2y)^3+(3z)^3-3(x)(-2y)(3z)$

$$=\{x+(-2y)+(3z)\}\{(x)^2+(-2y)^2+(3z)^2-(-2y)(3z)-(3z)(x)-(x)(-2y)\}$$

$$=(x-2y+3z)(x^2+4y^2+9z^2+6yz-3zx+2xy).$$

উদাহরণ 2. a^6-10a^3-27কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=a^6-a^3-27-9a^3$

$$=(a^2)^3+(-a)^3+(-3)^3-3(a^2)(-a)(-3)$$

$$=\{(a^2)+(-a)+(-3)\}\{(a^2)^2+(-a)^2+(-3)^2-(-a)(-3)-(-3)(a^2)-(a^2)(-a)\}$$

$$=(a^2-a-3)(a^4+a^2+9-3a+3a^2+a^3)$$

$$=(a^2-a-3)(a^4+a^3+4a^2-3a+9).$$

উদাহরণ 3. দেখাও যে, $(ax+by)^3+(bx+cy)^3+(cx+ay)^3-3(ax+by)(bx+cy)(cx+ay)$ রাশিমালাটি $(a+b+c)(x+y)$ দ্বারা বিভাজ্য।

$(ax+by)+(bx+cy)+(cx+ay)$ প্রদত্ত রাশিমালাটির একটি গুণনীয়ক; অতএব (সংজ্ঞানুসারে) প্রদত্ত রাশিমালাটি $(ax+by)+(bx+cy)(cx+ay)$ দ্বারা বিভাজ্য;

কিন্তু $(ax+by)+(bx+cy)+(cx+ay)$

$$=(ax+bx+cx)+(ay+by+cy)$$

$$=(a+b+c)x+(a+b+c)y=(a+b+c)(x+y).$$

অতএব প্রদত্ত রাশিমালা $(a+b+c)(x+y)$ দ্বারা বিভাজ্য।

উদাহরণ 4. $2s=a+b+c$ হইলে প্রমাণ কর যে, $(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3-3(s-a)(s-b)(s-c)=\frac{1}{2}(a^3+b^3+c^3-3abc)$.

[ক. প্র., 1878]

$$(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3-3(s-a)(s-b)(s-c)$$
$$=\tfrac{1}{2}\{(s-a)+(s-b)+(s-c)\}[\{(s-b)-(s-c)\}^2+\{(s-c)-(s-a)\}^2+\{(s-a)-(s-b)\}^2]$$
$$=\tfrac{1}{2}\{3s-(a+b+c)\}[\{-(b-c)\}^2+\{-(c-a)\}^2+\{-(a-b)\}^2]$$
$$=\tfrac{1}{2}\{\tfrac{3}{2}(a+b+c)-(a+b+c)\}\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$$
$$=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$$
$$=\tfrac{1}{2}(a^3+b^3+c^3-3abc).$$

দ্রষ্টব্য। 4 অণুচ্ছেদ এবং তৎপরবর্তী উদাহরণগুলিও দ্রষ্টব্য।

প্রশ্নমালা 8

গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর :

1. $x^3+y^3+8z^3-6xyz$
2. $a^3-b^3+c^3+3abc$
3. $x^3-y^3-z^3-3xyz$
4. $8p^3+q^3-1+6pq$
5. $27p^3-8q^3-64-72pq$
6. $125x^3+1+6y(15x-36y^2)$
7. $8a(8a^2-9bc)-27b^3-8c^3$
8. $(p-q)^3+(q-r)^3-(r-p)^3+3(p-q)(q-r)(r-p)$
9. a^6+4a^3-1
10. $8m^6-17m^3+27$
11. x^6+45x^3-8.

x-এর মান নির্ণয় কর :

12. $(x-5)^3+(x-2)^3+(x-3)^3=3(x-5)(x-2)(x-3)$ হইলে
[সঙ্কেত : 27 পৃষ্ঠায় 14 অণুচ্ছেদের অনুসিদ্ধান্ত দ্রষ্টব্য।]
13. $(x-2)^3+(x+7)^3+(x-1)^3=3(x-2)(x+7)(x-1)$ হইলে
14. $(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3=3(x-a)(x-b)(x-c)$ হইলে
15. দেখাও যে, $8x^3+27y^3+z^3-18xyz$, $2x+3y+z$ দ্বারা বিভাজ্য ; এবং ভাগের ফল নির্ণয় কর।
16. $125x^3+64y^3+8z^3-120xyz$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করিয়া $25x^2+16y^2+4z^2-8yz-10zx-20xy$ দ্বারা ভাগ কর।
17. $8x^3-y^3-216-36xy$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করিয়া $4x^2+y^2+36-6y+12x+2xy$ দ্বারা ভাগ কর।

18. দেখাও যে, $(ax+by+cz)^3+(bx+cy+az)^3+(cx+ay+bz)^3$
$-3(ax+by+cz)(bx+cy+az)(cx+ay+bz)$
$(a+b+c)(x+y+z)$ দ্বারা বিভাজ্য।

19. $3s=a+b+c$ হইলে দেখাও যে, $(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3$
$$=3(s-a)(s-b)(s-c)$$

20. $ns=a+b+c$ হইলে দেখাও যে,
$$(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3-3(s-a)(s-b)(s-c)$$
$$=\frac{3-n}{n}(a^3+b^3+c^3-3abc).$$

15. (i) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
(ii) $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$
এবং (iii) $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ।

(i) aএর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইলে
$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$$
$$=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+(b^2c-bc^2)$$
$$=a^2(b-c)-a(b-c)(b+c)+bc(b-c)$$
$$=(b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\}$$
$$=(b-c)\{a^2-ab-ac+bc\}$$
$$=(b-c)\{b(c-a)-a(c-a)\},$$ [bএর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া]
$$=(b-c)(c-a)(b-a)$$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b).$$

এইরূপে (অথবা 5 অণুচ্ছেদ-অনুসারে)

(ii) $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)$$

এবং (iii) $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$
$$=(b-c)(c-a)(a-b).$$

উদাহরণ 1. $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

x^2, y^2, z^2এর স্থলে যথাক্রমে a, b, c লিখিলে

প্রদত্ত রাশিমালা $=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=-(b-c)(c-a)(a-b)$

$=-(y^2-z^2)(z^2-x^2)(x^2-y^2)$

$=-(y-z)(y+z)(z-x)(z+x)(x-y)(x+y).$

উদাহরণ 2. $(x+p)^2(y-z)+(y+p)^2(z-x)+(z+p)^2(x-y)$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=(x^2+2xp+p^2)(y-z)+(y^2+2yp+p^2)(z-x)$
$+(z^2+2zp+p^2)(x-y)$

$=\{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)\}$
$+2p\{x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)\}$
$+p^2\{(y-z)+(z-x)+(x-y)\}$

$=x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)+2p.0+p^2.0$

$=-(y-z)(z-x)(x-y).$

বিকল্প প্রণালী

$x+p$কে a, $y+p$কে b, $z+p$কে c ধরিলে

$b-c=(y+p)-(z+p)=y-z\,;$

$c-a=(z+p)-(x+p)=z-x\,;$

$a-b=(x+p)-(y+p)=x-y\,;$

অতএব প্রদত্ত রাশিমালা $=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=-(b-c)(c-a)(a-b)$

$=-(y-z)(z-x)(x-y).$

উদাহরণ 3. $(p+b)(p+c)(b-c)+(p+c)(p+a)(c-a)$
$+(p+a)(p+b)(a-b)$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

$p+a$কে x, $p+b$কে y, $p+c$কে z ধরিলে

$y-z=(p+b)-(p+c)=b-c\,;$

$z-x=(p+c)-(p+a)=c-a\,;$

$x-y=(p+a)-(p+b)=a-b\,;$

অতএব প্রদত্ত রাশিমালা $= yz(y-z)+zx(z-x)+xy(x-y)$

$$= -(y-z)(z-x)(x-y)$$

$$= -(b-c)(c-a)(a-b).$$

দ্রষ্টব্য। উদা. 3এর সমাধান উদাহরণ 2এর প্রথম প্রণালীতেও করা যায়।

বিশেষ দ্রষ্টব্য। এস্থলে 6 অনুচ্ছেদ এবং তৎপরবর্ত্তী উদাহরণগুলিও দ্রষ্টব্য।

প্রশ্নমালা 9

নিম্নলিখিত রাশিমালাগুলিকে বিশ্লেষণ কর :

1. $x^6(y^3-z^3)+y^6(z^3-x^3)+z^6(x^3-y^3)$
2. $y^2z^2(y^2-z^2)+z^2x^2(z^2-x^2)+x^2y^2(x^2-y^2)$
3. $p^2(q^4-r^4)+q^2(r^4-p^4)+r^2(p^4-q^4)$
4. $(a^2+pa+q)(b-c)+(b^2+pb+q)(c-a)+(c^2+pc+q)(a-b)$
5. $(pa^2+qa+r)(b^2-c^2)+(pb^2+qb+r)(c^2-a^2)$
   $+(pc^2+qc+r)(a^2-b^2)$
6. $(a-p)^2(b-c)+(b-p)^2(c-a)+(c-p)^2(a-b)$
7. $(x-b)(x-c)(b-c)+(x-c)(x-a)(c-a)+(x-a)(x-b)(a-b)$
8. $(x^2+b^2)(x^2+c^2)(b^2-c^2)+(x^2+c^2)(x^2+a^2)(c^2-a^2)$
   $+(x^2+a^2)(x^2+b^2)(a^2-b^2)$
9. $(x+a)(b+c)(b-c)+(x+b)(c+a)(c-a)+(x+c)(a+b)(a-b)$
10. $(x+a)^2(b+c)(b-c)+(x+b)^2(c+a)(c-a)+(x+c)^2(a+b)(a-b)$
11. $(ma^2-nbc)(b-c)+(mb^2-nca)(c-a)+(mc^2-nab)(a-b)$
12. $\{pa^2-qa(b+c)+rbc\}(b-c)+\{pb^2-qb(c+a)+rca\}(c-a)$
    $+\{pc^2-qc(a+b)+rab\}(a-b).$

16. (i) $\boldsymbol{a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)}$

(ii) $\boldsymbol{bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)+ab(a^2-b^2)}$

এবং **(iii)** $\boldsymbol{a(b^3-c^3)+b(c^3-a^3)+c(a^3-b^3)}$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ। [ক. প্র., 1898]

(i) প্রদত্ত রাশিমালা $= a^3(b-c)-a(b^3-c^3)+b^3c-bc^3,$

[aএর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া]

$$= a^3(b-c)-a(b-c)(b^2+bc+c^2)+bc(b-c)(b+c)$$

$=(b-c)\{a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)\}$
$=(b-c)\{a^3-ab^2-abc-ac^2+b^2c+bc^2\}$
$=(b-c)\{b^2(c-a)+bc(c-a)-a(c^2-a^2)\}$, [b-এর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া]
$=(b-c)(c-a)\{b^2+bc-a(c+a)\}$
$=(b-c)(c-a)\{b^2+bc-ac-a^2\}$
$=(b-c)(c-a)\{(b-a)c+(b^2-a^2)\}$, [c-এর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া]
$=(b-c)(c-a)(b-a)\{c+(b+a)\}$
$=-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.

এইরূপে দেখান যায় যে,

(ii) $bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)+ab(a^2-b^2)$
$=-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$

এবং (iii) $a(b^3-c^3)+b(c^3-a^3)+c(a^3-b^3)$
$=(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.

17. (i) $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$,
(ii) $b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)+a^2b^2(a-b)$
এবং (iii) $a^2(b^3-c^3)+b^2(c^3-a^3)+c^2(a^3-b^3)$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ।

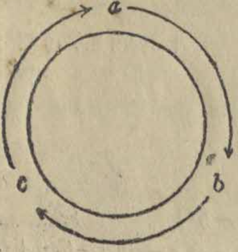
(i) প্রদত্ত রাশিমালা $=a^3(b^2-c^2)-a^2(b^3-c^3)+b^2c^2(b-c)$
[aএর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া]
$=(b-c)\{a^3(b+c)-a^2(b^2+bc+c^2)+b^2c^2\}$
$=(b-c)\{b^2(c^2-a^2)-a^2b(c-a)-a^2c(c-a)\}$,
[bএর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া]
$=(b-c)(c-a)\{b^2(c+a)-a^2b-a^2c\}$
$=(b-c)(c-a)\{c(b^2-a^2)+ab(b-a)\}$,
[cএর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া]
$=(b-c)(c-a)(b-a)\{c(b+a)+ab\}$
$=-(b-c)(c-a)(a-b)(bc+ca+ab)$.

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে,

(ii) $b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)+a^2b^2(a-b)$
$=-(b-c)(c-a)(a-b)(bc+ca+ab)$

এবং (iii) $a^2(b^3-c^3)+b^2(c^3-a^3)+c^2(a^3-b^3)$
$$=(b-c)(c-a)(a-b)(bc+ca+ab).$$

18. চক্র-ক্রম (Cyclic Order)। 15, 16 এবং 17 অণুচ্ছেদে প্রদত্ত রাশিমালাগুলিতে a, b এবং c এই অক্ষর তিনটির অবস্থান বিশেষভাবে লক্ষ্য করিবার বিষয়। a, b এবং c অক্ষরগুলিকে একটি বৃত্তের চারিদিকে পার্শ্ববর্ত্তী চিত্রানুযায়ী লিখিয়া উহাদিগকে তীরচিহ্ন-প্রদর্শিতক্রমে পড়িয়া গেলে aএর পর b, bএর পর c, cএর পর আবার a পাওয়া যাইবে। যদি a, b এবং c-সমন্বিত কোন রাশিতে aএর স্থলে b, bএর স্থলে c, c-এর স্থলে a লিখিলে রাশিটি অপরিবর্ত্তিত থাকে, তাহা হইলে ঐ রাশিটিকে a, b এবং c অক্ষরগুলির **চক্র-ক্রমে সজ্জিত (arranged in cyclic order)** বলা হয়।



যথা, $a+b+c$ রাশিটি চক্র-ক্রমে সজ্জিত ; কারণ a, b এবং cএর স্থলে যথাক্রমে b, c এবং a লিখিলে $a+b+c$ হইবে $b+c+a$, অর্থাৎ রাশিটির কোন পরিবর্ত্তন হইবে না।

এইরূপ $bc+ca+ab$, $(b+c)(c+a)(a+b)$, $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$, ইহারা প্রত্যেকে চক্র-ক্রমে সজ্জিত। 15, 16 এবং 17 অণুচ্ছেদে প্রদত্ত রাশিগুলির প্রত্যেকটিও a, b এবং c অক্ষরগুলির চক্র-ক্রমে সজ্জিত।

চক্র-ক্রমে সজ্জিত কোন রাশিমালার একটি পদ জানা থাকিলে উহার বাকি পদগুলি সহজে লিখা যায়। যথা, aএর স্থলে b, bএর স্থলে c এবং cএর স্থলে a লিখিলে $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$এর প্রথম পদ $a^2(b-c)$ হইতে দ্বিতীয় পদ $b^2(c-a)$ এবং $b^2(c-a)$ হইতে তৃতীয় পদ $c^2(a-b)$ পাওয়া যাইবে।

15, 16 এবং 17 অণুচ্ছেদ হইতে দেখা যাইতেছে যে, a, b এবং cএর চক্র-ক্রমে সজ্জিত কোন রাশিমালাকে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করিতে হইলে প্রথমে উহাকে aএর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া উহা হইতে a-নিরপেক্ষ গুণনীয়কটি বাহির করিয়া লইতে হয় ; পরে অবশিষ্ট অংশকে bএর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া উহা হইতে b-নিরপেক্ষ গুণনীয়কটি বাহির করিয়া লইতে হয় ; সর্ব্বশেষে বাকী অংশটিকে cএর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া উহা হইতে c-নিরপেক্ষ গুণনীয়কটি বাহির করিয়া লইতে হয়।

প্রশ্নমালা 10

নিম্নলিখিত রাশিমালাকে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর :

1. (i) $x^6(y^2-z^2)+y^6(z^2-x^2)+z^6(x^2-y^2)$

(ii) $q^2r^2(q^4-r^4)+r^2p^2(r^4-p^4)+p^2q^2(p^4-q^4)$

(iii) $l^2(m^6-n^6)+m^2(n^6-l^6)+n^2(l^6-m^6)$

(iv) $(a^3+pa+q)(b-c)+(b^3+pb+q)(c-a)$
$+(c^3+pc+q)(a-b)$

(v) $(a^3+xbc)(b-c)+(b^3+xca)(c-a)+(c^3+xab)(a-b)$

(vi) $\{ma^3+nbc(b+c)\}(b-c)+\{mb^3+nca(c+a)\}(c-a)$
$+\{mc^3+nab(a+b)\}(a-b)$

(vii) $\{xa^3-ya(b^2+bc+c^2)+zbc(b+c)\}(b-c)$
$+\{xb^3-yb(c^2+ca+a^2)+zca(c+a)\}(c-a)$
$+\{xc^3-yc(a^2+ab+b^2)+zab(a+b)\}(a-b)$

(viii) $(p+a)^3(b-c)+(p+b)^3(c-a)+(p+c)^3(a-b)$

(ix) $(p+b)(p+c)\{(p+b)^2-(p+c)^2\}+(p+c)(p+a)\{(p+c)^2$
$-(p+a)^2\}+(p+a)(p+b)\{(p+a)^2-(p+b)^2\}$

(x) $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$ [মা. প্র., 1906]

(xi) $(x+a)(b-c)^3+(x+b)(c-a)^3+(x+c)(a-b)^3$.

2. (i) $x^6(y^4-z^4)+y^6(z^4-x^4)+z^6(x^4-y^4)$

(ii) $y^4z^4(y^2-z^2)+z^4x^4(z^2-x^2)+x^4y^4(x^2-y^2)$

(iii) $x^4(y^6-z^6)+y^4(z^6-x^6)+z^4(x^6-y^6)$

(iv) $(a^3+pa^2+q)(b^2-c^2)+(b^3+pb^2+q)(c^2-a^2)$
$+(c^3+pc^2+q)(a^2-b^2)$

(v) $(x+a)^3(b^2-c^2)+(x+b)^3(c^2-a^2)+(x+c)^3(a^2-b^2)$

(vi) $a^2(b-c)^3+b^2(c-a)^3+c^2(a-b)^3$.

3. (i) $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$

(ii) $bc(b^3-c^3)+ca(c^3-a^3)+ab(a^3-b^3)$

(iii) $a(b^4-c^4)+b(c^4-a^4)+c(a^4-b^4)$.

4. (i) $a^5(b-c)+b^5(c-a)+c^5(a-b)$

(ii) $bc(b^4-c^4)+ca(c^4-a^4)+ab(a^4-b^4)$

(iii) $a(b^5-c^5)+b(c^5-a^5)+c(a^5-b^5)$.

19. (i) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$
(ii) $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc$
এবং (iii) $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ।

(i) প্রদত্ত রাশি $=a^2(b+c)+a(b^2+2bc+c^2)+(b^2c+bc^2)$

[aএর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া]

$=a^2(b+c)+a(b+c)^2+bc(b+c)$
$=(b+c)\{a^2+a(b+c)+bc\}=(b+c)\{a(a+b)+c(a+b)\}$
$=(b+c)(a+b)(a+c)$
$=(b+c)(c+a)(a+b).$

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে,

(ii) $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc$
$=(b+c)(c+a)(a+b)$

এবং (iii) $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc$
$=(b+c)(c+a)(a+b).$

20. (i) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$
(ii) $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+3abc$
এবং (iii) $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+3abc$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ।

(i) প্রদত্ত রাশি $=\{a^2(b+c)+abc\}+\{b^2(c+a)+abc\}+\{c^2(a+b)+abc\}$
$=a\{a(b+c)+bc\}+b\{b(c+a)+ac\}+c\{c(a+b)+ab\}$
$=a(bc+ca+ab)+b(bc+ca+ab)+c(bc+ca+ab)$
$=(bc+ca+ab)(a+b+c)=(a+b+c)(bc+ca+ab).$

এইরূপে (ii) $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+3abc$
$=(a+b+c)(bc+ca+ab)$

এবং (iii) $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+3abc$
$=(a+b+c)(bc+ca+ab).$

21. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ।

10 অণুচ্ছেদে প্রমাণিত হইয়াছে যে,

$$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(b+c)(c+a)(a+b).$$

অনুসিদ্ধান্ত। $b+c=0$, অথবা $c+a=0$, অথবা $a+b=0$ হইলে
$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3.$$

22. $\boldsymbol{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ।

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= 4b^2c^2-(a^4+b^4+c^4+2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2)\\ &=(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2\\ &=(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)\\ &=\{(b+c)^2-a^2\}\{a^2-(b-c)^2\}\\ &=(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)\\ &=(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).\end{aligned}$$

অনুসিদ্ধান্ত। $a+b+c=0$, অথবা $b+c=a$, অথবা $c+a=b$, অথবা $a+b=c$ হইলে $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2=a^4+b^4+c^4$.

দ্রষ্টব্য। 7, 8, 9, 10 এবং 11 অণুচ্ছেদগুলিও দেখ।

প্রশ্নমালা 11

নিম্নলিখিত রাশিমালাগুলিকে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর :

1. $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$
2. $(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc$
3. $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+8abc$
4. $(a+p)(b-c)^2+(b+p)(c-a)^2+(c+p)(a-b)^2+8(a+p)(b+p)(c+p)$
5. $(a^2+bc)(b+c)+(b^2+ca)(c+a)+(c^2+ab)(a+b)+4abc$
6. $(pa^2+qbc)(b+c)+(pb^2+qca)(c+a)+(pc^2+qab)(a+b)+2(p+q)abc$
7. $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-3abc$
8. $a(b-c)^2+b(c+a)^2+c(a-b)^2+5abc$
9. $(b+c)(c+a)(a+b)+abc$
10. $(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)+(y+z)(z+x)(x+y)$
11. $(a^2+bc)(b+c)+(b^2+ca)(c+a)+(c^2+ab)(a+b)+6abc$

12. $(pa^2+qbc)(b+c)+(pb^2+qca)(c+a)+(pc^2+qab)(a+b)$
$+3(p+q)abc$

13. $p(1+q^2)(1+r^2)+q(1+r^2)(1+p^2)+r(1+p^2)(1+q^2)+4pqr$

14. $(x+y-z)^3-x^3-y^3+z^3$

15. $(x-2y-3z)^3-x^3+8y^3+27z^3$

16. $a+b+c=10,\ bc+ca+ab=27,\ abc=10$ হইলে
(i) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$
এবং (ii) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$এর মান নির্ণয় কর।

গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর :

17. $2b^2c^2q^2r^2+2c^2a^2r^2p^2+2a^2b^2p^2q^2-a^4p^4-b^4q^4-c^4r^4$

18. $18y^2z^2+8z^2x^2+72x^2y^2-16x^4-81y^4-z^4$.

$2y^2z^2+2z^2x^2+2x^2y^2-x^4-y^4-z^4$এর মান নির্ণয় কর :

19. $x=1582,\ y=2679,\ z=4261$ হইলে

20. $x=2153,\ y=578,\ z=1575$ হইলে

21. $x=1987,\ y=5779,\ z=3792$ হইলে

22. $y+z-x=10,\ z+x-y=7,\ x+y-z=5$ হইলে।

23. **বিপরীত রাশিমালার (Reciprocal Expressionএর) গুণনীয়ক-নির্ণয়।** যদি সূচকের মানের ক্রমানুসারে সজ্জিত কোন বীজগণিতীয় রাশিমালার প্রথম ও শেষ পদ হইতে সমদূরবর্ত্তী পদদ্বয়ের সংখ্যাসূচক সহগ-দুইটি পরস্পর সমান হয়, তাহা হইলে রাশিমালাটিকে **বিপরীত রাশিমালা (Reciprocal or Recurring Expression)** বলে।

যথা, x^3+2x^2+2x+1, $x^4-2x^3+5x^2-2x+1$, $2x^4-3x^3y-6x^2y^2+3xy^3+2y^4$, ইহারা এক-একটি বিপরীত রাশিমালা।

উদাহরণ 1. x^3+2x^2+2x+1কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=(x^3+1)+(2x^2+2x)$, [সমান-সমান সহগবিশিষ্ট পদ-দ্বয়কে সঙ্ঘবদ্ধ করিয়া

$=(x+1)(x^2-x+1)+2x(x+1)$
$=(x+1)\{(x^2-x+1)+2x\}$
$=(x+1)(x^2+x+1)$.

উদাহরণ 2. $x^4+7x^3+12x^2+7x+1$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

সমান-সমান সহগবিশিষ্ট পদদ্বয়কে একত্র করিয়া

প্রদত্ত রাশিমালা $=(x^4+1)+(7x^3+7x)+12x^2$

$=\{(x^2+1)^2-2x^2\}+7x(x^2+1)+12x^2$

$=\{(x^2+1)^2+7x(x^2+1)+10x^2$ [সরল করিয়া]

$=\{(x^2+1)+2x\}\{(x^2+1)+5x\}$, [প্রথম খণ্ড, 111 অনু.]

$=(x^2+2x+1)(x^2+5x+1)=(x+1)^2(x^2+5x+1)$.

উদাহরণ 3. $2a^4-3a^3b-6a^2b^2+3ab^3+2b^4$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

সমান-সমান সহগবিশিষ্ট পদদ্বয়কে একত্র করিয়া

প্রদত্ত রাশিমালা $=2(a^4+b^4)-3ab(a^2-b^2)-6a^2b^2$

$=2\{(a^2-b^2)^2+2a^2b^2\}-3ab(a^2-b^2)-6a^2b^2$

$=2(a^2-b^2)^2-3ab(a^2-b^2)-2(ab)^2$, [সরল করিয়া]

$=2x^2-3xy-2y^2$, [a^2-b^2কে x, abকে y লিখিয়া]

$=(x-2y)(2x+y)$

$=\{(a^2-b^2)-2ab\}\{2(a^2-b^2)+ab\}$

$=(a^2-2ab-b^2)(2a^2+ab-2b^2)$.

প্রশ্নমালা 12

নিম্নলিখিত রাশিমালাগুলিকে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর :

1. x^3+4x^2+4x+1
2. x^3-7x^2-7x+1
3. x^3-5x^2+5x-1
4. $2x^3+3x^2+3x+2$
5. $2x^3-5x^2+5x-2$
6. $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$
7. $x^4+5x^3+8x^2+5x+1$
8. $a^4+3a^3-16a^2+3a+1$
9. $x^4-4x^3-10x^2-4x+1$
10. x^4-3x^3+3x-1
11. $2x^4-5x^3y-11x^2y^2+5xy^3+2y^4$
12. $3x^4+2x^3y-14x^2y^2-2xy^3+3y^4$
13. $x^5-4x^4-13x^3+13x^2+4x-1$
14. $2a^5+5a^4b+2a^3b^2-2a^2b^3-5ab^4-2b^5$
15. $a^5+6a^4x+8a^3x^2-16a^2x^3-48ax^4-32x^5$.

[সঙ্কেত : $2x$এর স্থলে b লিখিলে একটি বিপরীত রাশিমালা পাইবে।]

24. মাত্রা (Dimension) ; মান (Degree) ; রাশিমালার মান (Degree of an Expression) ; সমমাত্র রাশিমালা (Homogeneous Expression)। কতকগুলি আক্ষরিক সংখ্যার গুণফলে আক্ষরিক গুণনীয়কগুলির মোট সংখ্যাকে উক্ত গুণফলটির **মাত্রা** বা **মান** বলা হয়। অক্ষরগুলির সূচকসমূহ যোগ করিলে গুণনীয়কগুলির মোটসংখ্যা পাওয়া যায় ; অতএব অক্ষরগুলির সূচকসমূহের সমষ্টিই হইবে মাত্রা বা মান।

যথা, $7a^2b^3c^5$ এ a, b এবং c গুণনীয়কগুলির মোটসংখ্যা $=2+3+5=10$; অতএব $7a^2b^3c^5$ একটি দশমাত্রার বা দশম মানের রাশি (a term of ten dimensions or of tenth degree) ; মাত্রা বা মান-নির্ণয়ে সংখ্যাত্মক (numerical) গুণনীয়ককে ধরা হয় না।

কোন রাশিমালার পদগুলির মান বিভিন্ন হইলে যে পদটির মান বৃহত্তম, তাহার মানকেই উক্ত **রাশিমালার মান** বলা হয়। কোন রাশিমালার সকল পদের মান পরস্পর সমান হইলে উহাকে **সমমাত্র রাশিমালা** বলা হয়।

$2x^4y^2+3x^2y^3+x^2+3$, একটি ষষ্ঠ মানের রাশিমালা ; কারণ ইহার $2x^4y^2$ পদটির মাত্রা ছয় এবং পদগুলির মধ্যে ইহার মাত্রাটিই বৃহত্তম।

$x^3+y^3+z^3-5xyz$, একটি সমমাত্র রাশিমালা ; কারণ ইহার প্রত্যেক পদের মাত্রা তিন।

25. দুইমাত্রা-বিশিষ্ট রাশিমালার (Expression of the second degreeএর) গুণনীয়ক-নির্ণয়। প্রদত্ত রাশিমালাকে উহার অন্তর্গত কোন অক্ষরের ঘাতের অধঃক্রম-অনুসারে সাজাইলে উহাকে 'ax^2+bx+c'-আকারে প্রকাশিত করা যায় এবং প্রথম খণ্ডের 112 অণুচ্ছেদে বর্ণিত প্রণালীতে উহার গুণনীয়ক নির্ণয় করা যায়।

নিম্নের উদাহরণগুলি হইতে প্রক্রিয়াটি বুঝা যাইবে।

উদাহরণ 1. $3x^2-14y^2+xy+4x+31y-15$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

xএর ঘাতের অধঃক্রম-অনুসারে সাজাইলে

প্রদত্ত রাশিমালা $=3x^2+(y+4)x-(14y^2-31y+15)$

$=3x^2+(y+4)x-(2y-3)(7y-5).$

ইহা 'ax^2+bx+c'-আকারের রাশিমালা এবং 112 অণুচ্ছেদে প্রদর্শিত প্রণালীতে ইহাকে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যায়। $-(2y-3)(7y-5)$ এবং (x^2এর সহগ) 3এর গুণফলকে এইরূপ দুইটি গুণনীয়কে বিভক্ত কর, যাহাদের সমষ্টি (xএর সহগ) $y+4$ হয় ;

পরীক্ষা দ্বারা দেখা যাইবে যে, $7y-5$ এবং $-3(2y-3)$ই নির্ণেয় গুণনীয়ক। অতএব

প্রদত্ত রাশিমালা $=3x^2+(7y-5)x-3(2y-3)x-(2y-3)(7y-5)$

$=x\{3x+(7y-5)\}-(2y-3)\{3x+(7y-5)\}$

$=\{3x+(7y-5)\}\{x-(2y-3)\}$

$=(3x+7y-5)(x-2y+3).$

উদাহরণ 2. $2x^2-2y^2-3z^2+7yz+zx+3xy$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

xএর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইলে

প্রদত্ত রাশিমালা $=2x^2+(3y+z)x-(2y^2-7yz+3z^2)$

$=2x^2+(3y+z)x-(y-3z)(2y-z).$

এখন $-(y-3z)(2y-z)$ এবং (x^2এর সহগ) 2এর গুণফলকে এইরূপ দুইটি গুণনীয়কে বিভক্ত কর, যাহাদের সমষ্টি (xএর সহগ) $3y+z$এর সমান। পরীক্ষা দ্বারা $2(2y-z)$ এবং $-(y-3z)$ এই দুইটিই নির্ণেয় গুণনীয়ক। অতএব প্রদত্ত রাশিমালা

$=2x^2+2(2y-z)x-(y-3z)x-(y-3z)(2y-z)$

$=2x\{x+(2y-z)\}-(y-3z)\{x+(2y-z)\}$

$=\{x+(2y-z)\}\{2x-(y-3z)\}$

$=(x+2y-z)(2x-y+3z).$

উদাহরণ 3. $4a^2-2b^2-3c^2+5bc-4ca+2ab-10a+2b-c+4$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

aএর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইলে

প্রদত্ত রাশিমালা $=4a^2+(2b-4c-10)a-(2b^2+3c^2-5bc-2b+c-4)$;

পূর্ব্ববর্ত্তী উদাহরণ 1এর প্রদর্শিত প্রণালীতে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করিলে দেখা যাইবে যে, $2b^2+3c^2-5bc-2b+c-4=(2b-3c-4)(b-c+1)$; অতএব

প্রদত্ত রাশিমালা $=4a^2+(2b-4c-10)a-(2b-3c-4)(b-c+1)$;

এখন $-(2b-3c-4)(b-c+1)$ এবং (a^2এর সহগ) 4এর গুণফলকে এইরূপ দুইটি গুণনীয়কে বিভক্ত কর, যাহাদের সমষ্টি (aএর সহগ অর্থাৎ) $2b-4c-10$; পরীক্ষা দ্বারা দেখা যাইবে যে, $2(2b-3c-4)$ এবং $-2(b-c+1)$ই নির্ণেয় গুণনীয়ক। অতএব

প্রদত্ত রাশিমালা $=4a^2+2(2b-3c-4)a-2(b-c+1)a$

$-(2b-3c-4)(b-c+1)$

$$=2a\{2a+(2b-3c-4)\}-(b-c+1)\{2a+(2b-3c-4)\}$$
$$=\{2a+(2b-3c-4)\}\{2a-(b-c+1)\}$$
$$=(2a+2b-3c-4)(2a-b+c-1).$$

প্রশ্নমালা 13

নিম্নলিখিত রাশিগুলিকে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর :

1. (i) $2x^2+6y^2+7xy+6x+11y+4$

(ii) $3x^2-2y^2-5xy+11x-y+6$

(iii) $2x^2+3y^2-5xy-2x+y-4$

(iv) $a^2-6b^2+ab+3a-11b-4$.

2. (i) $2x^2+2y^2+z^2+3yz+3zx+5xy$

(ii) $3x^2-8y^2-6z^2+16yz+7zx-2xy$

(iii) $12a^2-5b^2-12c^2+16bc+10ca-11ab$

(iv) $2x^2-6y^2-15z^2+19yz+zx-xy$.

3. (i) $a^2+2b^2+6c^2+7bc+5ca+3ab+3a+5b+8c+2$

(ii) $x^2-3y^2-2z^2+7yz+zx+2xy-x+5y-5z-2$

(iii) $2a^2+6b^2-12c^2-bc+2ca-7ab+13a-22b-c+20$

(iv) $2x^2-15y^2+6z^2-yz-7zx-xy+7x+12y-11z+3$.

26. পরীক্ষা দ্বারা গুণনীয়ক-নির্ণয়।

যদি x-অক্ষরবিশিষ্ট কোন রাশিমালায় $x=a$ ধরিলে রাশিমালাটির মান শূন্য হয়, তাহা হইলে $(x-a)$ রাশিমালাটির একটি গুণনীয়ক হইবে। এই তত্ত্বটিকে গুণনীয়ক উপপাদ্য বলে। ইহা পরে প্রমাণিত হইবে।

অতএব পরীক্ষা দ্বারা কোন-কোন স্থলে সহজে গুণনীয়ক নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ 1. x^3+4x^2-x-4কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

$x=1$ ধরিলে প্রদত্তরাশি $=1^3+4.1^2-1-4=1+4-1-4=0.$

অতএব $x-1$ প্রদত্তরাশির একটি গুণনীয়ক। এখন রাশিমালাটির পদগুলিকে এরূপ বিভিন্ন অংশে সাজাও, যেন প্রত্যেক অংশ $(x-1)$ দ্বারা বিভাজ্য হয়। তাহা করিলে

প্রদত্তরাশি $=(x^3-x^2)+(5x^2-5x)+(4x-4)$
$$=x^2(x-1)+5x(x-1)+4(x-1)$$
$$=(x-1)(x^2+5x+4)=(x-1)(x+1)(x+4)$$

দ্রষ্টব্য। $x=1$ ধরিলে প্রদত্ত রাশিমালা=উহার সহগগুলির বীজগণিতীয় সমষ্টি। অতএব x-সমন্বিত কোন রাশিমালার সহগগুলির বীজগণিতীয় সমষ্টি 0 (শূন্য) হইলে $(x-1)$ উহার গুণনীয়ক হইবে। এইরূপে দেখান যায় যে, x-এর অযুগ্মঘাতগুলির সহগসমূহের বীজগণিতীয় সমষ্টি যুগ্মঘাতগুলির সহগসমূহের বীজগণিতীয় সমষ্টির সমান হইলে $(x+1)$ রাশিমালাটির একটি গুণনীয়ক হইবে। যথা, $x-1$ এবং $x+1$ উভয়েই (x^3+4x^2-x-4)এর গুণনীয়ক।

উদাহরণ 2. a^5-b^5কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

$a=b$ ধরিলে প্রদত্ত রাশিমালা $=b^5-b^5=0$; অতএব $(a-b)$ প্রদত্ত রাশিমালার একটি গুণনীয়ক। এখন রাশিমালাটির পদগুলিকে এরূপ বিভিন্ন অংশে সাজাও, যেন প্রত্যেক অংশ $(a-b)$ দ্বারা বিভাজ্য হয়।

$$\begin{aligned}&a^5-b^5\\&=a^5-a^4b+a^4b-a^3b^2+a^3b^2-a^2b^3+a^2b^3-ab^4+ab^4-b^5\\&=a^4(a-b)+a^3b(a-b)+a^2b^2(a-b)+ab^3(a-b)+b^4(a-b)\\&=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4).\end{aligned}$$

দ্রষ্টব্য। এইরূপে a^5+b^5কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যায়।

কারণ $a=-b$ ধরিলে প্রদত্ত রাশিমালা $=(-b)^5+b^5=-b^5+b^5=0$;

অতএব $\{a-(-b)\}$, অর্থাৎ $(a+b)$ প্রদত্ত রাশিমালার একটি গুণনীয়ক।

উদাহরণ 3. $a^5+4a^4-7a^3-29a^2+4a+3$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

$a=-3$ ধরিলে প্রদত্ত রাশিমালা

$$\begin{aligned}&=(-3)^5+4(-3)^4-7(-3)^3-29(-3)^2+4(-3)+3\\&=-243+324+189-261-12+3=516-516=0.\end{aligned}$$

অতএব $\{a-(-3)\}$ অর্থাৎ $(a+3)$ প্রদত্ত রাশিমালার একটি গুণনীয়ক। এখন পদগুলিকে বিভিন্ন অংশে এরূপভাবে সাজাও, যেন $(a+3)$ প্রত্যেক অংশের একটি গুণনীয়ক হয়।

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশিমালা}&=a^5+3a^4+a^4+3a^3-10a^3-30a^2+a^2+3a+a+3\\&=a^4(a+3)+a^3(a+3)-10a^2(a+3)+a(a+3)+(a+3)\\&=(a+3)(a^4+a^3-10a^2+a+1).\end{aligned}$$

$a^4+a^3-10a^2+a+1$ একটি বিপরীত (reciprocal) রাশিমালা এবং ইহাকে 23 অনুচ্ছেদে বর্ণিত নিয়ম-অনুসারে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

$a^4+a^3-10a^2+a+1=(a^4+1)+(a^3+a)-10a^2$

$$=\{(a^2+1)^2-2a^2\}+a(a^2+1)-10a^2$$
$$=(a^2+1)^2+a(a^2+1)-12a^2$$
$$=\{(a^2+1)+4a\}\{(a^2+1)-3a\}$$
$$=(a^2+4a+1)(a^2-3a+1)\,;$$

অতএব প্রদত্ত রাশিমালা $=(a+3)(a^2+4a+1)(a^2-3a+1)$.

প্রশ্নমালা 14

নিম্নলিখিত রাশিমালাগুলিকে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর :

1. x^3-2x^2+3x-2 2. $3x^3+2x^2-6x+1$
3. $a^3-6a^2+11a-6$ 4. a^3-a^2+a-21
5. $x^3-2x^2-23x+60$ [বো. প্র., 1887]
6. $x^4-5x^3+9x^2-7x+2$ [বো. প্র., 1901]
7. $x^4-6x^3+7x^2+6x-8$ [ঢা. বো., 1926
8. $2a^4+a^3-9a^2-13a-5$. 9. $x^4-4x^3+3x^2-4x+12$
10. $x^5-7x^4+13x^3-x^2-14x+8$ 11. a^5+b^5 12. a^7+b^7
13. a^7-b^7 14. $x^5-5x^4+6x^3+3x^2-7x+2$
15. $x^5+x^4+40x^2-56x-96$.

27. পদ-বিন্যাস (Arrangement of terms) এবং সঙ্ঘবদ্ধকরণ (Grouping) দ্বারা গুণনীয়ক-নির্ণয়।

কখন-কখন রাশিমালার পদগুলিকে সুবিধাজনকভাবে সাজাইয়া সহজে উহার গুণনীয়ক নির্ণয় করা যায়। তবে এই প্রণালীর কোন বিধিবদ্ধ নিয়ম নাই। নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি হইতে কার্য্যপ্রণালী-বিষয়ে শিক্ষার্থীদের ধারণা জন্মিবে।

উদাহরণ 1. $27a^3+15a^2-5a-1$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=(27a^3-1)+(15a^2-5a)$
$$=\{(3a)^3-1\}+5a(3a-1)$$
$$=(3a-1)\{(3a)^2+3a.1+1+5a\}$$
$$=(3a-1)(9a^2+8a+1).$$

উদাহরণ 2. $a^3+8a-24$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=a^3+8a-8-16$

$$=(a^3-8)+(8a-16)$$
$$=(a^3-2^3)+8(a-2)$$
$$=(a-2)\{(a^2+a.2+2^2)+8\}$$
$$=(a-2)(a^2+2a+12).$$

উদাহরণ 3. $(1+ab)^2-a(1+b^2)-b(1+a^2)$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

প্রদত্ত রাশি $=(1+ab)^2-a-ab^2-b-a^2b$
$$=(1+ab)^2-(a+b)-(a^2b+ab^2)$$
$$=(1+ab)^2-(a+b)-ab(a+b)$$
$$=(1+ab)^2-(a+b)(1+ab)$$
$$=(1+ab)\{(1+ab)-(a+b)\}$$
$$=(1+ab)\{1-a-(b-ab)\}=(1+ab)(1-a)(1-b).$$

উদাহরণ 4. $(x^2-y^2)(a^2-b^2)+4abxy$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।
[এ. প্র., 1917]

প্রদত্ত রাশিমালা $=(x^2a^2-x^2b^2-y^2a^2+y^2b^2)+4abxy$
$$=(x^2a^2+2abxy+y^2b^2)-(x^2b^2-2abxy+y^2a^2),$$
[সজ্জবদ্ধ করিয়া]
$$=(xa+yb)^2-(xb-ya)^2$$
$$=\{(xa+yb)+(xb-ya)\}\{(xa+yb)-(xb-ya)\}$$
$$=\{(xa+xb)-(ya-yb)\}\{(xa-xb)+(ya+yb)\}$$
$$=\{(a+b)x-(a-b)y\}\{(a-b)x+(a+b)y\}.$$

উদাহরণ 5. $4a^4-20a^3+39a^2-35a+12$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=(4a^4-20a^3+25a^2)+(14a^2-35a)+12$
$$=(2a^2-5a)^2+7(2a^2-5a)+12$$
$$=x^2+7x+12,$$ [$2a^2-5a$কে x ধরিলে]
$$=(x+3)(x+4)$$
$$=(2a^2-5a+3)(2a^2-5a+4)$$
$$=(a-1)(2a-3)(2a^2-5a+4).$$

উদাহরণ 6. $(b+c)^2-2(b^2+c^2)a^2+(b-c)^2a^4$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর। [মা. প্র., 1889]

যেহেতু $2(b^2+c^2)=(b+c)^2+(b-c)^2$,

অতএব প্রদত্ত রাশিমালা

$$=(b+c)^2-\{(b+c)^2+(b-c)^2\}a^2+(b-c)^2a^4$$
$$=\{(b+c)^2-(b+c)^2a^2\}-\{(b-c)^2a^2-(b-c)^2a^4\}$$
$$=(b+c)^2(1-a^2)-(b-c)^2a^2(1-a^2)$$
$$=(1-a^2)\{(b+c)^2-(b-c)^2a^2\}$$
$$=(1+a)(1-a)\{(b+c)+(b-c)a\}\{(b+c)-(b-c)a\}.$$

উদাহরণ 7. $a+(1-a)b+(1-a)(1-b)c-1$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=-1+a+(1-a)b+(1-a)(1-b)c$

$$=-(1-a)+(1-a)b+(1-a)(1-b)c$$
$$=(1-a)\{-1+b+(1-b)c\}$$
$$=(1-a)\{-(1-b)+(1-b)c\}$$
$$=(1-a)(1-b)(-1+c)=-(1-a)(1-b)(1-c).$$

প্রশ্নমালা 15

নিম্নলিখিত রাশিমালাগুলিকে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর :

1. $8x^3+6x^2+3x+1$ **2.** $64a^3-28a^2x+21ax^2-27x^3$

3. $2m^3-3m^2n+4mn^2-6n^3$ **4.** $x^3-2x-21$

5. $8a^3+30a^2+45a+27$ **6.** $27x^3-24xy^2+8y^3$

7. $(b-c)(1+a)+(a-b)(1+c)$

8. $(bq-cr)(x+ay)+(ar-bq)(x+cy)$

9. $(c^2+ab)^2-ac(c^2+b^2)-bc(c^2+a^2)$

10. $y(1-x)+z(1-x^2)+yz(1+x)+(1-x)^2$

11. a^3b-a^2+b+1 **12.** $(p+q)a^2-5pqa-q^2(q-4p)$

13. $x^2-p^2a^2+y^2-p^2b^2+2(xy+p^2ab)$

14. $(1-c^2)(1+a)^2-(1-a^2)(1+c)^2$ [ক. প্র., 1881]

15. $(x+y)^2+(x+z)^2-(y+a)^2-(z+a)^2$

16. $2(a^6+b^6)-ab(a^2+b^2)(2ab-3a^2+3b^2)$ [বো. প্র., 1925]

17. $(x+1)^2+8(x+1)(y+3)+15(y+3)^2$

18. $x^4+y^4+2+2x^2y^2-3x^2-3y^2$

19. $4x^2-4xy+y^2+14x-7y-30$ [বো. প্র., 1922]

20. $(x^2-6x)^2-8(x^2-6x+8)-64$ [বো. প্র., 1924]

21. $9x^4-12x^3+19x^2-10x+6$

22. $16x^4-40x^2y^2+25y^4+32x^2-40y^2-20$

23. $(x^2-4x)(x^2-4x-1)-20$ [বো. প্র., 1921]

24. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$

25. $(2a+1)(2a+5)(2a+7)(2a+11)+44$

26. $(2a+3b)(3a+b)(6a+5b)(a+b)-3b^4$

27. $(x^2+y^2)^2-4ab(x^2+y^2)-(a^2-b^2)^2$

28. $(a+b)^2(x^2+y^2)^2-4ab(x^2+y^2)-(a-b)^2$

29. $(ab+1)^4-4ab(ab+1)^2-(a^2-b^2)^2$

30. $(ab+1)^4-2(a^2+b^2)(ab+1)^2+(a^2-b^2)^2$

31. $(ax+by)^2+(ay-bx)^2$

32. $\{(ac+bd)x+(ad-bc)y\}^2+\{(ac+bd)y-(ad-bc)x\}^2$

33. $(ax+by-1)^2+(bx-ay)^2-(x-a)^2-(y-b)^2$

34. $(ax+by+cz)^2+(cy-bz)^2+(az-cx)^2+(bx-ay)^2$

35. $x+y(1+x)+z(1+x)(1+y)+1$

36. $1-a-2a(1-a)-3a(1-a)(1-2a)-4a(1-a)(1-2a)(1-3a)$

37. $1+x+x^2(1+x)+x^3(1+x)(1+x^2)+x^4(1+x)(1+x^2)(1+x^3)$

38. $a^3(b-c+1)+b^3(c-a+1)+c^3(a-b+1)-3abc$

39. $8x^2y^2z^2+(y^2+z^2-x^2)(z^2+x^2-y^2)(x^2+y^2-z^2)$

[সঙ্কেত : $y^2+z^2-x^2$, $z^2+x^2-y^2$ এবং $x^2+y^2-z^2$কে যথাক্রমে a, b এবং c ধরিলে প্রদত্ত রাশি $=(b+c)(c+a)(a+b)+abc.$]

40. $(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3$

41. $(x^2-1)(y^2-1)(z^2-1)+(x+yz)(y+zx)(z+xy).$

[সঙ্কেত : সরল কর।]

42. $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+a^3+b^3+c^3$

43. $a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)+abc(a+b+c)$

44. $(x+y)^5-x^5-y^5$

45. $X=ax+by+cz$, $Y=bx+cy+az$, $Z=cx+ay+bz$ হইলে $X^3+Y^3+Z^3-3XYZ$এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

28. **গুণনীয়ক দ্বারা ভাগফল-নির্ণয় (Division by factorisation)।**

সংজ্ঞানুসারে কোন রাশি উহার যে-কোন গুণনীয়ক দ্বারা বিভাজ্য। অতএব গুণনীয়কে বিশ্লেষণ দ্বারা সহজে ভাগফল নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ 1. দেখাও যে, $a^3+8b^3+27c^3-18abc$ $a^2+4b^2+9c^2-6bc-3ca-2ab$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য এবং ভাগফলটি নির্ণয় কর।

$a^3+8b^3+27c^3-18abc$

$=(a)^3+(2b)^3+(3c)^3-3.a.2b.3c$

$=(a+2b+3c)(a^2+4b^2+9c^2-6bc-3ca-2ab).$ [14 অনু.]

$\therefore\ a^3+8b^3+27c^3-18abc\div(a^2+4b^2+9c^2-6bc-3ca-2ab)$

$=a+2b+3c.$

উদাহরণ 2. $3(y-z)(z-x)(x-y)$কে তিনটি ত্রিঘাতের (cubeএর) সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর।

$y-z$কে a, $z-x$কে b, $x-y$কে c ধরিলে

$a+b+c=(y-z)+(z-x)+(x-y)=0.$

অতএব প্রদত্ত রাশি $=3abc=a^3+b^3+c^3$ [অনুসিদ্ধান্ত 2, 4 অনু.]

$=(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3.$

উদাহরণ 3. $a+b+c=12$, $bc+ca+ab=60$ হইলে $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$এর মান নির্ণয় কর।

$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$

$=(a+b+c)(bc+ca+ab)=12.60=720.$

উদাহরণ 4. দেখাও যে, $(x+1)(x+4)(x+5)(x+8)+4(2x+9)^2$ একটি পূর্ণবর্গ রাশি।

$(x+1)(x+4)(x+5)(x+8)$

$=\{(x+1)(x+4)\}\{(x+5)(x+8)\}$

$=(x^2+5x+4)(x^2+13x+40)$

$$=\left\{\frac{(x^2+5x+4)+(x^2+13x+40)}{2}\right\}^2-\left\{\frac{(x^2+13x+40)-(x^2+5x+4)}{2}\right\}^2$$

$=(x^2+9x+22)^2-(4x+18)^2=(x^2+9x+22)^2-4(2x+9)^2.$

অতএব প্রদত্ত রাশি $=(x^2+9x+22)^2-4(2x+9)^2+4(2x+9)^2$
$=(x^2+9x+22)^2$.

প্রশ্নমালা 16

গুণনীয়ক-সাহায্যে ভাগ কর ঃ

1. $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-3abc$কে $bc+ca+ab$ দ্বারা

2. $8x^3+27y^3-z^3+18xyz$কে
$4x^2+9y^2+z^2+3yz+2zx-6xy$ দ্বারা

3. $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$কে
$bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$ দ্বারা

4. $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$কে
$(b-c)(bc+ca+ab)$ দ্বারা

5. $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$কে
$x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)+2xyz$ দ্বারা

6. (i) দেখাও যে, $(ax+by+cz)^2+(cy-bz)^2+(az-cx)^2+(bx-ay)^2$ $x^2+y^2+z^2$ দ্বারা বিভাজ্য।

(ii) $(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)$কে চারিটি বর্গরাশির সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর।

7. দেখাও যে, $x(1+y^2)(1+z^2)+y(1+z^2)(1+x^2)+z(1+x^2)(1+y^2)+4xyz$ $1+yz+zx+xy$ দ্বারা বিভাজ্য। [ক. প্র., 1878]

8. দেখাও যে,
$X=ax+by+cz$, $Y=bx+cy+az$, $Z=cx+ay+bz$ হইলে
$X^3+Y^3+Z^3-3XYZ$ $x^3+y^3+z^3-3xyz$ দ্বারা বিভাজ্য।

তিনটি বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর ঃ

9. $2(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$কে

10. $(x+y+z)^2+x^2+y^2+z^2$কে

11. $2(x-y)(x-z)+2(y-z)(y-x)+2(z-x)(z-y)$কে। [বো. প্র., 1884]

তিনটি ত্রিঘাতের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর ঃ

12. $3(y+z-2x)(z+x-2y)(x+y-2z)$কে

13. $3abc(b-c)(c-a)(a-b)$কে

14. $3(y-z)(z-x)(x-y)(y+z)(z+x)(x+y)$কে

15. দেখাও যে, $(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3+24xyz$ একটি ত্রিঘাত রাশি।

মান নির্ণয় কর :

16. (i) $x+y+z=14$ এবং $(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=50$ হইলে $x^3+y^3+z^3-3xyz$এর।

(ii) $a=y-z$, $b=z-x$, $c=x-y$ হইলে $a^3+b^3+c^3-3abc$এর।

(iii) $a+b+c=p$, $bc+ca+ab=q$, $a^3+b^3+c^3=r$ হইলে abcএর।

17. $b+c-a=10$, $c+a-b=7$, $a+b-c=5$ হইলে

$2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$এর।

18. $a+b+c=14$, $a^3+b^3+c^3=100$ হইলে

$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$এর।

19. $a+b+c=16$, $bc+ca+ab=76$ এবং $abc=96$ হইলে

$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$এর।

20. দেখাও যে, $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+16$ একটি পূর্ণবর্গ রাশি।

21. দেখাও যে, $(3x+1)(2x+3)(6x+5)(x+1)+1$ একটি পূর্ণবর্গ রাশি।

22. দেখাও যে, $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+4(x+4)^2$একটি পূর্ণবর্গ রাশি।

অভেদাবলী (Identities)

29. প্রথম খণ্ডের সপ্তদশ অধ্যায়ে অভেদ প্রমাণ করিবার নিয়ম বিবৃত হইয়াছে এবং বিভিন্ন উদাহরণ দ্বারা উহার কার্য্যপ্রণালী প্রদর্শিত হইয়াছে। সূত্রাবলী-বিষয়ক অণুচ্ছেদগুলিতেও বহু অভেদ প্রমাণিত হইয়াছে। শিক্ষার্থিগণ এইগুলি আবার দেখিয়া লইবে। নিম্নে আরও কয়েকটি অভেদ প্রমাণিত হইল।

উদাহরণ 1. প্রমাণ কর যে, $(ax+by+cz)^2+(cy-bz)^2$
$+(az-cx)^2+(bx-ay)^2=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$.

বামপক্ষকে সরল কর এবং পদগুলিকে x^2, y^2, z^2-অনুসারে সাজাও।

$$\text{বামপক্ষ}=(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2bcyz+2cazx+2abxy)$$
$$+(c^2y^2-2bcyz+b^2z^2)+(a^2z^2-2cazx+c^2x^2)$$
$$+(b^2x^2-2abxy+a^2y^2)$$

$$=(a^2x^2+b^2x^2+c^2x^2)+(a^2y^2+b^2y^2+c^2y^2)$$
$$+(a^2z^2+b^2z^2+c^2z^2)$$
$$=(a^2+b^2+c^2)x^2+(a^2+b^2+c^2)y^2+(a^2+b^2+c^2)z^2$$
$$=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2).$$

উদাহরণ 2. প্রমাণ কর যে,

$$\frac{(a^2-bc)^2-(b^2-ca)(c^2-ab)}{a}=\frac{(b^2-ca)^2-(c^2-ab)(a^2-bc)}{b}$$

$$=\frac{(c^2-ab)^2-(a^2-bc)(b^2-ca)}{c}=a^3+b^3+c^3-3abc.$$

প্রমাণ। $\frac{(a^2-bc)^2-(b^2-ca)(c^2-ab)}{a}$

$$=\frac{(a^4-2a^2bc+b^2c^2)-(b^2c^2-ab^3-ac^3+a^2bc)}{a}$$

$$=\frac{a^4+ab^3+ac^3-3a^2bc}{a}=a^3+b^3+c^3-3abc.$$

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, দ্বিতীয় এবং তৃতীয় ভগ্নাংশটির প্রত্যেকে
$$=a^3+b^3+c^3-3abc.$$

উদাহরণ 3. প্রমাণ কর যে,

$$x+2x(1+x)+3x(1+x)(1+2x)=(1+x)(1+2x)(1+3x)-1.$$

বামপক্ষে 1 যোগ এবং সমতারক্ষার জন্য পরে উহা বিয়োগ করিয়া

বামপক্ষ $=1+x+2x(1+x)+3x(1+x)(1+2x)-1$
$$=\{(1+x)+2x(1+x)\}+3x(1+x)(1+2x)-1$$
$$=(1+x)(1+2x)+3x(1+x)(1+2x)-1$$
$$=(1+x)(1+2x)(1+3x)-1.$$

উদাহরণ 4. প্রমাণ কর যে,

$$(x+y+z)^3=(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3+24xyz.$$

কখন কখন অভেদে উল্লিখিত রাশিমালাগুলির স্থলে এক-একটি অক্ষর ধরিয়া লইলে প্রমাণের সুবিধা হয়। এস্থলে $y+z-x$কে a, $z+x-y$কে b এবং $x+y-z$কে c ধরা হইলে

$$a+b+c=(y+z-x)+(z+x-y)+(x+y-z)=x+y+z;$$
$$b+c=(z+x-y)+(x+y-z)=2x;$$
এইরূপে $c+a=2y$ এবং $a+b=2z$.

অতএব বামপক্ষ $=(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b)$
$$=(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3+3.2x.2y.2z.$$
$$=(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3+24xyz.$$

30. সাপেক্ষ অভেদ (Conditional Identities)। প্রথম খণ্ডের সপ্তদশ অধ্যায়ে এইরূপ অভেদ প্রমাণিত হইয়াছে। এস্থলে আরও কয়েকটি উদাহরণ সন্নিবেশিত হইল। নিম্নলিখিত (i)-(v)-সংখ্যক অভেদগুলি উত্তমরূপে মুখস্থ রাখা সুবিধাজনক ; অভেদ-বিষয়ক প্রশ্নের সমাধানে বহুস্থলে এইগুলি ব্যবহৃত হয়।

$\boldsymbol{a+b+c=0}$ হইলে (i) $\boldsymbol{a^2+b^2+c^2=-2(bc+ca+ab)}$.

এবং (ii) $\boldsymbol{a^2-bc=b^2-ca=c^2-ab}$
$$\boldsymbol{=-(bc+ca+ab)=\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)}.$$

প্রমাণ। (i) $a+b+c=0$; $\therefore$ $(a+b+c)^2=0$;

অর্থাৎ $a^2+b^2+c^2+2(bc+ca+ab)=0$.

পক্ষান্তর করিয়া $a^2+b^2+c^2=-2(bc+ca+ab)$.

(ii) $a^2-bc=a.a-bc=-(b+c)a-bc$, [$\because$ $a=-(b+c)$]
$$=-(bc+ca+ab).$$

এইরূপ $b^2-ca=-(bc+ca+ab)$ এবং $c^2-ab=-(bc+ca+ab)$.

অতএব $a^2-bc=b^2-ca=c^2-ab=-(bc+ca+ab)$
$$=\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2). \quad [\text{(i) দ্বারা}]$$

(iii) $\boldsymbol{a+b+c=0}$ হইলে

$$\boldsymbol{(bc+ca+ab)^2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2=\tfrac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)^2}.$$

প্রমাণ। $(bc+ca+ab)^2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2abc(a+b+c)$
$$=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2abc\times 0$$
$$=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2.$$

এখন (i) হইতে $bc+ca+ab=-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$;

$\therefore\quad (bc+ca+ab)^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)^2$;

অতএব $\quad (bc+ca+ab)^2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2$

$=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)^2.$

(iv) $a+b+c=0$ হইলে $a^3+b^3+c^3=3abc$.

প্রমাণ। $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$

$=0\times(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)=0.$

পক্ষান্তর করিয়া $a^3+b^3+c^3=3abc$.

(v) $a+b+c=0$ হইলে

$a^4+b^4+c^4=2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^2$.

প্রমাণ। $2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)-a^4-b^4-c^4$

$=(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$, [22 অনু.]

$=0\times(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=0.$

পক্ষান্তর করিয়া $a^4+b^4+c^4=2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)$

$=\frac{1}{2}\{(a^4+b^4+c^4)+2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)\}$

$=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^2.$

(vi) $a+b+c=0$ হইলে $a^5+b^5+c^5=5abc(bc+ca+ab)$.

প্রমাণ। $a+b+c=0$; পক্ষান্তর করিয়া $a+b=-c$.

অতএব $\quad (a+b)^5=(-c)^5=-c^5$,

অথবা $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5=-c^5$. [12 অনু.]

পক্ষান্তর করিয়া $a^5+b^5+c^5=-(5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4)$

$=-5ab(a^3+2a^2b+2ab^2+b^3)$

$=-5ab\{(a^3+b^3)+2ab(a+b)\}$

$=-5ab(a+b)\{(a^2-ab+b^2)+2ab\}$

$=-5ab(a+b)\{(a^2+2ab+b^2)-ab\}$

$=-5ab(a+b)\{(a+b)(a+b)-ab\}$

[যেহেতু $a+b=-c$] $\quad =-5ab(-c)\{(a+b)(-c)-ab\}$

$=5abc(-ac-bc-ab)$

$=-5abc(bc+ca+ab).$

[অন্য প্রকারে প্রমাণ]

(i) হইতে $a^2+b^2+c^2=-2(bc+ca+ab)$;

(iv) হইতে $a^3+b^3+c^3=3abc$;

অতএব $(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2)=-6abc(bc+ca+ab)$;

বামপক্ষ সরল করিয়া $a^5+b^5+c^5+b^2c^2(b+c)+c^2a^2(c+a)+a^2b^2(a+b)$
$=-6abc(bc+ca+ab)$;

অথবা $a^5+b^5+c^5+b^2c^2(-a)+c^2a^2(-b)+a^2b^2(-c)$
$=-6abc(bc+ca+ab)$, [$\because$ $b+c=-a$ ইত্যাদি]

অথবা $a^5+b^5+c^5-abc(bc+ca+ab)=-6abc(bc+ca+ab)$;

পক্ষান্তর করিয়া $a^5+b^5+c^5=-5abc(bc+ca+ab)$.

অনুসিদ্ধান্ত। $\dfrac{a^5+b^5+c^5}{5}=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}\times\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$.

প্রমাণ। $a^5+b^5+c^5=-5abc(bc+ca+ab)$

$$=-5.\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\times\{-\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\}$$

[(iv) এবং (i) হইতে]

$$=5.\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\times\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

$$\therefore\ \frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\times\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

উদাহরণ 1. $3s=x+y+z$ হইলে দেখাও যে,

(1) $(s-x)^3+(s-y)^3+(s-z)^3=3(s-x)(s-y)(s-z)$;

এবং (2) $(s-x)^2+(s-y)^2+(s-z)^2$
$=-2\{(s-y)(s-z)+(s-z)(s-x)+(s-x)(s-y)\}$.

$s-x$কে a, $s-y$কে b, $s-z$কে c ধরিয়া

$a+b+c=s-x+s-y+s-z=3s-(x+y+z)=3s-3s=0.$

(1) অতএব $a^3+b^3+c^3=3abc$;

এখন a, b, cএর মান বসাইলে

$(s-x)^3+(s-y)^3+(s-z)^3=3(s-x)(s-y)(s-z)$.

(2) যেহেতু $a+b+c=0$, $\therefore$ $a^2+b^2+c^2=-2(bc+ca+ab)$.

a, b, cএর মান বসাইলে $(s-x)^2+(s-y)^2+(s-z)^2$
$$=-2\{(s-y)(s-z)+(s-z)(s-x)+(s-x)(s-y)\}.$$

উদাহরণ 2. $X=ax+by+cz,\ Y=bx+cy+az,\ Z=cx+ay+bz$ এবং $a+b+c=0$ হইলে দেখাও যে, $X^3+Y^3+Z^3=3XYZ$.

$$X+Y+Z=(ax+by+cz)+(bx+cy+az)+(cx+ay+bz)$$
$$=(ax+bx+cx)+(ay+by+cy)+(az+bz+cz),$$
[x, y এবং z-অনুসারে সাজাইয়া]
$$=(a+b+c)x+(a+b+c)y+(a+b+c)z$$
$$=0.x+0.y+0.z=0.$$ [যেহেতু $a+b+c=0$]

$\therefore\ X^3+Y^3+Z^3=3XYZ.$ [53 পৃষ্ঠায় (iv)) দেখ]

উদাহরণ 3. দেখাও যে,
$$(y+z-2x)^3(y-z)+(z+x-2y)^3(z-x)+(x+y-2z)^3(x-y)=0.$$
$y+z-2x$কে a, $z+x-2y$কে b, $x+y-2z$কে c ধরিলে
$$a+b+c=(y+z-2x)+(z+x-2y)+(x+y-2z)=0.$$
$$b-c=(z+x-2y)-(x+y-2z)=3(z-y)=-3(y-z);$$
$$\therefore\ y-z=-\tfrac{1}{3}(b-c).$$

এইরূপে $z-x=-\frac{1}{3}(c-a)$ এবং $x-y=-\frac{1}{3}(a-b)$.

$\therefore$ বামপক্ষ $=-\frac{1}{3}\{a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)\}$
$$=\tfrac{1}{3}(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$$ [16 অনু.]
$$=\tfrac{1}{3}(b-c)(c-a)(a-b)\times 0=0.$$

উদাহরণ 4. প্রমাণ কর যে, $\dfrac{(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5}{5}$
$$=\frac{(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3}{3}\times\frac{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2}{2}.$$
$(y-z)$কে a, $(z-x)$কে b এবং $(x-y)$কে c লিখিলে
$$a+b+c=y-z+z-x+x-y=0;$$
$$\therefore\ \text{বামপক্ষ}=\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^3+b^3+c^2}{3}\times\frac{a^2+b^2+c^2}{2},$$
[54 পৃষ্ঠার অনুসিদ্ধান্ত দেখ]
$$=\frac{(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3}{3}\times\frac{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2}{2}.$$

উদাহরণ 5. $a+b+c+d=0$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$$a^3+b^3+c^3+d^3+3(b+c)(c+a)(a+b)=0.$$

$a+b+c+d=0$; পক্ষান্তর করিয়া $a+b+c=-d.$

$\therefore\ (a+b+c)^3=-(-d)^3=-d^3$;

অথবা $a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b)=-d^3$;

পক্ষান্তর করিয়া $a^3+b^3+c^3+d^3+3(b+c)(c+a)(a+b)=0.$

উদাহরণ 6. $a+b+c=1$ হইলে দেখাও যে,

$$(a+bc)(b+c)=(b+ca)(c+a)=(c+ab)(a+b)=(1-a)(1-b)(1-c).$$

$a+bc=a.1+bc=a(a+b+c)+bc=a^2+a(b+c)+bc$
$=(a+b)(a+c).$

অতএব $(a+bc)(b+c)=(a+b)(a+c)(b+c)=(b+c)(c+a)(a+b)$
$=(1-a)(1-b)(1-c)$, [$\because$ $b+c=1-a$, ইত্যাদি]

এইরূপে $(b+ca)(c+a)=(1-a)(1-b)(1-c)$;

এবং $(c+ab)(a+b)=(1-a)(1-b)(1-c)$;

অতএব $(a+bc)(b+c)=(b+ca)(c+a)=(c+ab)(a+b)$
$=(1-a)(1-b)(1-c).$

উদাহরণ 7. $yz+zx+xy=xyz$ হইলে দেখাও যে,

$$(y-zx)(z-xy)+(z-xy)(x-yz)+(x-yz)(y-zx)=4xyz.$$

বামপক্ষের প্রথম পদ $=yz-x(y^2+z^2)+x^2yz$
$=yz-x(y^2+z^2)+x.xyz$
$=yz-x(y^2+z^2)+x.(yz+zx+xy),$
[$\because$ $xyz=yz+zx+xy$]
$=yz-xy^2-xz^2+x^2y+x^2z+xyz$;

এইরূপে দ্বিতীয় পদ $=zx-yz^2-x^2y+y^2z+xy^2+xyz$;

এবং তৃতীয় পদ $=xy-x^2z-y^2z+yz^2+xz^2+xyz$;

যোগ করিয়া বামপক্ষ $=(yz+zx+xy)+3xyz$
$=xyz+3xyz$, [যেহেতু, $yz+zx+xy=xyz$]
$=4xyz.$

প্রশ্নমালা 17

দেখাও যে,

1. $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+a^3+b^3+c^3$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$$

2. $a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)+abc(a+b+c)$
$$=(a^2+b^2+c^2)(bc+ca+ab)$$

3. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-a^3-b^3-c^3+3abc$
$$=a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+9abc=(a+b+c)(bc+ca+ab)$$

4. $(b^2+bc+c^2)(pa+b-c)+(c^2+ca+a^2)(pb+c-a)$
$$+(a^2+ab+b^2)(pc+a-b)=p\{(b+c)(c+a)(a+b)+abc\}$$

5. $\{(ax+by)^2+(ay-bx)^2\}\{(ax-by)^2-(ay-bx)^2\}$
$$=(a^4-b^4)(x^4-y^4)$$

6. $(ax-by-cz)^2+(cy-bz)^2+(az+cx)^2+(bx+ay)^2$
$$=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$$

7. $\{(ac+bd)x+(ad-bc)y\}^2+\{(ac+bd)y-(ad-bc)x\}^2$
$$=(a^2+b^2)(c^2+d^2)(x^2+y^2)$$

8. $(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)-(a+bc)(b+ca)(c+ab)$
$$=(1+abc)(1-a^2-b^2-c^2-2abc)$$

9. $(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)+(a-bc)(b-ca)(c-ab)$
$$=(1-abc)(1-a^2-b^2-c^2+2abc)$$

10. $a+(1-a)b+(1-a)(1-b)c+(1-a)(1-b)(1-c)d$
$$=1-(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$$

11. $a+(1+a)b+(1+a)(1+b)c+(1+a)(1+b)(1+c)d$
$$=(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)-1$$

12. $8(a+b+c)^3-(b+c)^3-(c+a)^3-(a+b)^3$
$=3(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)$ [বো. প্র., 1881]

13. $x(y+z-x)^2+y(z+x-y)^2+z(x+y-z)^2$
$$+(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)=4xyz$$

14. $(ma+b+c)^3+(mb+c+a)^3+(mc+a+b)^3$
$$+3\{(m+1)(b+c)+2a\}\{(m+1)(c+a)+2b\}\{(m+1)(a+b)+2c\}$$
$$=(m+2)^3(a+b+c)^3$$

15. $(y+z-nx)^3+(z+x-ny)^3+(x+y-nz)^3-3(y+z-nx)\times$
$(z+x-ny)(x+y-nz)=(n+1)^2(2-n)(x^3+y^3+z^3-3xyz)$

16. $(a^2-bc)^3+(b^2-ca)^3+(c^2-ab)^3$
$-3(a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab)=(a^3+b^3+c^3-3abc)^2.$

[সঙ্কেত : (a^2-bc)কে x, b^2-caকে y, c^2-abকে z ধরিলে
$x^2-yz=a(a^3+b^3+c^3-3abc)$ ইত্যাদি ।]

17. $(by+az)^3+(bz+ax)^3+(bx+ay)^3-3(by+az)(bz+ax)\times$
$(bx+ay)=(a^3+b^3)(x^3+y^3+z^3-3xyz).$

18. $(ax+by+cz)^3+(bx+cy+az)^3+(cx+ay+bz)^3$
$-3(ax+by+cz)(bx+cy+az)(cx+ay+bz)$
$=(a^3+b^3+c^3-3abc)(x^3+y^3+z^3-3xyz).$

19. $a+b+c=0$ হইলে প্রমাণ কর যে,

(i) $2a^2+bc=(a-b)(a-c)$; $2b^2+ca=(b-c)(b-a)$;
$2c^2+ab=(c-a)(c-b)$

এবং $\dfrac{a^2}{2a^2+bc}+\dfrac{b^2}{2b^2+ca}+\dfrac{c^2}{2c^2+ab}=1$;

(ii) $b^2+c^2-a^2=-2bc$; $c^2+a^2-b^2=-2ca$;
$a^2+b^2-c^2=-2ab$

এবং $\dfrac{1}{b^2+c^2-a^2}+\dfrac{1}{c^2+a^2-b^2}+\dfrac{1}{a^2+b^2-c^2}=0.$

(iii) $b^2+bc+c^2=c^2+ca+a^2=a^2+ab+b^2$;

(iv) $2b-c)^3+(2c-a)^3+(2a-b)^3=3(2b-c)(2c-a)(2a-b)$;

(v) $(a^2+2bc)^3+(b^2+2ca)^3+(c^2+2ab)^3$
$=3(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)$;

(vi) $(b+c-a)^3+(c+a-b)^3+(a+b-c)^3$
$=3(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$;

(vii) $(bx-cy)^3+(cx-ay)^3+(ax-by)^3$
$=3(bx-cy))(cx-ay)(ax-by)$;

(viii) $(a^2-bc)^3+(b^2-ca)^3+(c^2-ab)^3$
$=3(a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab)$;

(ix) $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3=0$;

(x) $a^7+b^7+c^7=7abc(bc+ca+ab)^2$

এবং $\dfrac{a^7+b^7+c^7}{7}=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}\times\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)^2$

$$=\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\times\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

[সঙ্কেত : $a^5+b^5+c^5=-5abc(bc+ca+ab)$;

$a^2+b^2+c^2=-2(bc+ca+ab)$

গুণ করিয়া সরল কর। 53 এবং 54 পৃষ্ঠায় (vi) দেখ]

20. $\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}^2=2\{(b-c)^4+(c-a)^4+(a-b)^4\}$

21. $\{pb+qc-(p+q)a\}^3+\{pc+qa-(p+q)b\}^3$
$+\{pa+qb-(p+q)c\}^3$
$=3\{pb+qc-(p+q)a\}\{pc+qa-(p+q)b\}\{pa+qb-(p+q)c\}$.

22. $s=a+b+c$ হইলে দেখাও যে,

(i) $(as+bc)(bs+ca)(cs+ab)=(s-a)^2(s-b)^2(s-c)^2$;

(ii) $(s-2a)^3+(s-2b)^3+(s-2c)^3+24abc=s^3$

(iii) $s(s-2b)(s-2c)+s(s-2c)(s-2a)+s(s-2a)(s-2b)$
$=(s-2a)(s-2b)(s-2c)+8abc$.

23. $2s=a+b+c$ হইলে দেখাও যে,

(i) $(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3-3(s-a)(s-b)(s-c)$
$=\frac{1}{2}(a^3+b^3+c^3-3abc)$;

(ii) $(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3+3abc=s^3$

(iii) $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4=16s(s-a)(s-b)(s-c)$

(iv) $a(s-b)(s-c)+b(s-c)(s-a)+c(s-a)(s-b)$
$+2(s-a)(s-b)(s-c)=abc$.

24. $3s=a+b+c$ হইলে দেখাও যে,

(i) $(s-a)^4+(s-b)^4+(s-c)^4$
$=2(s-b)^2(s-c)^2+2(s-c)^2(s-a)^2+2(s-a)^2(s-b)^2$;

(ii) $\dfrac{(s-b)^2+(s-c)^2-(s-a)^2}{(s-b)(s-c)}$

$$=\frac{(s-c)^2+(s-a)^2-(s-b)^2}{(s-c)(s-a)}=\frac{(s-a)^2+(s-b)^2-(s-c)^2}{(s-a)(s-b)}$$

(iii) $\frac{1}{(s-b)(s-c)}+\frac{1}{(s-c)(s-a)}+\frac{1}{(s-a)(s-b)}=0.$

25. $a^2+b^2+c^2=bc+ca+ab$ হইলে দেখাও যে,

$$a^3+b^3+c^3=3abc.$$

26. $a+b+c=abc$ হইলে দেখাও যে,

$$a(1-b^2)(1-c^2)+b(1-c^2)(1-a^2)+c(1-a^2)(1-b^2)=4abc$$

27. $a+b+c=-abc$ হইলে দেখাও যে,

$$a(1+b^2)(1+c^2)+b(1+c^2)(1+a^2)+c(1+a^2)(1+b^2)=-4abc$$

28. $x=a(b-c)$, $y=b(c-a)$, $z=c(a-b)$ হইলে দেখাও যে,

$$\left(\frac{x}{a}\right)^3+\left(\frac{y}{b}\right)^3+\left(\frac{z}{c}\right)^3=\frac{3xyz}{abc}.$$ [ক. প্র., 1908]

29. $bc+ca+ab=0$ হইলে দেখাও যে,

$$\frac{1}{a^2-bc}+\frac{1}{b^2-ca}+\frac{1}{c^2-ab}=0.$$ [ক. প্র., 1906]

[সঙ্কেত : $a^2-bc=a^2+ca+ab=a(a+b+c)$, ইত্যাদি ।]

30. $a+b+c=0$ হইলে দেখাও যে,

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=0.$$

31. যদি $a+b+c=1$, $bc+cb+ab=\frac{1}{3}$ এবং $abc=\frac{1}{27}$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$\frac{1}{a+bc}+\frac{1}{b+ca}+\frac{1}{c+ab}=\frac{27}{4}.$$ [মা. প্র., 1878]

[সঙ্কেত : $a+bc=a.1+bc=a(a+b+c)+bc=(a+b)(a+c)$; ইত্যাদি ।]

32. $abc=1$ হইলে প্রমাণ কর যে,

(i) $(a+b-c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+(a+b)(b-c)(a-c)=1.$

(ii) $(a+bc)^2+(b+ca)^2+(c+ab)^2=(a+bc)(b+ca)(c+ab)+4.$

[সঙ্কেত : উভয় পক্ষকে সরল কর ।]

33. $a+b+c+d=0$ হইলে প্রমাণ কর যে, $(a+b)(a+c)(a+d)$

$$=(b+c)(b+d)(b+a)=(c+d)(c+a)(c+b)$$
$$=(d+a)(d+b)(d+c)=\tfrac{1}{3}(a^3+b^3+c^3+d^3).$$

[সঙ্কেত : দেখাও যে, অভেদের প্রত্যেক পক্ষ $-(b+c)(c+a)(a+b)$; 56 পৃষ্ঠার উদা. 5এর সমাধান দেখ ।]

34. $x+y+z=1$ হইলে দেখাও যে, $(x+yz)(y+zx)(z+xy)$
$=(y+z)^2(z+x)^2(x+y)^2=(1-x)^2(1-y)^2(1-z)^2$.

35. $yz+zx+xy=1$ হইলে দেখাও যে,

(i) $1+x^2=(x+y)(x+z)$ এবং $1-yz=x(y+z)$.

(ii) $(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)=(y+z)^2(z+x)^2(x+y)^2$.

(iii) $(1-yz)(1-zx)(1-xy)=xyz(y+z)(z+x)(x+y)$.

36. $x+y+z=xyz$ হইলে দেখাও যে,

(i) $(1+x)(1+y)(1+z)-(1-x)(1-y)(1-z)=4xyz$.

(ii) $x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)=4xyz$.

[সঙ্কেত : বামপক্ষকে সরল কর।]

37. $a=x^2+2yz,\ b=y^2+2zx,\ c=z^2+2xy$ হইলে প্রমাণ কর যে,

(i) $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)^2$

(ii) $a^3+b^3+c^3-3abc=(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2$.

প্রমাণ কর যে,

38. $\dfrac{(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3+(a^2-b^2)^3}{(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3}=(b+c)(c+a)(a+b)$

[মা. প্র., 1912]

39. $4\{(a-b)^2(a-c)^2+(b-c)^2(b-a)^2+(c-a)^2(c-b)^2\}$
$=\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}^2$

এবং $(a-b^2)(a-c)^2+(b-c)^2(b-a)^2+(c-a)^2(c-b)^2$
$=(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)^2$

40. $\dfrac{(b-c)^5+(c-a)^5+(a-b)^5}{5}$

$$=\frac{(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3}{3}\times\frac{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}{2}$$

41. $\left\{\dfrac{a^5(b-c)^5+b^5(c-a)^5+c^5(a-b)^5}{5}\right\}^2$

$$=\frac{a^7(b-c)^7+b^7(c-a)^7+c^7(a-b)^7}{7}$$
$$\times\frac{a^3(b-c)^3+b^3(c-a)^3+c^3(a-b)^3}{3}.$$

চতুর্থ অধ্যায়

দুরূহ গ. সা. গু. এবং ল. সা. গু.

(Harder H. C. F. and L. C. M.)

দুরূহ গ. সা. গু.

যে সকল রাশিকে সহজে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যায়, উহাদের গ.সা.গু.-নির্ণয়ের প্রণালী পূর্ব্বে (প্রথম খণ্ডের দ্বাদশ অধ্যায়ে) বিবৃত হইয়াছে। গুণনীয়ক-নির্ণয় সহজ না হইলে ভাগ প্রক্রিয়ার দ্বারা গ.সা.গু. নির্ণয় করা হয়। ইহা অনেকটা পাটীগণিতের প্রণালীর মত। নিম্নে গ.সা.গু.-নির্ণয়ের এই নিয়মটি এবং ইহার যুক্তি প্রদত্ত হইল।

31. দুইটি বীজগণিতীয় রাশিমালার গ.সা.গু. -নির্ণয়ের নিয়ম।

নিয়ম (1). প্রদত্ত রাশিমালাগুলিতে কোন সরল গুণনীয়ক (Monomial factors) না থাকিলে

প্রথমে রাশিমালাদ্বয়কে উহাদের অন্তর্গত কোন অক্ষরের ঘাতের একই ক্রম-অনুসারে সাজাও।

রাশিমালাদ্বয়ের মধ্যে যেটির মান (degree) বৃহত্তর, উহাকে অপরটির দ্বারা ভাগ কর। যদি উভয় রাশিমালার মান সমান হয়, তাহা হইলে উহাদের যে-কোন একটিকে অপরটির দ্বারা ভাগ কর।

যদি কোন ভাগশেষ থাকে, তবে উহা দ্বারা পূর্ব্ববর্ত্তী ভাজককে ভাগ কর এবং ভাগশেষ থাকা পর্য্যন্ত এরূপ করিতে থাক। সর্ব্বশেষ ভাজকই নির্ণেয় গ. সা. গু.।

বিশেষ দ্রষ্টব্য। (i) কোন ভাগশেষকে ভাজকরূপে ব্যবহার করিবার পূর্ব্বে ভাগকার্য্যের সুবিধার জন্য উহার যাবতীয় সরল গুণনীয়ক পরিত্যাগ করিবে এবং ভাগশেষটির প্রথম পদে ঋণচিহ্ন থাকিলে উহাকে -1 দ্বারা ভাগ করিয়া লইবে, অর্থাৎ উহার সকল পদেরই চিহ্ন-পরিবর্ত্তন করিয়া লইবে।

(ii) ভাগের কার্য্যে যাহাতে ভগ্নাংশ না আসে, তজ্জন্য ভাজ্যকে ভাগকার্য্যের যে-কোন অবস্থাতে সুবিধাজনক পাটীগণিতীয় সংখ্যা দ্বারা গুণ করিয়া লইবে।

লক্ষ্য কর যে, এইরূপ করিলে নির্ণেয় গ. সা. গু.এর কোন পরিবর্তন হইবে না ; কারণ, ধরিয়া লওয়া হইয়াছে যে, প্রদত্ত রাশিমালাদ্বয়ের কোন সরল গুণনীয়ক নাই, কাজেই উহাদের গ. সা. গু.র মধ্যেও কোন সরল গুণনীয়ক থাকিতে পারে না।

নিয়ম (2). প্রদত্ত রাশিগুলির কোন সরল গুণনীয়ক থাকিলে উহাদিগকে প্রথমে বাহির করিয়া লও এবং পূর্ব্বোক্ত নিয়ম দ্বারা অবশিষ্ট অংশগুলির গ. সা. গু. নির্ণয় কর। অপসারিত সরল গুণনীয়কগুলিরও গ. সা. গু. নির্ণয় কর, এই গ. সা. গু. দ্বয়ের গুণফলই হইবে নির্ণেয় গ. সা. গু.।

এই নিয়মগুলির প্রমাণ পরবর্ত্তী 33 অনুচ্ছেদে প্রদত্ত হইল।

উদাহরণ 1. x^2+3x+2 এবং $2x^3+11x^2+13x+5$এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$
\begin{array}{l}
x^2+3x+2)3x^3+11x^2+13x+5(3x+2\\
\qquad\qquad\quad 3x^3+\ 9x^2+\ 6x\\
\qquad\qquad\qquad\qquad 2x^2+\ 7x+5\\
\qquad\qquad\qquad\qquad 2x^2+\ 6x+4\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x+1)x^2+3x+2(x+2\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x^2+x\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 2x+2\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 2x+2
\end{array}
$$

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু. $=x+1$.

উদাহরণ 2. $3x^3-5x^2+5x-2$ এবং $2x^4-2x^3+3x^2-x+1$এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর। [ক. প্র., 1893]

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\qquad 2x^4-2x^3+3x^2-x+1\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 3 \quad [\text{3 দ্বারা গুণ করিয়া}]\\
3x^3-5x^2+5x-2)\,6x^4-\ 6x^3+\ 9x^2-3x+3\,(2x\\
\qquad\qquad\qquad\qquad 6x^4-10x^3+10x^2-4x\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 4x^3-x^2+x+3\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 3 \quad [\text{3 দ্বারা গুণ করিয়া}]\\
\qquad\qquad\qquad\qquad 12x^3-\ 3x^2+\ 3x+9\,(4\\
\qquad\qquad\qquad\qquad 12x^3-20x^2+20x-8\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 17)17x^2-17x+17 \quad [\text{17 দ্বারা ভাগ করিয়া}]\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x^2-x+1
\end{array}
$$

$$\begin{array}{r|l}
x^2-x+1 & 3x^3-5x^2+5x-2 \;(3x-2 \\
 & 3x^3-3x^2+3x \\ \hline
 & -2x^2+2x-2 \\
 & -2x^2+2x-2 \\ \hline
\end{array}$$

অতএব নির্ণেয় গ. সা. গু. $=x^2-x+1$.

সম্পূর্ণ প্রক্রিয়াটি নিম্নলিখিতরূপে সংক্ষেপে লিখা হয় :

$$\begin{array}{r|l|r|l}
3x & 3x^3-5x^2+5x-2 & 2x^4-2x^3+3x^2-\;\;x\;+\;\;1 & \\
 & 3x^3-3x^2+3x & 3 & \\ \hline
-2 & -2x^2+2x-2 & 6x^4-\;6x^3+\;9x^2-3x+\;\;3 & 2x \\
 & -2x^2+2x-2 & 6x^4-10x^3+10x^2-4x\;\;\;\;\; & \\ \hline
 & & 4x^3-x^2\;\;+\;x+\;\;3 & \\
 & & 3 & \\ \hline
 & & 12x^3-\;3x^2+\;3x+\;\;9 & 4 \\
 & & 12x^2-20x^2+20x-\;\;8 & \\ \hline
 & & 17\;|\;17x^2-17x+\;17 & \\ \hline
 & & x^2-\;\;x+\;\;1 & \\
\end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $=x^2-x+1$.

দ্রষ্টব্য। বিচ্ছিন্ন সহগ প্রক্রিয়া দ্বারা ভাগ করিলে প্রক্রিয়াটি আরও সংক্ষিপ্ত হয়।

উদাহরণ 3. $12x^5y-6x^4y^2-76x^3y^3+24x^2y^4$ এবং $36x^4y^2+18x^3y^3-30x^2y^4+6xy^5$এর গ. সা. গু. স্থির কর।

এস্থলে প্রদত্ত রাশিমালাদ্বয়ের সরল গুণনীয়ক আছে। অতএব, নিয়ম (2) প্রয়োগে ইহাদের গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে।

সরল গুণনীয়কগুলি বাহির করিয়া লইলে

$$12x^5y-60x^4y^2-76x^3y^3+24x^2y^4$$
$$=4x^2y(3x^3-15x^2y-19xy^2+6y^3)\;;$$

এবং $$36x^4y^2+18x^3y^3-30x^2y^4+6xy^5$$
$$=6xy^2(6x^3+3x^2y-5xy^2+y^3).$$

$4x^2y$ এবং $6xy^2$এর গ. সা. গু. $=2xy$.

এখন নিয়ম (1) দ্বারা $3x^3-15x^2y-19xy^2+6y^3$ এবং $6x^3+3x^2y-5xy^2+y^3$এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

$$
\begin{array}{r|l|l}
3x^3-15x^2y-19xy^2+6y^3 & 6x^3+3x^2y-5xy^2+y^3 & 2 \\
 & \underline{6x^3-30x^2y-38xy^2+12y^3} & \\
 & 11y)\ \underline{33x^2y+33xy^2-11y^3} & \\
 & \quad 3x^2+3xy-y^2 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l|l}
3x^2+3xy-y^2 & 3x^3-15x^2y-19xy^2+6y^3 & x-6y \\
 & \underline{3x^3+3x^2y-xy^2} & \\
 & -18x^2y-18xy^2+6y^3 & \\
 & \underline{-18x^2y-18xy^2+6y^3} &
\end{array}
$$

অতএব, $3x^3-15x^2y-19xy^2+6y^3$ এবং $6x^3+3x^2y-5xy^2+y^3$ এর গ. সা. গু. $=3x^2+3xy-y^2 \cdots (2)$

$\therefore$ (1) এবং (2) হইতে গুণ দ্বারা, নির্ণেয় গ. সা. গু. $=2xy(3x^2+3xy-y^2)$.

প্রশ্নমালা 18

নিয়ম (1) দ্বারা গ. সা. গু. নির্ণয় কর :—

1. x^2+5x+6 এবং $2x^3+11x^2+18x+8$এর
2. $2x^2-7x+6$ এবং $4x^3-16x^2+21x-9$এর
3. $4x^2-5x-6$ এবং $8x^3-6x^2-13x-3$এর
4. $2x^3+3x^2+2x+1$ এবং $6x^4+11x^3+11x^2+6x+2$এর
5. $2x^3-x^2-19x-10$ এবং $4x^4-10x^3-33x^2+53x+38$এর
6. $3x^3-15x^2-19x+6$ এবং $6x^3+3x^2-5x+1$এর
7. $6x^3+7x^2-x-2$ এবং $6x^4+19x^3+17x^2-2x-6$এর
8. $2x^3-3x^2y-6xy^2-2y^3$ এবং $6x^4-16x^3y-6x^2y^2+12xy^3+4y^4$এর
9. $x^3+6x^2+2x-15$ এবং $x^3+5x^2-2x-10$এর
10. $3x^3+17x^2-62x+14$ এবং $7x^3+52x^2-46x+8$এর [ক. প্র., 1911]
11. $7-10x-11x^2+6x^3$ এবং $14+x+4x^2-3x^3$এর
12. $210a^3+631a^2+181a-210$ এবং $210a^3-239a^2-631a-210$এর

13. $2x^3-7x^2-46x-21$ এবং $2x^4+11x^3-13x^2-99x-45$এর

[ঢা. প্র., 1927]

14. $2x^4-3x^3-3x^2+4$ এবং $2x^4-x^3-9x^2+4x+4$এর

[পাট. প্র., 1926]

15. $8x^4+3x+10$ এবং $10x^4+3x^3+8$এর [পাট. প্র., 1927]

16. $3x^5-5x^3+2$ এবং $2x^5-5x^2+3$এর

17. $3a^5+33a^3b^2+162b^5$ এবং $5a^5+55ab^4-60b^5$এর

18. $6a^5y^5+8a^4y^4-79a^3y^3-36a^2y^2+105ay+36$ এবং
$2a^5y^5-2a^4y^4-31a^3y^3+51a^2y^2+42ay-72$এর

19. $a^6+29a^5+54a^4+a+27$ এবং $a^5+27a^4+3a^2+83a+54$এর

20. $ax^2+(a+b)x+b$ এবং $ax^3+(2a+b)x^2+2(a+b)x+2b$এর

21. $ax^3+(a+b)x^2+(b+c)x+c$ এবং
$ax^4+(2a+b)x^3+(2a+2b+c)x^2+2(b+c)x+2c$এর

22. $ax^4+(a+2h)x^3y+(a+b+2h)x^2y^2+(2h+b)xy^3+by^4$
এবং $aa'x^4+2(ha'+h'a)x^3y+(ab'+a'b+4hh')x^2y^2$
$+2(hb'+h'b)xy^3+bb'y^4$এর

নিয়ম (2) দ্বারা গ. সা. গু. নির্ণয় কর :—

23. $2x^3-4x^2-6x$ এবং $3x^5-6x^4-6x^3-9x^2$এর

24. $12x^4-44x^3-16x^2$ এবং $36x^4-150x^3+18x$এর

25. $24x^4-2x^3-60x^2-32x$ এবং $18x^4-6x^3-39x^2-18x$এর

[এ. প্র., 1929]

26. $18x^4+21x^3+15x^2+6x$ এবং $4x^5-18x^4-8x^3-10x^2$এর

27. $6x^6y^2-24x^5y^3+42x^4y^4-36x^3y^5$ এবং
$8x^5y^3-28x^4y^4+8x^3y^5+32x^2y^6$ এর

28. $a^5-a^4b-ab^4+b^5$ এবং $a^4-a^3b-a^2b^2+ab^3$এর

29. $30a^5b^2+136a^4b^3+95a^3b^4-79a^2b^5-65ab^6$ এবং
$6a^6b+26a^5b^2+15a^4b^3-16a^3b^4-10a^2b^5$এর

30. $10x^7y^4-1150x^4y^7+240x^3y^8$ এবং
$120x^6y^5-575x^5y^6+5x^2y^9$এর

31. $4x^6y+8x^5y^2+12x^4y^3+8x^3y^4+4x^2y^5$ এবং
$12x^6y^2+30x^5y^3+12x^4y^4+6x^3y^5-12x^2y^6+6xy^7$এর ।

32. প্রমাণ করা যায় যে, দুইটি রাশির যে-কোন সাধারণ গুণনীয়ক রাশিদ্বয়ের যে-কোন গুণিতকের সমষ্টি বা অন্তরেরও গুণনীয়ক।

মনে কর, a, X এবং Y রাশিদ্বয়ের কোন সাধারণ গুণনীয়ক; এবং $X=ax$, $Y=ay$; মনে কর, pX, Xএর এবং qY, Yএর কোন গুণিতক।

$\therefore\ pX+qY=pax+qay=(px+qy)a$;

এবং $pX-qY=pax-qay=(px-qy)a$.

স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, a, $pX+qY$ এর এবং $pX-qY$এর গুণনীয়ক।

33. 31 অণুচ্ছেদোক্ত নিয়ম 1 এবং নিয়ম 2এর প্রমাণ নিম্নে প্রদত্ত হইল:

```
B) A (p
   pB
   ---
   m)C
     D) nB ( q
        qD
        ---
        E )D ( r
           rE
           ---
```

নিয়ম 1এর প্রমাণ। মনে কর, A এবং B দুইটি রাশিমালা, ইহাদের মধ্যে কোন সরল গুণনীয়ক নাই এবং Aএর মান Bএর মান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর নহে। মনে কর, Aকে B দ্বারা ভাগ করাতে p ভাগফল এবং C অবশিষ্ট থাকিল। C হইতে সরল গুণনীয়ক m বাহির করিয়া লইয়া D পাওয়া গেল এবং Bকে সরল গুণনীয়ক n দ্বারা গুণ করিয়া লব্ধ গুণফল nBকে D দ্বারা ভাগ করাতে q ভাগফল এবং E ভাগশেষ থাকিল। সর্ব্বশেষে E দ্বারা Dকে ভাগ করাতে r ভাগফল হইল এবং কোন ভাগশেষ থাকিল না। সম্পূর্ণ প্রক্রিয়াটি পার্শ্বে প্রদর্শিত হইল। এখন প্রমাণিত হইবে যে, Eই A এবং Bএর গ. সা. গু.।

উপরে প্রদর্শিত প্রক্রিয়া হইতে স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, (যেহেতু ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ), অতএব $D=rE$;

$$nB=qD+E=qrE+E=(qr+1)E;\quad \therefore\quad B=\frac{qr+1}{n}E.... \quad (1)$$

$$A=pB+C=pB+mD=p\frac{(qr+1)}{n}E+mrE$$

$$=\left\{\frac{p(qr+1)}{n}+mr\right\}E. \quad \cdots \quad (2)$$

(1) এবং (2) হইতে দেখা যাইতেছে, E, A এবং Bএর একটি সাধারণ গুণনীয়ক। এখন, প্রমাণিত হইবে যে, E উহাদের গ. সা. গু.।

যেহেতু, ভাগশেষ = ভাজ্য − ভাজক × ভাগফল,

$$\text{অতএব}\quad mD=C=A-pB\,;\quad \therefore\quad D=\frac{A-pB}{m} \qquad \cdots (3)$$

$$\text{এবং}\ E=nB-qD=nB-\frac{q}{m}(A-pB)=\left(n+\frac{pq}{m}\right)B-\frac{q}{m}A. \cdots (4)$$

(4) হইতে স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, A এবং Bএর যে-কোন সাধারণ গুণনীয়ক Eএরও গুণনীয়ক [32 অনু.]; অতএব A এবং Bএর গ. সা. গু.ও Eএর গুণনীয়ক ; কাজেই A এবং Bএর গ. সা. গু. হয় E, না হয় E অপেক্ষা নিম্নতর মানবিশিষ্ট হইবে। কিন্তু পূর্ব্বেই প্রমাণিত হইয়াছে যে, E, A এবং Bএর একটি সাধারণ গুণনীয়ক। সুতরাং A এবং Bএর গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক অর্থাৎ গ. সা. গু. E অপেক্ষা নিম্নতর মানের হইতে পারে না।

অতএব E-ই A এবং Bএর গ. সা. গু.।

নিয়ম 2এর প্রমাণ। মনে কর, প্রদত্ত রাশিমালা A এবং Bএর সরল গুণনীয়ক আছে ; a, Aর যাবতীয় সরল গুণনীয়কের গুণফল ; b, Bর যাবতীয় সরল গুণনীয়কের গুণফল এবং $A=aX$, $B=bY$; X এবং Y রাশিমালাদ্বয়ের কোন সরল গুণনীয়ক নাই বলিয়া নিয়ম 1 দ্বারা উহাদের গ. সা. গু. নির্ণয় করা যায়।

এখন, যেহেতু a এবং bএর যে-কোন সাধারণ গুণনীয়ক A এবং Bএরও সাধারণ গুণনীয়ক হইবে এবং X, Yএর যে-কোন সাধারণ গুণনীয়কও A এবং Bএর সাধারণ গুণনীয়ক হইবে, অতএব

A এবং Bএর গ. সা. গু. $=a$ এবং bএর গ. সা. গু. $\times X$ এবং Yএর গ. সা. গু.।

34. গ. সা. গু.-নির্ণয়ের বিকল্প-প্রণালী (Alternative method)।
দুইটি রাশিমালার কোন সাধারণ সরল গুণনীয়ক (Common Monomial factor) না থাকিলে উহাদের গ. সা. গু. নিম্নপ্রদর্শিত প্রণালীতে অপেক্ষাকৃত সহজে নির্ণয় করা যায়। এই প্রণালীতে রাশিমালাদ্বয়কে উহাদের অন্তর্গত কোন সাধারণ অক্ষরের ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া প্রথমে উহাদের উক্ত অক্ষরের উচ্চতম মাত্রাবিশিষ্ট পদদ্বয় এবং পরে নিম্নতম মাত্রাবিশিষ্ট পদদ্বয় অপসারিত করা হয়। এই প্রক্রিয়া দ্বারা দুইটি নিম্নতর মাত্রাবিশিষ্ট রাশিমালা পাওয়া যায়। উহাদের যাবতীয় সরল গুণনীয়ক পরিত্যাগ করিয়া অবশিষ্ট অংশ দুইটির গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হয়। প্রমাণ করিতে পারা যায় যে, এই গ. সা. গু.ই নির্ণেয় গ. সা. গু.। লব্ধ রাশিমালাদ্বয় নিম্নতর মাত্রা-বিশিষ্ট হওয়াতে শেষোক্ত গ. সা. গু. নির্ণয় অপেক্ষাকৃত সহজ এবং উল্লিখিত প্রণালীর পুনঃপ্রয়োগ দ্বারা উহাকে আরও সহজ করা যায় ; এইরূপে প্রণালীটি পুনঃ-

পুনঃ ব্যবহার করিয়া জটিল রাশিমালাসমূহের গ. সা. গু.ও অতি সহজে নির্ণয় করা যায়। নিম্ন-প্রদত্ত উপপাদ্যের দ্বারা প্রণালীটি প্রমাণিত হইবে।

উপপাদ্য। যদি চারিটি সংখ্যা a, b, c, d এইরূপ হয় যে, $ad-bc$ শূন্য নহে, তাহা হইলে দুইটি রাশিমালা A এবং Bএর গ. সা. গু.

$= aA+bB$ এবং $cA+dB$এর গ. সা. গু.।

প্রমাণ। মনে কর, $C=aA+bB$; ... (1)

$D=cA+dB.$ ... (2)

(1) এবং (2) হইতে দেখা যাইতেছে যে, A এবং Bএর যে-কোন সাধারণ গুণনীয়ক C এবং D উভয়ের গুণনীয়ক (32 অনু.) অর্থাৎ C এবং Dএর সাধারণ গুণনীয়ক হইবে। এখন (1)কে c দ্বারা, (2)কে a দ্বারা গুণ করিলে

$cC=acA+bcB$ ... (3)

$aD=acA+adB$ ... (4)

(4) হইতে (3) বিয়োগ করিলে $(aD-cC)=(ad-bc)B.$ ... (5)

এইরূপ (1)কে d এবং (2)কে b দ্বারা গুণ করিয়া বিয়োগ করিলে

$dC-bD=(ad-bc)A.$ ... (6)

(5) এবং (6) হইতে দেখা যাইতেছে যে, C এবং Dএর যে-কোন সাধারণ গুণনীয়ক $(ad-bc)A$ এবং $(ad-bc)B$এরও সাধারণ গুণনীয়ক, অর্থাৎ A এবং Bএরও সাধারণ গুণনীয়ক, [যেহেতু $ad-bc$ সংখ্যাত্মক]; কিন্তু পূর্ব্বেই প্রমাণিত হইয়াছে যে, A এবং Bএর যে-কোন সাধারণ গুণনীয়ক C এবং Dএরও সাধারণ গুণনীয়ক। অতএব, A এবং Bএর যাবতীয় সাধারণ গুণনীয়ক C এবং Dএর যাবতীয় সাধারণ গুণনীয়ক। সুতরাং, A এবং Bএর গ. সা. গু. $=C$ এবং Dএর গ. সা. গু., অর্থাৎ $aA+bB$ এবং $cA+dB$এর গ. সা. গু.।

এখন, a, b, c, dকে যদি এইরূপ মান দেওয়া হয়, যেন $aA+bB$এর উচ্চতম মাত্রাবিশিষ্ট পদ এবং $cA+dB$এর নিম্নতম মাত্রাবিশিষ্ট পদ অপসারিত হয়, তাহা হইলে লব্ধ রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. A এবং Bএর গ. সা. গু. এর সমান হইবে।

অতএব প্রণালীটি প্রমাণিত হইল।

বিশেষ দ্রষ্টব্য 1. a, b, c, dএর নিম্নলিখিত বিশেষ মানগুলিও প্রণিধান-যোগ্য। উপরের (1)এ

(i) $a=1, b=1, c=1, d=-1$ বসাইলে পাওয়া যায় যে,

A এবং Bএর গ. সা. গু. $=A+B$ এবং $A-B$এর গ. সা. গু.।

(ii) $a=1, b=0$ বসাইলে পাওয়া যায় যে,

A এবং Bএর গ. সা. গু. $=A$ এবং $cA+dB$এর গ. সা. গু.।

(iii) $c=0, d=1$ বসাইলে পাওয়া যায় যে,

A এবং Bএর গ. সা. গু. $=aA+bB$ এবং Bএর গ. সা. গু.।

বিশেষ দ্রষ্টব্য 2. যে-কোন স্থলে লব্ধ রাশিমালা হইতে যাবতীয় সরল গুণনীয়ক অপসারিত করা যায় ; কারণ, ধরা হইয়াছে যে, প্রদত্ত রাশিমালাদ্বয়ের কোন সরল সাধারণ গুণনীয়ক নাই। অতএব উহাদের গ. সা. গু.তেও কোন সরল গুণনীয়ক থাকিতে পারে না।

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি হইতে প্রণালীটির প্রয়োগ বুঝা যাইবে।

উদাহরণ 1. $a^3-3a^2-4a+12$ এবং a^3-4a^2+a+6, রাশিমালা দুইটির গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

মনে কর, $A=a^3-3a^2-4a+12$;

এবং $B=a^3-4a^2+a+6.$

অতএব $A-B=(a^3-3a^2-4a+12)-(a^3-4a^2+a+6)$

$=a^2-5a+6.$

আবার $A-2B=a^3-3a^2-4a+12-2(a^3-4a^2+a+6)$

$=-a^3+5a^2-6a=-a(a^2-5a+6).$ ... (1)

উপরের উপপাদ্য অনুসারে A এবং Bএর গ. সা. গু.

$=A-B$ এবং $A-2B$এর গ. সা. গু.

$=a^2-5a+6$ এবং (a^2-5a+6)এর গ. সা. গু., [সরল গুণনীয়ক পরিত্যাগ করিয়া]

$=a^2-5a+6.$

উদাহরণ 2. $20x^4+x^2-1$ এবং $25x^4+5x^3-x-1$এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

মনে কর, $A=20x^4+x^2-1$;

এবং $B=25x^4+5x^3-x-1.$

অতএব, $5A-4B=5(20x^4+x^2-1)-4(25x^4+5x^3-x-1)$

$=-20x^3+5x^2+4x-1=-(20x^3-5x^2-4x+1).$

এবং $A-B=(20x^4+x^2-1)-(25x^4+5x^3-x-1)$

$=-5x^4-5x^3+x^2+x=-x(5x^3+5x^2-x-1).$

অতএব, A এবং Bএর গ. সা. গু. $5A-4B$ এবং $A-B$এর গ. সা. গু. $=20x^3-5x^2-4x+1$ এবং $5x^3+5x^2-x-1$এর গ. সা. গু., [সরল গুণনীয়ক পরিত্যাগ করিয়া]

এখন মনে কর, $A'=20x^3-5x^2-4x+1$;

এবং $B'=5x^3+5x^2-x-1$.

অতএব, A এবং Bএর গ. সা.গু. $=A'$ এবং B'এর গ. সা. গু. ... (1)

এখন, $A'-4B'=(20x^3-5x^2-4x+1)-4(5x^3+5x^2-x-1)$
$=-25x^2+5=-5(5x^2-1)$.

এবং $A'+B'=(20x^3-5x^2-4x+1)+(5x^3+5x^2-x-1)$
$=25x^3-5x=5x(5x^2-1)$.

উপরের উপপাদ্য অনুসারে A' এবং B'এর গ. সা. গু. $=A'-4B'$ এবং $A'+B'$ এর গ. সা. গু. $=(5x^2-1)$এবং$(5x^2-1)$এর গ. সা. গু., [সরল গুণনীয়ক পরিত্যাগ করিয়া] $=5x^2-1$.

অতএব (1) হইতে A এবং Bএর গ. সা. গু. $=A'$ এবং B'এর গ. সা. গু.
$=5x^2-1$.

উদাহরণ 3. $6a^5-4a^4-11a^3-3a^2-3a-1$ এবং $4a^4+2a^3-18a^2+3a-5$এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

মনে কর, $A=6a^5-4a^4-11a^3-3a^2-3a-1$.

এবং $B=4a^4+2a^3-18a^2+3a-5$.

অতএব, $5A-B=5(6a^5-4a^4-11a^3-3a^2-3a-1)$
$-(4a^4+2a^3-18a^2+3a-5)$
$=30a^5-24a^4-57a^3+3a^2-18a$
$=3a(10a^4-8a^3-19a^2+a-6)$.

A এবং Bএর গ. সা. গু. $=(5A-B)$ এবং Bএর গ. সা. গু.,
[70 পৃষ্ঠায় বিশেষ দ্রষ্টব্য 1এর (iii) দেখ]

[সরল গুণনীয়ক বাদ দিয়া] $=10a^4-8a^3-19a^2+a-6$ এবং Bএর গ.সা.গু.

মনে কর, $A'=10a^4-8a^3-19a^2+a-6$.

তাহা হইলে A এবং Bএর গ. সা. গু. $=A'$ এবং Bএর গ. সা. গু. ...(1)

এখন, $2A'-5B$

$=2(10a^4-8a^3-19a^2+a-6)-5(4a^4+2a^3-18a^2+3a-5)$

$=-26a^3+52a^2-13a+13=-13(2a^3-4a^2+a-1)$;

এবং $5A'-6B=5(10a^4-8a^3-19a^2+a-6)$

$-6(4a^4+2a^3-18a^2+3a-5)$

$=26a^4-52a^3+13a^2-13a=13a(2a^3-4a^2+a-1)$.

অতএব, A' এবং Bএর গ. সা. গু.

$=(2A'-5B)$ এবং $(5A'-6B)$এর গ. সা. গু.

$=(2a^3-4a^2+a-1)$ এবং $(2a^3-4a^2+a-1)$এর গ. সা. গু.

[সরল গুণনীয়ক পরিত্যাগ করিয়া]

$=2a^3-4a^2+a-1$.

অতএব (i) হইতে A এবং Bএর গ. সা. গু. $=2a^3-4a^2+a-1$.

প্রশ্নমালা 19

34 অণুচ্ছেদোক্ত প্রণালীতে গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. $2x^3-x^2+x+1$ এবং $2x^3-3x^2+3x-1$এর
2. $3x^3+8x^2+13x+6$ এবং $3x^3+10x^2+17x+12$এর
3. $4x^4+2x^3+8x^2+x+3$ এবং $6x^4+3x^3+5x^2-2x-6$এর
4. $12x^5-8x^4+4x^3+9x^2-6x+3$ এবং $3x^5-2x^4+x^3+15x^2-10x+5$এর
5. $x^4-115x+24$ এবং $24x^4-115x^3+1$এর [ক. প্র., 1907]
6. $3x^4+15x^3+5x^2+10x+2$ এবং $2x^4+9x^3+14x+3$ এর [ঢা. প্র., 1926]
7. $2x^5-11x^2-9$ এবং $4x^5+11x^4+81$এর [পা. প্র., 1923]
8. $x^4+28x^3+277x^2+1134x+1584$ এবং $x^4+38x^3+539x^2+3382x+7920$এর
9. $2x^3+3x^2+2x-2$ এবং $4x^4-2x^3+2x-1$এর [ক. প্র., 1876]
10. $a^4-pa^3-p^2a^2-p^3a-2p^4$ এবং $3a^3-7pa^2+3p^2a-2p^3$এর [বো. প্র., 1861]
11. $x^5-2x^4-2x^3+8x^2-7x+2$ এবং x^4-4x+3এর [ঢা.প্র., 1925]
12. x^5+x^4+1 এবং $x^6-2x^4+x^2-1$এর। [ক. প্র., 1890]

35. তিন বা তদধিক রাশিমালার গ. সা. গু.-নির্ণয়ের নিয়ম ঃ

যে-কোন দুইটি রাশিমালার গ. সা. গু. নির্ণয় কর। এখন লব্ধ গ. সা. গু. এবং তৃতীয় রাশিমালার গ. সা. গু. নির্ণয় কর, ইত্যাদি। সর্ব্বশেষ গ. সা. গু.ই নির্ণেয় গ. সা. গু.।

মনে কর, A, B, C তিনটি রাশিমালা এবং ইহাদের গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে। মনে কর, A এবং Bএর গ. সা. গু. $=H$, H এবং Cএর গ. সা. গু. $=H'$; প্রমাণ করিতে হইবে যে, H'ই A, B এবং Cএর গ. সা. গু.।

প্রমাণ। মনে কর, A এবং Bকে H দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল যথাক্রমে a এবং b হয়। তাহা হইলে $A=aH, B=bH$; H, A এবং Bর গ. সা. গু. বলিয়া a এবং bএর কোন সাধারণ গুণনীয়ক থাকিতে পারে না।

এখন, মনে কর, $H=cH'$ এবং $C=dH'$; অতএব, c এবং dএরও কোন সাধারণ গুণনীয়ক নাই।

যেহেতু,
$$A=aH=acH';$$
$$B=bH=bcH';$$
$$C=dH';$$

স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, H' হইতেছে A, B এবং Cএর সাধারণ গুণনীয়ক। আবার, যেহেতু ac এবং bcএর সাধারণ গুণনীয়ক c হইলেও c এবং dএর কোন সাধারণ গুণনীয়ক নাই, কাজেই H' A, B এবং Cএর গ. সা. গু.।

রাশিমালার সংখ্যা তিনের অধিক হইলেও উল্লিখিত যুক্তি প্রয়োগ করা যায়।

উদাহরণ। x^3+2x^2-5x-6, $x^3+4x^2-7x-10$ এবং $x^4+4x^3-12x-9$এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথমে সর্ব্বাপেক্ষা ক্ষুদ্র মান-(degree)-বিশিষ্ট রাশিমালাদ্বয়ের গ. সা. গু. নির্ণয় করা যুক্তিযুক্ত। এস্থলে প্রথম দুইটি রাশিমালার গ. সা. গু. প্রথমে নির্ণয় কর।

$$x^3+2x^2-5x-6)\,x^3+4x^2-7x-10\,(1$$
$$\underline{x^3+2x^2-5x-6}$$
$$2)\,2x^2-2x-4$$
$$x^2-x-2)\,x^3+2x^2-5x-6\,(x+3$$
$$\underline{x^3-x^2-2x}$$
$$3x^2-3x-6$$
$$\underline{3x^2-3x-6}$$

অতএব প্রথম দুইটি রাশিমালার গ. সা. গু. $= x^2 - x - 2$; এখন $x^2 - x - 2$ এবং $x^4 + 4x^3 - 12x - 9$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$
\begin{array}{r|l|l}
x^2 - x - 2 & x^4 + 4x^3 - 12x - 9 & x^2 + 5x + 7 \\
 & x^4 - x^3 - 2x^2 & \\
\hline
 & 5x^3 + 2x^2 - 12x - 9 & \\
 & 5x^3 - 5x^2 - 10x & \\
\hline
 & 7x^2 - 2x - 9 & \\
 & 7x^2 - 7x - 14 & \\
\hline
 & 5)\,5x + 5 & \\
 & x + 1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l|l}
x + 1 & x^2 - x - 2 & x - 2 \\
 & x^2 + x & \\
\hline
 & -2x - 2 & \\
 & -2x - 2 & \\
\hline
\end{array}
$$

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু. $= x + 1$.

প্রশ্নমালা 20

গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. $x^3 - 3x - 2$, $x^3 - 7x + 6$ এবং $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$এর [বো. প্র., 1924]

2. $x^3 - 3x^2 + 4$, $x^3 - 4x^2 + 6x - 4$ এবং $x^3 - x^2 - x - 2$এর

3. $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$, $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ এবং $x^3 - x^2 - 4x - 2$এর

4. $3x^3 + 4x^2y + 4xy^2 + y^3$, $6x^3 - x^2y + 2xy^2 + y^3$ এবং $9x^3 + 9x^2y + 14xy^2 + 4y^3$এর

5. $6x^3 + 7x^2 - 9x + 2$, $8x^4 + 6x^3 - 15x^2 + 9x - 2$ এবং $6x^4 + 5x^3 - 12x^2 - 2x + 3$এর

6. $x^3 - 3x^2 - 13x + 15$, $x^3 - 7x^2 + 7x + 15$ এবং $x^3 - 2x^2 - 25x + 50$এর

7. $x^3 - 2x^2y - 19xy^2 + 20y^3$, $x^3 + 2x^2y - 23xy^2 - 60y^3$ এবং $x^4 + 7x^3y - 4x^2y^2 - 52xy^3 + 48y^4$এর

8. $a^5 - 15a^4 + 85a^3 - 225a^2 + 274a - 120$, $a^4 - 13a^3 + 53a^2 - 83a + 42$, $a^4 - 12a^3 + 49a^2 - 78a + 40$ এবং $a^4 - 15a^3 + 65a^2 - 105a + 54$এর

9. $2a^4 + 5a^3 - 25a^2 - 90a - 72$, $3a^4 + 5a^3 - 40a^2 - 100a - 48$, $5a^3 - 9a^2 - 56a + 48$ এবং $7a^3 - 4a^2 - 87a - 36$এর।

দুরূহ ল. সা. গু.

36. উপপাদ্য। দুইটি রাশির গুণফল উহাদের গ. সা. গু. এবং ল. সা. গু.-র গুণফলের সমান।

মনে কর, A এবং B দুইটি রাশি; উহাদের গ. সা. গু. $=H$ এবং উহাদের ল. সা. গু. $=L$; প্রমাণ করিতে হইবে যে, $A\times B=H\times L$.

প্রমাণ। মনে কর, A এবং Bকে H দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল যথাক্রমে a এবং b হয়।

$$\text{তাহা হইলে } \left.\begin{array}{l} A=aH \\ B=bH \end{array}\right\} \quad \cdots(1)$$

H, A এবং Bএর গ. সা. গু. বলিয়া A এবং Bএর যাবতীয় সাধারণ গুণনীয়ক Hএর অন্তর্ভূত; অতএব a ও bর কোন সাধারণ গুণনীয়ক থাকিবে না। অতএব (i) হইতে A এবং Bএর ল. সা. গু. $=abH$, অর্থাৎ $L=abH$. (ii)

এখন (i) হইতে গুণ দ্বারা $A\times B=aH\times bH=H\times abH=H\times L$. অতএব উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

অনুসিদ্ধান্ত। $L=\dfrac{A\times B}{H}$.

অতএব দুইটি রাশিমালার গুণফলকে উহাদের গ. সা. গু. দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল হইবে রাশিদ্বয়ের ল. সা. গু.।

37. সহজে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যায় না এই প্রকার দুইটি রাশিমালার ল. সা. গু.-নির্ণয়। পূর্ব্ববর্ত্তী অণুচ্ছেদে দেখা গিয়াছে যে, H ও L যথাক্রমে A এবং B রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. হইলে $L=\dfrac{A\times B}{H}=\dfrac{A}{H}\times B$, অথবা, $A\times\dfrac{B}{H}$. অতএব দুইটি রাশিমালার ল. সা. গু.-নির্ণয়ের নিয়ম এইরূপ হইবে: রাশিমালাদ্বয়ের একটিকে উহাদের গ. সা. গু. দ্বারা ভাগ কর; লব্ধ ভাগফলকে অপর রাশিমালাটির দ্বারা গুণ করিলেই নির্ণেয় ল. সা. গু. পাইবে।

উদাহরণ 1. a^3-4a^2+5a-2 এবং $2a^3-4a^2+3a-1$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

গ. সা. গু. নির্ণয় করিলে দেখা যাইবে যে,

a^3-4a^2+5a-2 এবং $2a^3-4a^2+3a-1$এর গ. সা. গু. $=a-1$

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
 & a^3-4a^2+5a-2 & 2a^3-4a^2+3a-1 & 2 \\
 & 4 & 2a^3-8a^2+10a-4 & \\
\hline
a & 4a^3-16a^2+20a-8 & 4a^2-7a+3 & 4a-3 \\
 & 4a^3-7a^2+3a & 4a^2-4a & \\
\hline
 & -9a^2+17a-8 & -3a+3 & \\
 & 4 & -3a+3 & \\
\hline
-9 & -36a^2+68a-32 & & \\
 & -36a^2+63a-27 & & \\
\hline
 & 5)\,5a-5 & & \\
\hline
 & a-1 & & \\
\end{array}
$$

অতএব নির্ণেয় ল. সা. গু.

$$=\frac{a^3-4a^2+5a-2}{a-1}\times(2a^3-4a^2+3a-1)$$

$$=(a^2-3a+2)\times(2a^3-4a^2+3a-1), \qquad [\text{ ভাগ দ্বারা }]$$

$$=2a^5-10a^4+19a^3-18a^2+9a-2.$$

উদাহরণ 2. দুইটি রাশির ল. সা. গু. $=x^5-3x^4+x^3-3x^2+x-3$ এবং গ. সা. গু. $=x-3$; একটি রাশি x^3-2x^2-2x-3 হইলে অপরটি কত ?

দুইটি রাশির গুণফল = উহাদের ল. সা. গু. × গ. সা. গু. ;

অতএব নির্ণেয় রাশি $\times(x^3-2x^2-2x-3)$;

$$=(x^5-3x^4+x^3-3x^2+x-3)\times(x-3) ;$$

$\therefore$ নির্ণেয় রাশি $=\dfrac{(x^5-3x^4+x^3-3x^2+x-3)\times(x-3)}{x^3-2x^2-2x-3}$

$$=\frac{x^5-3x^4+x^3-3x^2+x-3}{x^3-2x^2-2x-3}\times(x-3)$$

[ভাগ দ্বারা] $\quad =(x^2-x+1)(x-3)=x^3-4x^2+4x-3.$

38. তিন বা তদধিক রাশিমালার ল. সা. গু.-নির্ণয়ের নিয়ম।

যে-কোন দুইটি রাশিমালার ল. সা. গু. নির্ণয় কর। এখন লব্ধ ল. সা. গু. এবং তৃতীয় একটি রাশিমালার ল. সা. গু. নির্ণয় কর ; ইত্যাদি। সর্বশেষ ল. সা. গু.ই নির্ণেয় ল. সা. গু.।

মনে কর, A, B, C, এই তিনটি রাশিমালার ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে। মনে কর, A ও Bএর ল. সা. গু. $=L$; L ও Cএর ল. সা. গু. $=L'$; প্রমাণ করিতে হইবে যে, L' ই নির্ণেয় ল. সা. গু.।

প্রমাণ। L, A এবং Bএর ল. সা. গু.; অতএব Lএর যে-কোন গুণিতক A এবং Bএর সাধারণ গুণিতক হইবে। কাজেই L এবং Cএর যে-কোন সাধারণ গুণিতক A, B এবং Cএর সাধারণ গুণিতক হইবে। অতএব L এবং Cএর লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক বা ল. সা. গু. অর্থাৎ L', A, B এবং Cএরও লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক বা ল. সা. গু. হইবে।

স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, রাশিমালার সংখ্যা তিনের অধিক হইলেও এইরূপ যুক্তি প্রয়োগ করা যায়।

উদাহরণ। x^3+2x^2-7x+4, $x^3+4x^2-11x+6$ এবং $x^3+8x^2+9x-18$এর ল.সা.গু. নির্ণয় কর।

প্রথমে x^3+2x^2-7x+4 এবং $x^3+4x^2-11x+6$এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর। ভাগ-প্রক্রিয়া দ্বারা গ.সা.গু. নির্ণয় করিলে দেখা যাইবে যে, ইহাদের গ.সা.গু. $=x^2-2x+1$.

অতএব রাশিদ্বয়ের ল. সা. গু. $=\dfrac{x^3+2x^2-7x+4}{x^2-2x+1}\times(x^3+4x^2-11x+6)$

$$=(x+4)(x^3+4x^2-11x+6)$$
$$=x^4+8x^3+5x^2-38x+24.$$

এখন $x^4+8x^3+5x^2-38x+24$ এবং $x^3+8x^2+9x-18$এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

দেখা যাইবে যে, ইহাদের গ. সা. গু. $=x^2+5x-6$.

$\therefore$ ইহাদের ল. সা. গু. অর্থাৎ নির্ণেয় ল. সা. গু.

$$=\frac{x^3+8x^2+9x-18}{x^2+5x-6}\times(x^4+8x^3+5x^2-38x+24)$$
$$=(x+3)(x^4+8x^3+5x^2-38x+24)$$
$$=x^5+11x^4+29x^3-23x^2-90x+72.$$

প্রশ্নমালা 21

ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. a^2+5a+6 এবং $2a^3+11a^2+18a+8$এর
2. $2a^2-7a+6$ এবং $4a^3-16a^2+21a-9$এর
3. $4a^2-5a-6$ এবং $8a^3-6a^2-13a-3$এর
4. $2a^3+3a^2+2a+1$ এবং $6a^4+11a^3+11a^2+6a+2$এর

5. $2a^3-a^2-19a-10$ এবং $4a^4-10a^3-33a^2+53a+38$এর

6. $x^3-6x^2-37x+210$ এবং $x^3+4x^2-47x-210$এর

7. $6a^3y^3-25a^2y^2+17ay-22$ এবং
$3a^3y^3-17a^2y^2+19ay+11$এর

8. x^3+5x^2+7x+3 এবং $x^4+3x^3+4x^2+3x+1$এর
[পাট. প্র., 1918]

9. x^3+2x^2-x-2 এবং $2x^4-x^3-9x^2+4x+4$এর

10. $2x^3-5x-39$ এবং $x^4-21x-18$এর [এ. প্র., 1904]

11. $x^3-6x^2+11x-6$, $x^3-9x^2+26x-24$
এবং $x^3-7x^2+14x-8$এর

12. $2x^3-11x^2+17x-6$, $x^3-9x^2+26x-24$ এবং
$4x^4-28x^3+47x^2+7x-12$এর

13. $x^3-x^2-14x+24$, x^3-2x^2-5x+6 এবং
$x^3-8x^2+19x-12$এর

14. $x^3+3x^2y+3xy^2+2y^3$, $x^3+x^2y-xy^2+2y^3$ এবং
$x^3+2x^2y-xy^2-2y^3$এর

15. $x^3-2x^2-19x+20$, $x^3+2x^2-23x-60$ এবং
$x^4+7x^3-4x^2-52x+48$এর। [বো. প্র., 1881]

16. $2x^4+x^3+x^2-7x+3$, $3x^4+7x^3+9x^2-x-6$ এবং
$6x^4-7x^3-4x^2+7x-2$এর। [বো. প্র., 1902]

17. দুইটি রাশির ল. সা. গু. $=a^3-6a^2+11a-6$ এবং গ. সা. গু. $=a-2$; উহাদের একটি a^2-5a+6 হইলে অপরটি কত ?

18. দুইটি রাশির ল. সা. গু. $=a^4+5a^3+5a^2-5a-6$ এবং গ. সা. গু. $=a^2+4a+3$; একটি রাশি a^3+3a^2-a-3 হইলে অপরটি কত ?

19. দুইটি রাশির ল. সা. গু. $=(x-a)^2(2x-3a)(x-2a)$ এবং গ. সা. গু. $=x-a$; একটি রাশি $2x^2-5xa+3a^2$ হইলে অপরটি কত ?

20. দুইটি রাশির ল. সা. গু. $=2a^5-a^4-34a^3+64a^2+8a-48$ এবং উহাদের গ. সা. গু. $=a-2$; একটি উহাদের গ. সা. গু.এর $a^2+2a-12$ গুণ, অপরটি কত ?

21. xএর দুই মাত্রাবিশিষ্ট দুইটি রাশিমালার ল. সা. গু. $=(2x-1)(x-2)(x-3)$ এবং উহাদের গ. সা. গু. $=2x-1$; রাশিমালাদ্বয় নির্ণয় কর।

পঞ্চম অধ্যায়

দুরূহ ভগ্নাংশ এবং ভগ্নাংশ-বিষয়ক অভেদাবলী

(Harder Fractions and Fractional Identities)

প্রথম খণ্ডের চতুর্দ্দশ অধ্যায়ে সহজ ভগ্নাংশের বিষয় আলোচিত হইয়াছে। বর্ত্তমান অধ্যায়ে দুরূহ ভগ্নাংশ এবং ভগ্নাংশ-বিষয়ক অভেদাবলী বিবেচিত হইবে।

39. দুরূহ ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্ত্তন। লব কিংবা হরকে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করিতে পারিলে উহাদের সাধারণ গুণনীয়কগুলি অপসারিত করিয়া ভগ্নাংশটিকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্ত্তন করা যায়। তাহা না হইলে লব এবং হরকে উহাদের গ. সা. গু. দ্বারা ভাগ করিয়া লঘিষ্ঠ আকার নির্ণয় করিবে।

উদাহরণ 1. $\dfrac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)}$কে লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্ত্তিত কর।

প্রদত্ত ভগ্নাংশ $=\dfrac{-(b-c)(c-a)(a-b)}{-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)}=\dfrac{1}{a+b+c}.$

উদাহরণ 2. $\dfrac{3x^3-5x^2+5x-2}{2x^4-2x^3+3x^2-x+1}$কে লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্ত্তিত কর।

এস্থলে লব এবং হরকে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা সহজ নহে। অতএব লব এবং হরকে উহাদের গ. সা. গু. দ্বারা ভাগ কর। ভাগপ্রক্রিয়ায় গ. সা. গু. নির্ণয় করিলে দেখা যাইবে যে,

$3x^3-5x^2+5x-2$ এবং $2x^4-2x^3+3x^2-x+1$এর গ. সা. গু.

$$=x^2-x+1.$$

অতএব প্রদত্ত ভগ্নাংশ $=\dfrac{(3x^3-5x^2+5x-2)\div(x^2-x+1)}{(2x^4-2x^3+3x^2-x+1)\div(x^2-x+1)}$

$$=\frac{3x-2}{2x^2+1}.$$

উদাহরণ 3. $\dfrac{12a^5b-60a^4b^2-76a^3b^3+24a^2b^4}{36a^4b^2+18a^3b^3-30a^2b^4+6ab^5}$কে লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্ত্তিত কর।

প্রদত্ত ভগ্নাংশ $=\dfrac{4a^2b(3a^3-15a^2b-19ab^2+6b^3)}{6ab^2(6a^3+3a^2b-5ab^2+b^3)}$

$=\dfrac{2a(3a^3-15a^2b-19ab^2+6b^3)}{3b(6a^3+3a^2b-5ab^2+b^3)}$ [লব এবং হর হইতে সাধারণ সরল গুণনীয়কগুলি অপসারিত করিয়া]

ভাগপ্রক্রিয়ায় গ. সা. গু. নির্ণয় করিলে দেখা যাইবে যে,

$3a^3-15a^2b-19ab^2+6b^3$ এবং $6a^3+3a^2b-5ab^2+b^3$এর গ. সা. গু. $=3a^2+3ab-b^2$.

অতএব প্রদত্ত ভগ্নাংশ

$$\frac{2a(3a^3-15a^2b-19ab^2+6b^3)\div(3a^2+3ab-b^2)}{3b(6a^3+3a^2b-5ab^2+b^3)\div(3a^2+3ab-b^2)}=\frac{2a(a-6b)}{3b(2a-b)}.$$

প্রশ্নমালা 22

গুণনীয়কে বিশ্লেষণ দ্বারা লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্তিত কর :

1. $\dfrac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc}$

2. $\dfrac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)}$

3. $\dfrac{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc}{(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3}$

4. $\dfrac{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)}{(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3}$

5. $\dfrac{x^3-(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x-abc}{x^3-(b+c-d)x^2-(cd+bd-bc)x+bcd}$

গ. সা. গু. দ্বারা ভাগ করিয়া লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্তিত কর :

6. $\dfrac{x^3-3x^2+x+2}{2x^3-5x^2+x+3}$ 7. $\dfrac{x^3+6x^2+2x-15}{x^3+5x^2-2x-10}$

8. $\dfrac{2x^3-7x^2-46x-21}{2x^4+11x^3-13x^2-99x-45}$

9. $\dfrac{4x^3-8x^2y+7xy^2-6y^3}{2x^4-3x^3y+5x^2y^2-3xy^3+2y^4}$.

10. $\dfrac{2x^4-7x^3+13x^2-11x+3}{4x^4-10x^3+6x^2+x-1}$

11. $\dfrac{x^4-4xy^3+3y^4}{x^5-2x^4y-2x^3y^2+8x^2y^3-7xy^4+2y^5}$

12. $\dfrac{2x^3-4x^2y-6xy^2}{3x^5-6x^4y-6x^3y^2-9x^2y^3}$

13. $\dfrac{36a^4+42a^3+30a^2+12a}{12a^5-54a^4-24a^3-30a^2}$

14. $\dfrac{8a^6b+16a^5b^2+24a^4b^3+16a^3b^4+8a^2b^5}{12a^6b^2+30a^5b^3+12a^4b^4+6a^3b^5-12a^2b^6+6ab^7}.$

15. $\dfrac{x^4-ax^3+(b-1)x^2+ax-b}{x^4-bx^3+(a-1)x^2+bx-a}$

16. $\dfrac{ax^4-(a+p)x^3+(a+b+p)x^2-(b+p)x+b}{bx^4-(b+p)x^3+(a+b+p)x^2-(a+p)x+a}.$

40. ভগ্নাংশের যোগ এবং বিয়োগ।

প্রথম খণ্ডের 135 অণুচ্ছেদে বিষয়টি আলোচিত হইয়াছে। নিম্নে কতকগুলি জটিল উদাহরণ প্রদত্ত হইল। এস্থলে মনে রাখা দরকার যে, যদি কোন ভগ্নাংশ লঘিষ্ঠ আকারে না থাকে, তবে প্রথমেই উহাকে লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ করিয়া লইতে হইবে।

উদাহরণ 1. সরল কর : $\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{x-b}+\dfrac{1}{x+a}-\dfrac{1}{x+b}.$

এস্থলে ভগ্নাংশগুলিকে একসঙ্গে না লইয়া প্রথম এবং তৃতীয়টিকে একসঙ্গে এবং দ্বিতীয় ও চতুর্থটিকে একসঙ্গে সজ্জবদ্ধ করা সুবিধাজনক।

প্রদত্ত রাশি $=\left(\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x+a}\right)-\left(\dfrac{1}{x-b}+\dfrac{1}{x+b}\right)$

$$=\frac{(x+a)+(x-a)}{(x-a)(x+a)}-\frac{(x+b)+(x-b)}{(x-b)(x+b)}$$

$$=\frac{2x}{x^2-a^2}-\frac{2x}{x^2-b^2}=2x\left(\frac{1}{x^2-a^2}-\frac{1}{x^2-b^2}\right)$$

$$=2x\frac{(x^2-b^2)-(x^2-a^2)}{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}=\frac{2x(a^2-b^2)}{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}.$$

উদাহরণ 2. সরল কর : $\frac{x-2}{x^2-5x+6}+\frac{x+4}{x^2+7x+12}+\frac{5x}{x^2-9}$.

এস্থলে প্রথম দুইটি ভগ্নাংশ লঘিষ্ঠ আকারে নাই। প্রথমে উহাদিগকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্ত্তিত কর।

$$\text{প্রথম ভগ্নাংশ}=\frac{x-2}{(x-2)(x-3)}=\frac{1}{x-3};$$

$$\text{দ্বিতীয় ভগ্নাংশ}=\frac{x+4}{(x+3)(x+4)}=\frac{1}{x+3}.$$

$$\text{অতএব প্রদত্ত রাশি}=\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+3}+\frac{5x}{x^2-9}$$

$$=\left(\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+3}\right)+\frac{5x}{x^2-9}$$

[প্রথম দুইটি ভগ্নাংশকে সঙ্ঘবদ্ধ করিয়া]

$$=\frac{(x+3)+(x-3)}{(x-3)(x+3)}+\frac{5x}{x^2-9}$$

$$=\frac{2x}{x^2-9}+\frac{5x}{x^2-9}=\frac{2x+5x}{x^2-9}=\frac{7x}{x^2-9}.$$

উদাহরণ 3. সরল কর : $\frac{3x^2+7x+5}{x+2}-\frac{2x^2+3x+1}{2x-3}$

কোন ভগ্নাংশে লবের মান (degree) হরের মান অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে প্রথম খণ্ডের 96 অণুচ্ছেদে প্রদর্শিত রীতিতে প্রথমে ভাগফল নির্ণয় করিয়া লইবে।

$$\text{ভাগ দ্বারা } \frac{3x^2+7x+5}{x+2}=3x+1+\frac{3}{x+2}$$

$$\text{এবং } \frac{2x^2+3x+1}{2x-3}=x+3+\frac{10}{2x-3}.$$

$$\text{অতএব প্রদত্ত রাশি}=\left(3x+1+\frac{3}{x+2}\right)-\left(x+3+\frac{10}{2x-3}\right)$$

$$=(3x+1)-(x+3)+\left(\frac{3}{x+2}-\frac{10}{2x-3}\right)$$

[ভগ্নাংশগুলিকে সঙ্ঘবদ্ধ করিয়া]

$$=2x-2+\frac{3(2x-3)-10(x+2)}{(x+2)(2x-3)}$$

$$=2x-2-\frac{4x+29}{(x+2)(2x-3)}.$$

উদাহরণ 4. সরল কর :

$$\frac{1}{(x+a)(x+2a)}+\frac{1}{(x+2a)(2x+3a)}+\frac{1}{(x+3a)(x+4a)}.$$

এস্থলে প্রত্যেক ভগ্নাংশটিকে দুইটি ভগ্নাংশের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ করিয়া প্রদত্ত রাশিকে সরল করা সুবিধাজনক।

যেহেতু $\dfrac{1}{x+a}-\dfrac{1}{x+2a}=\dfrac{(x+2a)-(x+a)}{(x+a)(x+2a)}=\dfrac{a}{(x+a)(x+2a)}$

অতএব a দ্বারা ভাগ করিয়া

$$\frac{1}{a}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+2a}\right)=\frac{1}{(x+a)(x+2a)}$$

অর্থাৎ $\dfrac{1}{(x+a)(x+2a)}=\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{1}{x+a}-\dfrac{1}{x+2a}\right)$

এইরূপ $\dfrac{1}{(x+2a)(x+3a)}=\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{1}{x+2a}-\dfrac{1}{x+3a}\right);$

এবং $\dfrac{1}{(x+3a)(x+4a)}=\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{1}{x+3a}-\dfrac{1}{x+4a}\right).$

যোগ দ্বারা প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{1}{x+a}-\dfrac{1}{x+4a}\right)$

$$=\frac{1}{a}\left\{\frac{(x+4a)-(x+a)}{(x+4a)(x+a)}\right\}=\frac{3a}{a(x+a)(x+4a)}=\frac{3}{(x+a)(x+4a)}.$$

উদাহরণ 5. সরল কর :

$$\frac{a}{x-a}-\frac{xa}{x^2-a^2}-\frac{x^2a^2}{x^4-a^4}-\frac{x^4a^4}{x^8-a^8}.$$

এস্থলে প্রথম ও দ্বিতীয় পদের যোগফলের সহিত তৃতীয় পদ যোগ করিয়া লব্ধ যোগফলের সহিত চতুর্থ পদ যোগ করিলে সহজে উত্তর পাওয়া যায়।

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \left(\frac{a}{x-a} - \frac{xa}{x^2-a^2}\right) - \frac{x^2a^2}{x^4-a^4} - \frac{x^4a^4}{x^8-a^8}$$

$$= \frac{a(x+a)-xa}{x^2-a^2} - \frac{x^2a^2}{x^4-a^4} - \frac{x^4a^4}{x^8-a^8}$$

$$= \frac{a^2}{x^2-a^2} - \frac{x^2a^2}{x^4-a^4} - \frac{x^4a^4}{x^8-a^8}$$

$$= \left(\frac{a^2}{x^2-a^2} - \frac{x^2a^2}{x^4-a^4}\right) - \frac{x^4a^4}{x^8-a^8}$$

$$= \frac{a^2(x^2+a^2)-x^2a^2}{x^4-a^4} - \frac{x^4a^4}{x^8-a^8} = \frac{a^4}{x^4-a^4} - \frac{x^4a^4}{x^8-a^8}$$

$$= \frac{a^4(x^4+a^4)-x^4a^4}{x^8-a^8} = \frac{a^8}{x^8-a^8}.$$

উদাহরণ 6. সরল কর : $\frac{1}{x+a} + \frac{2a}{x^2+a^2} + \frac{4a^3}{x^4+a^4} + \frac{8a^7}{x^8-a^8}$.

একটি নূতন ভগ্নাংশ যোগ এবং বিয়োগ করিয়া এই প্রকার রাশিমালাকে সহজে সরল করা যায়।

এস্থলে $\frac{1}{x-a}$ যোগ এবং বিয়োগ করিলে প্রদত্ত রাশিমালা

$$= \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+a} + \frac{2a}{x^2+a^2} + \frac{4a^3}{x^4+a^4} + \frac{8a^7}{x^8-a^8}$$

$$= \frac{1}{x-a} - \left\{\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} - \frac{2a}{x^2+a^2} - \frac{4a^3}{x^4+a^4} - \frac{8a^7}{x^8-a^8}\right\} \quad \cdots \quad (1)$$

এখন $\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} = \frac{(x+a)-(x-a)}{(x-a)(x+a)} = \frac{2a}{x^2-a^2}$;

$$\frac{2a}{x^2-a^2} - \frac{2a}{x^2+a^2} = \frac{2a(x^2+a^2)-2a(x^2-a^2)}{(x^2-a^2)(x^2+a^2)} = \frac{4a^3}{x^4-a^4};$$

$$\frac{4a^3}{x^4-a^4} - \frac{4a^3}{x^4+a^4} = \frac{4a^3(x^4+a^4)-4a^3(x^4-a^4)}{(x^4-a^4)(x^4+a^4)} = \frac{8a^7}{x^8-a^8};$$

এবং $\frac{8a^7}{x^8-a^8} - \frac{8a^7}{x^8-a^8} = 0$; অতএব (1)-চিহ্নিত রাশিমালার বন্ধনীর অন্তর্গত রাশিমালা $= 0$;

অতএব (1) হইতে প্রদত্ত রাশিমালা $=\dfrac{1}{x-a}$.

দ্রষ্টব্য। প্রথম খণ্ডের 135 অনুচ্ছেদের উদাহরণগুলিও দেখ।

প্রশ্নমালা 23

সরল কর :

1. $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-5}+\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+5}$

2. $\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+5}+\dfrac{1}{x+7}-\dfrac{1}{x+9}$

3 $\dfrac{x+2}{x^2+3x+2}-\dfrac{x+3}{x^2+5x+6}-\dfrac{x-3}{x^2-9}+\dfrac{x+1}{x^2+5x+4}$

4. $\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}-\dfrac{x+3}{x^2+6x+9}-\dfrac{5}{x^2-9}$

5. $\dfrac{x+2a}{x^2+6ax+8a^2}+\dfrac{x+a}{x^2-3ax-4a^2}+\dfrac{3x+20a}{x^2-16a^2}$

6. $\dfrac{3a^2+7a+4}{a+3}-\dfrac{5a^2+7a+8}{a+4}+\dfrac{3a^3+2a^2+1}{a+1}$

7. $\dfrac{2x^2+9x+7}{2x+1}+\dfrac{3x^2+9x+3}{3x+2}-\dfrac{12x^4-4x^3-11x^2+3x+3}{6x^2+7x+2}$

8. $\dfrac{b-c}{(x+b)(x+c)}+\dfrac{c-a}{(x+c)(x+a)}+\dfrac{a-b}{(x+a)(x+b)}$

[সঙ্কেত : $\dfrac{(b-c)}{(x+b)(x+c)}=\dfrac{1}{x+c}-\dfrac{1}{x+b}$ ইত্যাদি।]

9. $\dfrac{a-b}{(x+a)(x+b)}+\dfrac{b-c}{(x+b)(x+c)}+\dfrac{c-d}{(x+c)(x+d)}$

10. $\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}+\dfrac{1}{(x+3)(x+4)}+\dfrac{1}{(x+4)(x+5)}$

11. $\dfrac{2}{(x+3)(x+5)}+\dfrac{2}{(x+5)(x+7)}-\dfrac{4}{(x+7)(x+3)}$

12. $\frac{2x-3}{x^2-3x+2}+\frac{3x-1}{x^2-5x+6}+\frac{x-5}{x^2-4x+3}$

13. $\frac{2x^2+6x+5}{x^2+3x+2}+\frac{4x^2+21x+26}{x^2+5x+6}+\frac{3x^2+14x+10}{x^2+4x+3}$

14. $\frac{x-y}{x^3-y^3}+\frac{x+y}{x^3+y^3}-\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{x^4+x^2y^2+y^4}$

15. $\frac{1}{x+y-z}-\frac{1}{x+y+z}-\frac{2z}{(x+y)^2-z^2}$

16. $1+\frac{a}{b}-\frac{b}{a+b}-\frac{a^2}{ab-b^2}+\frac{2a^2}{a^2-b^2}$

17. $\frac{x^6}{x^2-1}-\frac{x^4}{x^2+1}-\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x^2+1}$

[সঙ্কেত : সুবিধাজনকভাবে সজ্জবদ্ধ কর ।]

18. $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}+\frac{2x}{x^2-a^2}+\frac{4x^3}{x^4+a^4}+\frac{8x^7}{x^8+a^8}$

19. $1+\frac{a}{x-a}+\frac{bx}{(x-a)(x-b)}+\frac{cx^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}$
$+\frac{dx^3}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}$

20. $1+\frac{a}{x-a}+\frac{ax}{(x-a)^2}+\frac{ax^2}{(x-a)^3}+\frac{ax^3}{(x-a)^4}$

21. $\frac{1}{x-1}-\frac{x}{(x-1)(x+1)}-\frac{x+2}{(x-1)(x+1)(x+3)}$
$-\frac{x+4}{(x-1)(x+1)(x+3)(x+5)}$

22. $\frac{1}{x+a}+\frac{a}{x^2-a^2}+\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{2x^3}{x^4+a^4}+\frac{4x^7}{x^8+a^8}$

23. $\frac{1}{x-a}+\frac{2x}{x^2+a^2}+\frac{4x^3}{x^4+a^4}-\frac{8x^7}{x^8-a^8}$

[সঙ্কেত : $\frac{1}{x+a}$ প্রথমে যোগ এবং পরে বিয়োগ কর ।]

24. $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2+1}+\frac{4}{x^4+1}+\frac{8}{x^8+1}+\frac{16}{x^{16}-1}$

25. $\frac{1}{1+a}+\frac{2a}{1+a^2}+\frac{4a^3}{1+a^4}+\frac{8a^7}{1+a^8}+\frac{16a^{15}}{1-a^{16}}$

26. $\frac{x}{(x-1)(x+1)}+\frac{x+2}{(x-1)(x+1)(x+3)}$
$+\frac{x+4}{(x-1)(x+1)(x+3)(x+5)}+\frac{1}{(x-1)(x+1)(x+3)(x+5)}.$

41. চক্র-ক্রম-বিশিষ্ট ভগ্নাংশ (Fractions involving cyclic order)।

ভগ্নাংশের অন্তর্গত অক্ষরগুলি চক্র-ক্রমে লিখিত থাকিলে বহুস্থলে উহাদিগকে সহজে সরল করা যায়। নিম্নলিখিত (i)-(vi) ফলগুলি চক্র-ক্রমে লিখিত ভগ্নাংশ সরল করিবার পক্ষে প্রয়োজনীয়।

$\frac{1}{(a-b)(a-c)}=X,\quad \frac{1}{(b-c)(b-a)}=Y,\quad \frac{1}{(c-a)(c-b)}=Z$ হইলে (I)

(i) প্রমাণ করা যায় যে, $X+Y+Z=0.$

প্রমাণ। যেহেতু $a-c=-(c-a),$

$\therefore\ (a-b)(a-c)=-(a-b)(c-a)=-(c-a)(a-b)$;

অতএব $X=-\frac{1}{(c-a)(a-b)}.$

এইরূপে $Y=-\frac{1}{(a-b)(b-c)},\quad Z=-\frac{1}{(b-c)(c-a)}.$ ...(II)

ইহাদের হরগুলির ল. সা. গু. $=(b-c)(c-a)(a-b)$;

অতএব $X+Y+Z$

$$=-\left\{\frac{1}{(c-a)(a-b)}+\frac{1}{(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(b-c)(c-a)}\right\}$$

$$=-\frac{(b-c)+(c-a)+(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)}=-\frac{0}{(b-c)(c-a)(a-b)}=0.$$

(ii) প্রমাণ করিতে পারা যায় যে, $aX+bY+cZ=0.$

প্রমাণ। $aX+bY+cZ$

$$=-\left\{\frac{a}{(c-a)(a-b)}+\frac{b}{(a-b)(b-c)}+\frac{c}{(b-c)(c-a)}\right\}$$

$$=-\frac{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)}=-\frac{0}{(b-c)(c-a)(a-b)}=0.$$

(iii) প্রমাণ করিতে পারা যায় যে, $a^2X+b^2Y+c^2Z=1.$

প্রমাণ। $a^2X+b^2Y+c^2Z$

$$=-\left\{\frac{a^2}{(c-a)(a-b)}+\frac{b^2}{(a-b)(b-c)}+\frac{c^2}{(b-c)(c-a)}\right\}$$

$$=-\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)}$$

$$=-\frac{-(b-c)(c-a)(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)}=1.$$

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে,

(iv) $bcX+caY+abZ=1$; (v) $a^3X+b^3Y+c^3Z=a+b+c$

(vi) $a^4X+b^4Y+c^4Z=a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab.$

উদাহরণ 1. সরল কর :

$$\frac{pa^2+qbc+r}{(a-b)(a-c)}+\frac{pb^2+qca+r}{(b-c)(b-a)}+\frac{pc^2+qab+r}{(c-a)(c-b)}.$$

পূর্ব্বোক্ত X, Y, Z রাশি ব্যবহার করিলে

প্রদত্ত রাশি

$=(pa^2+qbc+r)X+(pb^2+qca+r)Y+(pc^2+qab+r)Z$

$=p(a^2X+b^2Y+c^2Z)+q(bcX+caY+abZ)+r(X+Y+Z)$

$=p.1+q.1+r.0$ [(iii), (iv) এবং (i) দ্বারা]

$=p+q.$

উদাহরণ 2. সরল কর :

$$\frac{b+c-na}{(a-b)(a-c)}+\frac{c+a-nb}{(b-c)(b-a)}+\frac{a+b-nc}{(c-a)(c-b)}.$$

a, b, cকে চক্র-ক্রমে সাজাইলে

$$\text{প্রদত্ত রাশি}=-\left\{\frac{b+c-na}{(c-a)(a-b)}+\frac{c+a-nb}{(a-b)(b-c)}+\frac{a+b-nc}{(b-c)(c-a)}\right\}$$

$$= -\frac{(b+c-na)(b-c)+(c+a-nb)(c-a)+(a+b-nc)(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)}$$

$$= -\frac{\{(b^2-c^2)+(c^2-a^2)+(a^2-b^2)\}-n\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}}{(b-c)(c-a)(a-b)}$$

$$= -\frac{0-n.0}{b-c)(c-a)(a-b)} = 0.$$

উদাহরণ 3. সরল কর :

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)(x+a)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)(x+b)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)(x+c)}.$$

a, b, cকে চক্র-ক্রমে সাজাইলে

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = -\left\{\frac{1}{(c-a)(a-b)(x+a)}+\frac{1}{(a-b)(b-c)(x+b)} + \frac{1}{(b-c)(c-a)(x+c)}\right\}$$

হরগুলির ল. সা. গু. $=(b-c)(c-a)(a-b)(x+a)(x+b)(x+c)$;

অতএব প্রদত্ত রাশি

$$= -\frac{(x+b)(x+c)(b-c)+(x+c)(x+a)(c-a)+(x+a)(x+b)(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)(x+a)(x+b)(x+c)}.$$

লবের প্রথম পদ $=\{x^2+x(b+c)+bc\}(b-c)$

$= x^2(b-c)+x(b^2-c^2)+bc(b-c)$;

এইরূপে দ্বিতীয় পদ $= x^2(c-a)+x(c^2-a^2)+ca(c-a)$

এবং তৃতীয় পদ $= x^2(a-b)+x(a^2-b^2)+ab(a-b)$;

যোগ করিলে লব $= x^2.0+x.0+bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$

$= -(b-c)(c-a)(a-b).$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= -\dfrac{-(b-c)(c-a)(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)(x+a)(x+b)(x+c)}$

$$= \frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}.$$

প্রশ্নমালা 24

সরল কর :

1. $\frac{a^2+a+1}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2+b+1}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2+c+1}{(c-a)(c-b)}$

2. $\frac{pa^2+qa+r}{(a-b)(a-c)}+\frac{pb^2+qb+r}{(b-c)(b-a)}+\frac{pc^2+qc+r}{(c-a)(c-b)}$

3. $\frac{a^2-bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2-ca}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2-ab}{(c-a)(c-b)}$

4. $\frac{pa^2-qbc}{(a-b)(a-c)}+\frac{pb^2-qca}{(b-c)(b-a)}+\frac{pc^2-qab}{(c-a)(c-b)}$

5. $\frac{b+c-a}{(a-b)(a-c)}+\frac{c+a-b}{(b-c)(b-a)}+\frac{a+b-c}{(c-a)(c-b)}$

6. $\frac{b^2+c^2-a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{c^2+a^2-b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{a^2+b^2-c^2}{(c-a)(c-b)}$

7. $\frac{b^2+c^2-na^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{c^2+a^2-nb^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{a^2+b^2-nc^2}{(c-a)(c-b)}$

8. $\frac{(x+b)(x+c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x+c)(x+a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x+a)(x+b)}{(c-a)(c-b)}$

9. $\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-c)(b-a)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}$

10. $\frac{a}{(a-b)(a-c)(x+a)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)(x+b)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)(x+c)}$

11. $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(x+a)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)(x+b)}$
$+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)(x+c)}$

12. $\frac{a^3(b+c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3(c+a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3(a+b)}{(c-a)(c-b)}$

13. $\frac{(x+a)^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x+b)^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x+c)^3}{(c-a)(c-b)}$

[সঙ্কেত : $(x+a)$কে p, $(x+b)$কে q, $(x+c)$কে r ধর। তাহা হইলে $q-r=b-c$ ইত্যাদি]।

14. $\frac{(x+a)^4}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x+b)^4}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x+c)^4}{(c-a)(c-b)}$

15. $\frac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2-ca}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2-ab}{(c+a)(c+b)}$

16. $\frac{pa^2+qbc}{(a+b)(a+c)}+\frac{pb^2+qca}{(b+c)(b+a)}+\frac{pc^2+qab}{(c+a)(c+b)}+\frac{2(p+q)abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}$

17. $\frac{y+z}{(y^2-zx)(z^2-xy)}+\frac{z+x}{(z^2-xy)(x^2-yz)}+\frac{x+y}{(x^2-yz)(y^2-zx)}$

18. $\frac{1}{a^2+2bc-b^2-c^2}+\frac{1}{b^2+2ca-c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+2ab-a^2-b^2}$.

[এ. প্র., 1913]

42. জটিল ভগ্নাংশ (Complex Fraction).

যে ভগ্নাংশের লবে অথবা হরে, অথবা উভয় স্থলেই ভগ্নাংশ থাকে, তাহাকে **জটিল ভগ্নাংশ (Complex Fraction)** বলে। যথা,

$\frac{\frac{a}{b}}{c}$, $\frac{a}{\frac{b}{c}}$, $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$, $\frac{\frac{a}{3b}+4}{\frac{2x}{y}-\frac{y}{z}}$; ইহারা এক-একটি জটিল ভগ্নাংশ।

দ্রষ্টব্য। জটিল ভগ্নাংশের লব এবং হরের মধ্যবর্ত্তী ভগ্নাংশের চিহ্নটি কিঞ্চিৎ স্থূল করিয়া অঙ্কিত করা উচিত। তাহা না হইলে লব এবং হর-বিষয়ে ভুল হইতে পারে।

43. প্রমাণ করিতে পারা যায় যে,

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\times d}{b\times c}$$, অর্থাৎ $\frac{\text{প্রান্তবর্ত্তী রাশিদ্বয়ের গুণফল}}{\text{মধ্যবর্ত্তী রাশিদ্বয়ের গুণফল}}$।

প্রমাণ। $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}$, [ভগ্নাংশের সংজ্ঞানুসারে]

$$=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\times d}{b\times c}.$$

এই সূত্রটি মনে রাখিলে জটিল ভগ্নাংশ সহজে সরল করা যায়।

অনুসিদ্ধান্ত। (i) $\dfrac{\frac{a}{b}}{c}=\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{1}}=\dfrac{a\times 1}{b\times c}$ বা $\dfrac{a}{bc}$.

(ii) $\dfrac{a}{\frac{b}{c}}=\dfrac{\frac{a}{1}}{\frac{b}{c}}=\dfrac{a\times c}{1\times b}=\dfrac{ac}{b}$.

(iii) $\dfrac{1}{\frac{a}{x}}=\dfrac{x}{a}$.

44. জটিল ভগ্নাংশ সরল করিবার সাধারণ নিয়ম। ভগ্নাংশটির লব এবং হরকে পৃথগ্‌ভাবে সরল করিয়া লইয়া পূর্ব্ববর্ত্তী অণুচ্ছেদের সাহায্যে সরল কর।

বিকল্প প্রণালী। ভগ্নাংশটির লব এবং হর উভয়কে উহাদের মধ্যে যে ভগ্নাংশগুলি আছে, তাহাদের হরগুলির ল. সা. গু. দ্বারা গুণ করিলে লব এবং হর ভগ্নাংশমুক্ত হইবে; অর্থাৎ ভগ্নাংশটি একটি সাধারণ ভগ্নাংশে পরিণত হইবে। পরে ইহাকে সাধারণ ভগ্নাংশ সরল করিবার প্রণালীতে সরল কর।

সহজে নির্ণয় করা যায়, এইরূপ কোন সাধারণ গুণনীয়ক লব এবং হরে থাকিলে উহাদিগকে প্রথমে অপসারিত করিয়া লইয়া উপরিউক্ত প্রণালী প্রয়োগ করিবে।

উদাহরণ 1. সরল কর: $\dfrac{\frac{a-b}{x+y}}{\frac{a^2-b^2}{x^2-y^2}}$.

প্রদত্ত ভগ্নাংশ $=\dfrac{(a-b)(x^2-y^2)}{(x+y)(a^2-b^2)}$ [43 অণু.]

$=\dfrac{(a-b)(x+y)(x-y)}{(x+y)(a+b)(a-b)}=\dfrac{x-y}{a+b}$.

উদাহরণ 2. সরল কর: $\dfrac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2}$.

সরল করিলে লব $=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{a-b}{ab}$; হর $=\frac{a^2+b^2-2ab}{ab}=\frac{(a-b)^2}{ab}$

অতএব প্রদত্ত ভগ্নাংশ $=\dfrac{\frac{a-b}{ab}}{\frac{(a-b)^2}{ab}}=\frac{(a-b)\times ab}{ab\times(a-b)^2}=\frac{1}{a-b}.$

অথবা, ভগ্নাংশটির লব এবং হরে যে ভগ্নাংশগুলি আছে, তাহাদের হরগুলির ল. সা. গু. $=ab$; প্রদত্ত ভগ্নাংশটির লব এবং হর উভয়কে ab দ্বারা গুণ করিলে

$$\text{ভগ্নাংশটি}=\frac{\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\times ab}{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)\times ab}=\frac{a-b}{a^2+b^2-2ab}=\frac{a-b}{(a-b)^2}=\frac{1}{a-b}.$$

উদাহরণ 3. সরল কর : $\dfrac{1+\frac{a-b}{a+b}}{1-\frac{a-b}{a+b}}\div\dfrac{1+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}{1-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}\times\dfrac{\frac{a^2}{b^2}-\frac{b^2}{a^2}}{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2}.$

প্রদত্ত রাশিটিতে তিনটি ভগ্নাংশ আছে। প্রথমে ইহাদের প্রত্যেকটিকে পৃথক্-পৃথক্‌ভাবে সরল করিয়া লও।

$$\text{প্রথম ভগ্নাংশ}=\frac{\left(1+\frac{a-b}{a+b}\right)\times(a+b)}{\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right)\times(a+b)}=\frac{(a+b)+(a-b)}{(a+b)-(a-b)}=\frac{2a}{2b}=\frac{a}{b}$$

$$\text{দ্বিতীয় ভগ্নাংশ}=\frac{\left(1+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\times(a^2+b^2)}{\left(1-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\times(a^2+b^2)}=\frac{(a^2+b^2)+(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)-(a^2-b^2)}$$

$$=\frac{2a^2}{2b^2}=\frac{a^2}{b^2}\ ;$$

$$\text{তৃতীয় ভগ্নাংশ}=\frac{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)}{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}=\frac{\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\times ab}{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\times ab}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

অতএব প্রদত্ত রাশি $= \frac{a}{b} \div \frac{a^2}{b^2} \times \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = \frac{a}{b} \times \frac{b^2}{a^2} \times \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

$$= \frac{b(a^2-b^2)}{a(a^2+b^2)}.$$

উদাহরণ 4. $x = \frac{a+b}{1-ab}$ এবং $y = \frac{a-b}{1+ab}$ হইলে $\frac{x+y}{1-xy}$ কে লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্তিত কর। [পা. প্র., 1911]

$$\frac{x+y}{1-xy} = \frac{\frac{a+b}{1-ab} + \frac{a-b}{1+ab}}{1 - \frac{a+b}{1-ab} \cdot \frac{a-b}{1+ab}} = \frac{(a+b)(1+ab)+(a-b)(1-ab)}{(1-ab)(1+ab)-(a+b)(a-b)},$$

[লব এবং হরকে উহাদের হরগুলির ল. সা. গু. $(1-ab)(1+ab)$ দ্বারা গুণ করিয়া]

$$= \frac{2(a+ab^2)}{(1-a^2b^2)-(a^2-b^2)}, \quad \text{[সরল করিয়া]}$$

$$= \frac{2a(1+b^2}{(1-a^2)(1+b^2)} = \frac{2a}{1-a^2}.$$

উদাহরণ 5. $\frac{1}{1+\frac{1}{a \div x}} + \frac{1}{1-\frac{1}{a \div x}} + \frac{2}{1+\frac{1}{a^2 \div x^2}}.$

[ক. প্র., 1870]

প্রদত্ত রাশি $= \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{a}{x}}} + \frac{1}{1-\frac{1}{\frac{a}{x}}} + \frac{2}{1+\frac{1}{\frac{a^2}{x^2}}}$

$$= \frac{1}{1+\frac{x}{a}} + \frac{1}{1-\frac{x}{a}} + \frac{2}{1+\frac{x^2}{a^2}}, \quad \left[\text{যেহেতু } \frac{1}{\frac{a}{x}} = \frac{x}{a} \right]$$

$$= \frac{a}{a+x} + \frac{a}{a-x} + \frac{2a^2}{a^2+x^2}$$ [প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় ভগ্নাংশের লব এবং হর উভয়কে যথাক্রমে a, a, a^2 দ্বারা গুণ করিয়া]

$$=\frac{a(a-x)+a(a+x)}{a^2-x^2}+\frac{2a^2}{a^2+x^2}=\frac{2a^2}{a^2-x^2}+\frac{2a^2}{a^2+x^2}$$

$$=\frac{2a^2(a^2+x^2)+2a^2(a^2-x^2)}{a^4-x^4}=\frac{4a^4}{a^4-x^4}.$$

45. অবিরত ভগ্নাংশ (Continued Fraction) ।

$$a+\cfrac{b}{c+\cfrac{d}{e+\text{ইত্যাদি}}}$$

এই আকারের জটিল ভগ্নাংশকে **অবিরত ভগ্নাংশ** বলে।

ইহাকে $a+\frac{b}{c+}\ \frac{d}{e+\text{ ইত্যাদি}}$ আকারেও লেখা হয়।

অবিরত ভগ্নাংশ সরল করিতে হইলে পাটীগণিতের পদ্ধতিতে উহার সর্ব্বনিম্নরাশি হইতে কার্য্য আরম্ভ করিয়া ক্রমশঃ উপরের দিকে উঠিতে হয়।

উদাহরণ 1. সরল কর : $\cfrac{2}{x+\cfrac{1}{2x-\cfrac{3}{5x+2}}}$

সর্ব্বনিম্নরাশি $=2x-\frac{3}{5x+2}=\frac{2x(5x+2)-3}{5x+2}=\frac{10x^2+4x-3}{5x+2}.$

অতএব সর্ব্বনিম্নরাশি হইতে সরল আরম্ভ করিলে

$$\text{প্রদত্ত ভগ্নাংশ}=\cfrac{2}{x+\cfrac{1}{\cfrac{10x^2+4x-3}{5x+2}}}=\cfrac{2}{x+\cfrac{5x+2}{10x^2+4x-3}}$$

$$=\cfrac{2}{\cfrac{x(10x^2+4x-3)+5x+2}{10x^2+4x-3}}=\cfrac{2}{\cfrac{10x^3+4x^2+2x+2}{10x^2+4x-3}}$$

$$=\frac{2(10x^2+4x-3)}{10x^3+4x^2+2x+2}=\frac{10x^2+4x-3}{5x^3+2x^2+x+1}.$$

উদাহরণ 2. $\frac{2x^3+2x^2+3x+1}{x^2+x+1}$ কে অবিরত ভগ্নাংশে পরিবর্ত্তিত কর।

প্রদত্ত ভগ্নাংশ $=2x+\frac{x+1}{x^2+x+1}$, [ভাগ দ্বারা]

$$=2x+\cfrac{1}{\cfrac{x^2+x+1}{x+1}}, \quad \left[\because \cfrac{1}{\cfrac{x^2+x+1}{x+1}}=\frac{x+1}{x^2+x+1}\right]$$

$$=2x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x+1}}. \quad [\text{ভাগ দ্বারা}]$$

প্রশ্নমালা 25

সরল কর :

1. $\cfrac{\cfrac{2a}{5x}}{\cfrac{3a}{10x}}$ 2. $\cfrac{\cfrac{5mx}{6ny}}{\cfrac{10ma}{21nb}}$ 3. $\cfrac{-\cfrac{2ax}{3by}}{\cfrac{4bx}{9ay}}$ 4. $\cfrac{\cfrac{7px}{9qy}}{-\cfrac{28pa}{45qb}}$

5. $\cfrac{-\cfrac{2abc}{3xyz}}{-\cfrac{4xyz}{9abc}}$ 6. $\cfrac{\cfrac{a-b}{x-y}}{\cfrac{a^2-b^2}{x^2-y^2}}$ 7. $\cfrac{\cfrac{a+b}{a-b}}{\cfrac{a^2-b^2}{(a-b)^2}}$ 8. $\cfrac{\cfrac{x^2+y^2}{x+y}}{\cfrac{x-y}{x^2-y^2}}$

9. $\cfrac{\cfrac{a^3-b^3}{a^2+b^2}}{\cfrac{a^2-b^2}{a^2+b^3}}$ 10. $\cfrac{\cfrac{3x+2y}{2x+3y}-1}{\cfrac{2x-7y}{2x+3y}+1}$ 11. $\cfrac{\cfrac{1}{a}+\cfrac{1}{b+c}}{\cfrac{1}{a}-\cfrac{1}{b+c}}$

12. $\cfrac{\cfrac{a^2}{b^2}-\cfrac{b^2}{a^2}}{\cfrac{a^2}{b^2}+\cfrac{b^2}{a^2}-2}$ 13. $\cfrac{\cfrac{a+b}{a-b}-\cfrac{a-b}{a+b}}{\cfrac{a+b}{a-b}+\cfrac{a-b}{a+b}}$ 14. $\cfrac{\cfrac{a+b}{1-ab}+\cfrac{a-b}{1+ab}}{1-\cfrac{a^2-b^2}{1-a^2b^2}}$

15. $\cfrac{\cfrac{a}{a-b}+\cfrac{b^2}{a^2-b^2}}{\cfrac{a^2}{a+b}+\cfrac{ab^2}{a^2-b^2}}$ 16. $\cfrac{\cfrac{a+b}{a-b}+\cfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}{\cfrac{a-b}{a+b}-\cfrac{a^3-b^3}{a^3+b^3}}$

17. $\cfrac{\cfrac{1}{a}+\cfrac{1}{b+c}}{\cfrac{1}{a}-\cfrac{1}{b+c}}\left(1+\cfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$ [ক. প্র., 1921]

18. $\dfrac{\dfrac{x^3}{y^3}-\dfrac{y^3}{x^3}}{\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right)\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-2\right)} \times \dfrac{\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{xy}}$ [বো. প্র., 1912]

19. $\dfrac{1+\dfrac{a-b}{a+b}}{1-\dfrac{a-b}{a+b}} \div \dfrac{1+\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}{1-\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}$. [ক. প্র., 1859]

20. $\left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}\right) \div \left(\dfrac{1}{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}-\dfrac{1}{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}}\right)$ [ক. প্র., 1913]

21. $\dfrac{\dfrac{a+b+c}{a+b-c}+\dfrac{c+a-b}{b+c-a}}{\dfrac{a+b-c}{c+a-b}+\dfrac{b+c-a}{a+b+c}} \div \dfrac{\dfrac{a+b+c}{a+b-c}}{\dfrac{b+c-a}{c+a-b}}$. [মা. প্র., 1875]

22. $\dfrac{\left(\dfrac{y}{z}-\dfrac{z}{y}\right)\left(\dfrac{z}{x}-\dfrac{x}{z}\right)\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right)}{\left(\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{z^2}\right)\left(\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{1}{x^2}\right)\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}\right)}$. [বো. প্র., 1926]

23. $\dfrac{\dfrac{a^2}{x-a}+\dfrac{b^2}{x-b}+\dfrac{c^2}{x-c}+a+b+c}{\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{b}{x-b}+\dfrac{c}{x-c}}$ [ক. প্র., 1925]

[সঙ্কেত : লব $=\left(\dfrac{a^2}{x-a}+a\right)+\left(\dfrac{b^2}{x-b}+b\right)+\left(\dfrac{c^2}{x-c}+c\right)$].

24. $\dfrac{a^2\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)+b^2\left(\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{a}\right)+c^2\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)}{a\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)+b\left(\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{a}\right)+c\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)}$ [ক. প্র., 1880]

25. $\dfrac{x}{x-a}-\dfrac{x}{x+a}-\dfrac{\dfrac{x+a}{x-a}-\dfrac{x-a}{x+a}}{\dfrac{x+a}{x-a}+\dfrac{x-a}{x+a}}$ [ক. প্র., 1869]

26. $(1+x)^2 \div \left\{1 + \dfrac{x}{1-x+\dfrac{x}{1+x+x^2}}\right\} + x^3 + 1.$ [বো. প্র., 1923]

27. $\dfrac{\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{4x}{1+x^2}+\dfrac{8x}{1+x^4}-\dfrac{1-x}{1+x}}{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}+\dfrac{4x^2}{1+x^4}-\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}.$

মান নির্ণয় কর :

28. $x=\dfrac{a+1}{ab+1}$, $y=\dfrac{ab+a}{ab+1}$ হইলে $\dfrac{x+y-1}{x-y+1}$ এর। [বো. প্র., 1910]

29. $x=\dfrac{1+a}{1-a}$ এবং $y=\dfrac{1-a}{1+a}$ হইলে $\dfrac{x-y}{1+xy}$ এর। [পা. প্র., 1920]

30. $x=\dfrac{4ab}{a+b}$ হইলে $\dfrac{x+2a}{x-2a}+\dfrac{x+2b}{x-2b}$ এর। [পা. প্র., 1922]

31. $t=\dfrac{3x^2+x-2}{3-x}$ হইলে $\dfrac{3t+x+2}{t+3x+2}$ এর। [বো. প্র., 1921]

32. $x=\dfrac{3ab}{b-a}$ হইলে $\dfrac{1}{x-2a}+\dfrac{2}{x+b}+\dfrac{1}{b}$ এর। [মা. প্র., 1925]

সরল কর :

33. $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}}.$

34. $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{1-x}}}$

35. $\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x}}}$

36. $\dfrac{2}{2x+\dfrac{1}{2x+\dfrac{1}{2x}}}$

37. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}}.$ [এ. প্র., 1912]

38. $a+\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c+\dfrac{1}{d}}}.$

39. $x+1-\dfrac{x}{x+2-\dfrac{x+1}{x+\dfrac{1}{x+2}}}.$

[বো. প্র., 1924]

40. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{5y-3x}{2x-3y}}}}}$.

নিম্নলিখিত সাধারণ ভগ্নাংশগুলিকে অবিরত ভগ্নাংশে পরিণত কর :

41. $\dfrac{3x^2+2x+3}{3x+2}$.

42. $\dfrac{2x^3+6x^2+5x+3}{x^2+3x+2}$.

43. $\dfrac{24x^4+18x^2+1}{6x^3+4x}$

44. $\dfrac{x^3}{x^4-x^2+1}$.

ভগ্নাংশ-বিষয়ক অভেদাবলী (Fractional Identities)

46. নিম্নের উদাহরণগুলি হইতে এইরূপ অভেদাবলী-প্রমাণের ধারা বুঝা যাইবে। এস্থলে বিভিন্ন সূত্রগুলি, ভগ্নাংশ সরল করিবার প্রণালী এবং প্রথম খণ্ডের সপ্তদশ অধ্যায়ে প্রদত্ত অভেদ-প্রমাণের সাধারণ নিয়ম মনে রাখা দরকার।

উদাহরণ 1. দেখাও যে, $\dfrac{a^2-(b-c)^2}{(a+b)^2-c^2}+\dfrac{b^2-(c-a)^2}{(b+c)^2-a^2}+\dfrac{c^2-(a-b)^2}{(c+a)^2-b^2}=1.$

লব এবং হরগুলিকে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করিলে

বামপক্ষ

$$=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{(a+b+c)(a+b-c)}+\frac{(b+c-a)(b-c+a)}{(b+c+a)(b+c-a)}+\frac{(c+a-b)(c-a+b)}{(c+a+b)(c+a-b)}$$

$$=\frac{a-b+c}{a+b+c}+\frac{b-c+a}{b+c+a}+\frac{c-a+b}{c+a+b}$$ [সাধারণ গুণনীয়ক বাদ দিয়া]

$$=\frac{(a-b+c)+(b-c+a)+(c-a+b)}{a+b+c}=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1.$$

উদাহরণ 2. দেখাও যে, $\dfrac{b+c}{2bc}(b^2+c^2-a^2)$

$$+\frac{c+a}{2ca}(c^2+a^2-b^2)+\frac{a+b}{2ab}(a^2+b^2-c^2)=a+b+c,$$

$$\text{বামপক্ষ} = \left(\frac{1}{2c}+\frac{1}{2b}\right)(b^2+c^2-a^2)+\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{2c}\right)(c^2+a^2-b^2)$$
$$+\left(\frac{1}{2b}+\frac{1}{2a}\right)(a^2+b^2-c^2)$$
$$=\frac{1}{2a}\{(c^2+a^2-b^2)+(a^2+b^2-c^2)\}+\frac{1}{2b}\{(b^2+c^2-a^2)$$
$$+(a^2+b^2-c^2)\}+\frac{1}{2c}\{(b^2+c^2-a^2)+(c^2+a^2-b^2)\}$$

[পদগুলিকে $\frac{1}{2a}$, $\frac{1}{2b}$, $\frac{1}{2c}$ অনুসারে সাজাইয়া]

$$=\frac{1}{2a}.2a^2+\frac{1}{2b}.2b^2+\frac{1}{2c}.2c^2=a+b+c.$$

উদাহরণ 3. দেখাও যে, $\frac{1}{a(a+x)}+\frac{1}{(a+x)(a+2x)}$

$$+\frac{1}{(a+2x)(a+3x)}+\frac{1}{(a+3x)(a+4x)}=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+4x}\right).$$

যেহেতু, $\frac{1}{a}-\frac{1}{a+x}=\frac{a+x-a}{a(a+x)}=\frac{x}{a(a+x)}$.

অতএব $\frac{x}{a(a+x)}=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+x}\right)$.

এইরূপে $\frac{x}{(a+x)(a+2x)}=\left(\frac{1}{a+x}-\frac{1}{a+2x}\right)$,

$$\frac{x}{(a+2x)(a+3x)}=\left(\frac{1}{a+2x}-\frac{1}{a+3x}\right),$$

$$\frac{x}{(a+3x)(a+4x)}=\left(\frac{1}{a+3x}-\frac{1}{a+4x}\right).$$

যোগ দ্বারা $\frac{x}{a(a+x)}+\frac{x}{(a+x)(a+2x)}+\frac{x}{(a+2x)(a+3x)}$

$$+\frac{x}{(a+3x)(a+4x)}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+4x}.$$

উভয় পক্ষকে x দ্বারা ভাগ করিলে

$$\frac{1}{a(a+x)}+\frac{1}{(a+x)(a+2x)}+\frac{1}{(a+2x)(a+3x)}+\frac{1}{(a+3x)(a+4x)}$$
$$=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+4x}\right).$$

উদাহরণ 4. দেখাও যে,

$$\frac{1}{(a+x)(a^2+x^2)(a^4+x^4)(a^8+x^8)}=\frac{a-x}{a^{16}-x^{16}}.$$

মনে কর, $P=(a+x)(a^2+x^2)(a^4+x^4)(a^8+x^8)$.

$$\therefore\ (a-x)P=(a-x)(a+x)(a^2+x^2)(a^4+x^4)(a^8+x^8)$$
$$=(a^2-x^2)(a^2+x^2)(a^4+x^4)(a^8+x^8),$$

[প্রথম দুইটি গুণনীয়কের গুণফল লিখিয়া]

$$=(a^4-x^4)(a^4+x^4)(a^8+x^8)$$
$$=(a^8-x^8)(a^8+x^8)=a^{16}-x^{16}.$$

$(a-x)$ দ্বারা ভাগ করিয়া $P=\dfrac{a^{16}-x^{16}}{a-x}$.

অতএব বামপক্ষ $=\dfrac{1}{P}=\dfrac{a-x}{a^{16}-x^{16}}$.

উদাহরণ 5. দেখাও যে, $\dfrac{b-c}{1+bc}+\dfrac{c-a}{1+ca}+\dfrac{a-b}{1+ab}$

$$=\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(1+bc)(1+ca)(1+ab)}.$$ [ক. প্র., 1927]

বামপক্ষ =

$$\frac{(1+ca)(1+ab)(b-c)+(1+ab)(1+bc)(c-a)+(1+bc)(1+ca)(a-b)}{(1+bc)(1+ca)(1+ab)}\cdots(1)$$

শেষোক্ত ভগ্নাংশের লব $=\{1+a(b+c)+a^2bc\}(b-c)+\{1+b(c+a)$
$+ab^2c\}(c-a)+\{1+c(a+b)+abc^2\}(a-b)$

$$=\{(b-c)+a(b^2-c^2)+a^2bc(b-c)\}+\{(c-a)+b(c^2-a^2)$$
$$+ab^2c(c-a)\}+\{(a-b)+c(a^2-b^2)+abc^2(a-b)\}$$
$$=\{(b-c)+(c-a)+(a-b)\}+\{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\}$$
$$+abc\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}$$
$$=0+(b-c)(c-a)(a-b)+0$$
$$=(b-c)(c-a)(a-b).$$

অতএব (1) হইতে বামপক্ষ $=\dfrac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(1+bc)(1+ca)(1+ab)}$.

উদাহরণ 6. দেখাও যে, $\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)^2+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2$

$$=4+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right).$$ [ক. প্র., 1867]

বামপক্ষ $=\left(\frac{b^2+c^2}{bc}\right)^2+\left(\frac{c^2+a^2}{ca}\right)^2+\left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)^2$

$$=\frac{(b^2+c^2)^2}{b^2c^2}+\frac{(c^2+a^2)^2}{c^2a^2}+\frac{(a^2+b^2)^2}{a^2b^2}$$

$$=\frac{a^2(b^2+c^2)^2+b^2(c^2+a^2)^2+c^2(a^2+b^2)^2}{a^2b^2c^2}.$$

a^2, b^2 এবং c^2কে যথাক্রমে x, y, z ধরিলে শেষোক্ত ভগ্নাংশটির লব

$=x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2$

$=x(y^2+2yz+z^2)+y(z^2+2zx+x^2)+z(x^2+2xy+y^2)$

$=4xyz+\{x(y^2+z^2)+y(z^2+x^2)+z(x^2+y^2)+2xyz\}$

$=4xyz+(y+z)(z+x)(x+y)$. [19 অনু.]

$\therefore$ বামপক্ষ $=\frac{4xyz+(y+z)(z+x)(x+y)}{xyz}$

$$=4+\frac{(y+z)(z+x)(x+y)}{xyz}=4+\frac{(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)}{a^2b^2c^2}$$

এবং ডানপক্ষ $=4+\left(\frac{b^2+c^2}{bc}\right)\left(\frac{c^2+a^2}{ca}\right)\left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)$

$$=4+\frac{(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)}{a^2b^2c^2}.$$

অতএব বামপক্ষ = ডানপক্ষ।

উদাহরণ 7. $a+b+c=0$ হইলে দেখাও যে,

(i) $\frac{1}{2a^2+bc}+\frac{1}{2b^2+ca}+\frac{1}{2c^2+ab}=0$;

এবং (ii) $\frac{bc}{2a^2+bc}+\frac{ca}{2b^2+ca}+\frac{ab}{2c^2+ab}=1.$ [ক. প্র., 1906]

যেহেতু $a+b+c=0$; $\therefore a=-(b+c)$;

অতএব $2a^2+bc=a^2+a.a+bc$

$$=a^2-a(b+c)+bc=(a-b)(a-c).$$

এইরূপে $2b^2+ca=(b-c)(b-a)$ এবং $2c^2+ab=(c-a)(c-b)$.

(i) $\frac{1}{2a^2+bc}+\frac{1}{2b^2+ca}+\frac{1}{2c^2+ab}$

$=\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=0.$ [অনু. 41]

(ii) $\frac{bc}{2a^2+bc}+\frac{ca}{2b^2+ca}+\frac{ab}{2c^2+ab}$

$=\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca}{(b-c)(b-a)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}=1.$ [অনু. 41]

উদাহরণ 8. $bc+ca+ab=0$ হইলে দেখাও যে,

$$\frac{1}{a^2-bc}+\frac{1}{b^2-ca}+\frac{1}{c^2-ab}=0.$$ [স্কু. ফা., 1955.]

যেহেতু $bc+ca+ab=0$; $\therefore$ $(ca+ab)=-bc$;

অতএব $a^2-bc=a^2+ca+ab=a(a+b+c)$;

এইরূপে $b^2-ca=b(a+b+c)$ এবং $c^2-ab=c(a+b+c)$.

অতএব $\frac{1}{a^2-bc}+\frac{1}{b^2-ca}+\frac{1}{c^2-ab}$

$=\frac{1}{a(a+b+c)}+\frac{1}{b(a+b+c)}+\frac{1}{c(a+b+c)}$

$=\frac{1}{a+b+c}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{a+b+c}\cdot\frac{bc+ca+ab}{abc}=0.$

[$\because$ $bc+ca+ab=0.$]

উদাহরণ 9. $xyz=1$ হইলে দেখাও যে,

(i) $(x+yz)^2+(y+zx)^2+(z+xy)^2=4+(x+yz)(y+zx)(z+xy)$;

এবং (ii) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2$

$=4+\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right).$

(i) বামপক্ষ $=(x+yz)^2+(y+zx)^2+(z+xy)^2$

$=(x^2+2xyz+y^2z^2)+(y^2+2xyz+z^2x^2)+(z^2+2xyz+x^2y^2)$

$=6+(x^2+y^2+z^2)+(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2),$ ... (1)

[যেহেতু $xyz=1$]

ডানপক্ষ $=4+(x+yz)(y+zx)(z+xy)$

$=4+\{xyz+(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)+xyz(x^2+y^2+z^2)$

$+(xyz)^2\}$. [গুণ করিয়া এবং পদগুলিকে মাত্রানুসারে সাজাইয়া]

$=4+\{1+(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)+(x^2+y^2+z^2)+1\},$

[যেহেতু $xyz=1$]

$=6+(x^2+y^2+z^2)+(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2).$ ... (2)

অতএব (1) এবং (2) হইতে বামপক্ষ = দক্ষিণপক্ষ।

(ii) $1=xyz$; উভয় পক্ষকে x দ্বারা ভাগ করিলে $\frac{1}{x}=yz.$

এইরূপে $\frac{1}{y}=zx$ এবং $\frac{1}{z}=xy.$

এখন (i)এর yz, zx, xyর স্থলে যথাক্রমে $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ লিখিয়া

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2=4+\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right).$$

উদাহরণ 10. $x+y+z=xyz$ হইলে দেখাও যে,

$$\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=\frac{2x}{1-x^2}\cdot\frac{2y}{1-y^2}\cdot\frac{2z}{1-z^2}.$$ [ক. প্র., 1891]

বামপক্ষ $=2\left(\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}\right)$

$$=2\left\{\frac{x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}\right\}$$

লব $=x\{1-(y^2+z^2)+y^2z^2\}+y\{1-(z^2+x^2)+z^2x^2\}$
$\quad +z\{1-(x^2+y^2)+x^2y^2\}$

$=\{x-x(y^2+z^2)+xy^2z^2\}+\{y-y(z^2+x^2)+yz^2x^2\}$
$\quad +\{z-z(x^2+y^2)+zx^2y^2\}$

$=(x+y+z)-\{x(y^2+z^2)+y(z^2+x^2)+z(x^2+y^2)\}$
$\quad +xyz(yz+zx+xy)$

$=(x+y+z)-\{(x+y+z)(yz+zx+xy)-3xyz\}$
$\quad +xyz(yz+zx+xy),$ [20 অনু.]

$=xyz-xyz(yz+zx+xy)+3xyz+xyz(yz+zx+xy)$

$=4xyz.$ [$\because x+y+z=xyz$]

অতএব বামপক্ষ $=2.\dfrac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$

$$=\frac{2x}{1-x^2}\cdot\frac{2y}{1-y^2}\cdot\frac{2z}{1-z^2}.$$

উদাহরণ 11. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ হইলে দেখাও যে,

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{1}{a^3+b^3+c^3}=\frac{1}{(a+b+c)^3}.$$

যেহেতু $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$, $\therefore\ \frac{bc+ca+ab}{abc}=\frac{1}{a+b+c}$,

উভয় পক্ষকে $abc(a+b+c)$ দ্বারা গুণ করিলে

$$(a+b+c)(bc+ca+ab)=abc\ ;$$

অথবা $(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc=0$;

অর্থাৎ $(b+c)(c+a)(a+b)=0.$ [9 অনু.]

$(b+c)$, $(c+a)$ এবং $(a+b)$ গুণনীয়ক-তিনটির গুণফল শূন্য বলিয়া উহাদের অন্ততঃ একটি শূন্য হইবে। মনে কর, $b+c=0$; $\therefore\ b=-c$; কাজেই $b^3=(-c)^3=-c^3$;

অতএব $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{1}{a^3}+\frac{1}{-c^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{1}{a^3}-\frac{1}{c^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{1}{a^3}$

$=\frac{1}{a^3+b^3+c^3}$ [যেহেতু $b^3+c^3=-c^3+c^3=0$]

আবার $\frac{1}{a^3}=\frac{1}{(a+b+c)^3}$ [যেহেতু $b+c=0$]

অতএব $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{1}{a^3+b^3+c^3}=\frac{1}{(a+b+c)^3}$.

উদাহরণ 12. $2s=a+b+c$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}-\frac{1}{s}=\frac{abc}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. [স্কু. ফা., 1955]

$\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}=\frac{s-b+s-a}{(s-a)(s-b)}=\frac{2s-a-b}{s-a)(s-b)}=\frac{c}{(s-a)(s-b)}$

[$\because\ 2s=a+b+c$]

$\frac{1}{s-c}-\frac{1}{s}=\frac{s-(s-c)}{s(s-c)}=\frac{c}{s(s-c)}$.

অতএব $\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}-\frac{1}{s}=\frac{c}{(s-a)(s-b)}+\frac{c}{s(s-c)}$

$=c\left\{\frac{1}{(s-a)(s-b)}+\frac{1}{s(s-c)}\right\}=c\left\{\frac{s(s-c)+(s-a)(s-b)}{s(s-a)(s-b)(s-c)}\right\}$

লব $= s(s-c)+(s-a)(s-b) = s^2 - cs + s^2 - (a+b)s + ab$
$= 2s^2 - (a+b+c)s + ab = 2s^2 - 2s.s + ab$, [যেহেতু $a+b+c=2s$]
$= ab.$

অতএব $\dfrac{1}{s-a}+\dfrac{1}{s-b}+\dfrac{1}{s-c}-\dfrac{1}{s} = c.\dfrac{ab}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \dfrac{abc}{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$

উদাহরণ 13. $a^2=b+c$, $b^2=c+a$, $c^2=a+b$ হইলে দেখাও যে,

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=1.$$

$\dfrac{1}{1+a}=\dfrac{1\times a}{(1+a)\times a}=\dfrac{a}{a+a^2}=\dfrac{a}{a+b+c}$ [$\because a^2=b+c.$]

এইরূপে $\dfrac{1}{1+b}=\dfrac{b}{a+b+c}$ এবং $\dfrac{1}{1+c}=\dfrac{c}{a+b+c}.$

অতএব $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{1+c}=\dfrac{a+b+c}{a+b+c}=1.$

উদাহরণ 14. $x+\dfrac{1}{y}=1$ এবং $y+\dfrac{1}{z}=1$ হইলে প্রমাণ কর যে,

(i) $z+\dfrac{1}{x}=1$ এবং (ii) $xyz+1=0.$ [বো. প্র., 1887]

প্রথমতঃ z এবং xকে y দ্বারা প্রকাশ কর।

যেহেতু $x+\dfrac{1}{y}=1$; $\therefore x=1-\dfrac{1}{y}=\dfrac{y-1}{y}$; কাজেই $\dfrac{1}{x}=\dfrac{y}{y-1}.$

আবার যেহেতু $y+\dfrac{1}{z}=1$; $\therefore \dfrac{1}{z}=1-y$; কাজেই $z=\dfrac{1}{1-y}.$

অতএব (i) $z+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{1-y}+\dfrac{y}{y-1}=\dfrac{1}{1-y}-\dfrac{y}{1-y}=\dfrac{1-y}{1-y}=1.$

এবং (ii) $xyz+1=\dfrac{y-1}{y}.y.\dfrac{1}{1-y}+1=-\dfrac{1-y}{y}.y.\dfrac{1}{1-y}+1=-1+1=0.$

উদাহরণ 15. $\dfrac{z+x}{z-x}+\dfrac{z+y}{z-y}=2$ হইলে দেখাও যে, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{z}.$

$\dfrac{z+x}{z-x}+\dfrac{z+y}{z-y}=2$; $\therefore \dfrac{z+x}{z-x}+\dfrac{z+y}{z-y}-2=0.$

অথবা $\left(\dfrac{z+x}{z-x}-1\right)+\left(\dfrac{z+y}{z-y}-1\right)=0;$

অথবা $$\frac{2x}{z-x}+\frac{2y}{z-y}=0\ ;$$

উভয় পক্ষকে $(z-x)(z-y)$ দ্বারা গুণ করিলে $2x(z-y)+2y(z-x)=0$;

অথবা $$2yz+2zx-4xy=0\ ;$$

পক্ষান্তর করিয়া $$2yz+2zx=4xy\ ;$$

উভয় পক্ষকে $2xyz$ দ্বারা ভাগ করিয়া $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}$.

প্রশ্নমালা 26

দেখাও যে,

1. $$\frac{\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}+\frac{c}{x-c}+3}{\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}}=x.$$

2. $$\frac{(y-z)(y+z)^3+(z-x)(z+x)^3+(x-y)(x+y)^3}{(y+z)(y-z)^3+(z+x)(z-x)^3+(x+y)(x-y)^3}=-1.$$

3. $$\frac{1}{yz}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+1\right)+\frac{1}{zx}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+1\right)$$
$$+\frac{1}{xy}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1\right)=0.$$

4. $$\frac{b+c}{2bc}(b^3+c^3-a^3)+\frac{c+a}{2ca}(c^3+a^3-b^3)$$
$$+\frac{a+b}{2ab}(a^3+b^3-c^3)=a^2+b^2+c^2.$$

5. $$\frac{b^m+c^m}{2b^mc^m}(b^n+c^n-a^n)+\frac{c^m+a^m}{2c^ma^m}(c^n+a^n-b^n)$$
$$+\frac{a^m+b^m}{2a^mb^m}(a^n+b^n-c^n)=a^{n-m}+b^{n-m}+c^{n-m}.$$

6. $$\frac{p}{q}+\frac{q}{r}+\frac{r}{p}-\left(\frac{p}{r}+\frac{q}{p}+\frac{r}{q}\right)=\frac{q-r}{p}\cdot\frac{r-p}{q}\cdot\frac{p-q}{r}.$$ [পা. প্র., 1902]

7. $$\frac{1}{(a+1)(a^2+1)(a^4+1)(a^8+1)}=\frac{a-1}{a^{16}-1}.$$

8. $$\frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)}=\frac{1}{\frac{1-x^{16}}{1-x}}=\frac{1}{1+x+x^2+\cdots+x^{15}}.$$

9. $\dfrac{1}{a(a+1)}+\dfrac{1}{(a+1)(a+2)}+\dfrac{1}{(a+2)(a+3)}+\dfrac{1}{(a+3)(a+4)}$

$$=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+4}.$$

10. $\dfrac{1}{a(a+x)(a+2x)}+\dfrac{1}{(a+x)(a+2x)(a+3x)}$

$$+\frac{1}{(a+2x)(a+3x)(a+4x)}=\frac{1}{2x}\left\{\frac{1}{a(a+x)}-\frac{1}{(a+3x)(a+4x)}\right\}.$$

11. $\dfrac{1}{a(a+x)(a+2x)(a+3x)}+\dfrac{1}{(a+x)(a+2x)(a+3x)(a+4x)}$

$$+\frac{1}{(a+2x)(a+3x)(a+4x)(a+5x)}$$

$$=\frac{1}{3x}\left\{\frac{1}{a(a+x)(a+2x)}-\frac{1}{(a+3x)(a+4x)\ a+5x)}\right\}.$$

12. $\dfrac{b-c}{x+bc}+\dfrac{c-a}{x+ca}+\dfrac{a-b}{x+ab}=\dfrac{x(b-c)(c-a)(a-b)}{(x+bc)(x+ca)(x+ab)}.$

13. $\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)^3+\left(\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{a}\right)^3+\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)^3=3\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)\left(\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{a}\right)\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right).$

14. $\dfrac{a^2\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)+b^2\left(\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{a}\right)+c^2\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)}{a\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)+b\left(\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{a}\right)+c\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)}=a+b+c.$

15. $\dfrac{a\left(\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{c^2}\right)+b\left(\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{a^2}\right)+c\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)}{a\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)+b\left(\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{a}\right)+c\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}.$

16. $x=\dfrac{a}{b-c},\ y=\dfrac{b}{c-a},\ z=\dfrac{c}{a-b}$ হইলে দেখাও যে,

(i) $yz+zx+xy=-1$

এবং (ii) $x+y+z+xyz=(1+x)(1+y)(1+z).$

17. দেখাও যে, $\left(\dfrac{b}{c}-\dfrac{c}{b}\right)^2+\left(\dfrac{c}{a}-\dfrac{a}{c}\right)^2+\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)^2+8$

$$=\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right).$$

(প্রশ্ন 18-23এ) $a+b+c=0$ হইলে দেখাও যে,

18. $\frac{a}{b^2c^2}+\frac{b}{c^2a^2}+\frac{c}{a^2b^2}=\frac{3}{abc}$.

19. $\frac{bc}{b^2+bc+c^2}+\frac{ca}{c^2+ca+a^2}+\frac{ab}{a^2+ab+b^2}=-1$.

20. $\frac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=0$. [মা. প্র., 1877]

21. (i) $\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}=0$;

(ii) $\frac{2a^2}{a^2-b^2-c^2}+\frac{2b^2}{b^2-c^2-a^2}+\frac{2c^2}{c^2-a^2-b^2}=3$.

22. $\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)=9$.

23. (i) $\frac{a}{2a^2+bc}+\frac{b}{2b^2+ca}+\frac{c}{2c^2+ab}=0$;

(ii) $\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ca}+\frac{c^2}{2c^2+ab}=1$;

(iii) $\frac{1}{(2a^2+bc)^3}+\frac{1}{(2b^2+ca)^3}+\frac{1}{(2c^2+ab)^3}$

$$=-\frac{3}{(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2};$$

(iv) $\frac{a^3}{2a^2+bc}+\frac{b^3}{2b^2+ca}+\frac{c^3}{2c^2+ab}=0$.

24. $bc+ca+ab=0$ হইলে দেখাও যে,

(i) $\frac{a^2}{a^2-bc}+\frac{b^2}{b^2-ca}+\frac{c^2}{c^2-ab}=1$;

(ii) $\frac{a}{a^2-bc}+\frac{b}{b^2-ca}+\frac{c}{c^2-ab}=\frac{3}{a+b+c}$;

(iii) $\frac{1}{(a^2-bc)^3}+\frac{1}{(b^2-ca)^3}+\frac{1}{(c^2-ab)^3}=\frac{3}{abc(a+b+c)^3}$.

(প্রশ্ন 25-26এ) $a+b+c=1$ হইলে দেখাও যে,

25. $\frac{a+bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{b+ca}{(b+c)(b+a)}+\frac{c+ab}{(c+a)(c+b)}=3$.

26. $\dfrac{a+bc}{bc(a+b)(a+c)}+\dfrac{b+ca}{ca(b+c)(b+a)}+\dfrac{c+ab}{ab(c+a)(c+b)}=\dfrac{1}{abc}$.

(প্রশ্ন 27-29এ) $bc+ca+ab=1$ হইলে দেখাও যে,

27. (i) $\dfrac{b+c}{1-bc}+\dfrac{c+a}{1-ca}+\dfrac{a+b}{1-ab}=\dfrac{1}{abc}$;

(ii) $\dfrac{a(b+c)}{1-bc}+\dfrac{b(c+a)}{1-ca}+\dfrac{c(a+b)}{1-ab}=3$.

28. $\dfrac{2a}{1-a^2}+\dfrac{2b}{1-b^2}+\dfrac{2c}{1-c^2}=\dfrac{2a}{1-a^2}\cdot\dfrac{2b}{1-b^2}\cdot\dfrac{2c}{1-c^2}$.

29. $\dfrac{1+a^2}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{1+b^2}{(b+c)(b+a)}+\dfrac{1+c^2}{(c+a)(c+b)}=3$.

30. $bc+ca+ab=-1$ হইলে দেখাও যে,

$$\frac{2a}{1+a^2}+\frac{2b}{1+b^2}+\frac{2c}{1+c^2}=-\frac{2a}{1+a^2}\cdot\frac{2b}{1+b^2}\cdot\frac{2c}{1+c^2}.$$

(প্রশ্ন 31-32এ) $abc=1$ হইলে দেখাও যে,

31. (i) $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)=1+(b+c)(c+a)(a+b)$

এবং ইহার সাহায্যে প্রমাণ কর যে,

(ii) $\left(\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{y}\right)\left(\dfrac{z}{y}+\dfrac{x}{z}+\dfrac{y}{x}\right)=1+\left(\dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{y}\right)\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}\right)\left(\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}\right)$.

32. $(a+b-c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)=1+(b-c)(c-a)(a+b)$.

33. $xyz=-1$ হইলে দেখাও যে,

$$(x+y-z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)=1+(x+y)(y-z)(x-z).$$

34. 103 পৃষ্ঠায় উদাহরণ 9 (ii)এ x, y এবং zএর স্থলে যথাক্রমে $\dfrac{b}{c}$, $\dfrac{c}{a}$, $\dfrac{a}{b}$ লিখিয়া 102 পৃষ্ঠার উদাহরণ 6এর অভেদটি প্রমাণ কর।

35. দেখাও যে, $\left(\dfrac{x^2}{yz}+\dfrac{yz}{x^2}\right)^2+\left(\dfrac{y^2}{zx}+\dfrac{zx}{y^2}\right)^2+\left(\dfrac{z^2}{xy}+\dfrac{xy}{z^2}\right)^2$

$$=4+\left(\frac{x^2}{yz}+\frac{yz}{x^2}\right)\left(\frac{y^2}{zx}+\frac{zx}{y^2}\right)\left(\frac{z^2}{xy}+\frac{xy}{z^2}\right).$$

36. $p=a+\frac{1}{a}$, $q=b+\frac{1}{b}$, $r=c+\frac{1}{c}$ এবং $abc=1$ হইলে দেখাও যে,
$$p^2+q^2+r^2=4+pqr.$$

(প্রশ্ন 37-39এ) $x+y+z=xyz$ হইলে দেখাও যে,

37. $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}=1+\frac{2}{(1+x)(1+y)(1+z)}$.

38. $\frac{1+x^2}{(x+y)(x+z)}+\frac{1+y^2}{(y+z)(y+x)}+\frac{1+z^2}{(z+x)(z+y)}=1.$

39. $\frac{y+z}{1-yz}+\frac{z+x}{1-zx}+\frac{x+y}{1-xy}=\frac{y+z}{1-yz}\cdot\frac{z+x}{1-zx}\cdot\frac{x+y}{1-xy}.$

[সঙ্কেত : $\frac{y+z}{1-yz}=\frac{x(y+z)}{x(1-yz)}=\frac{x(y+z)}{x-xyz}=\frac{x(y+z)}{-(y+z)}=-x.$ ইত্যাদি।]

40. $x+y+z=-xyz$ হইলে দেখাও যে,
$$\frac{2x}{1+x^2}+\frac{2y}{1+y^2}+\frac{2z}{1+z^2}=-\frac{2x}{1+x^2}\cdot\frac{2y}{1+y^2}\cdot\frac{2z}{1+z^2}.$$

41. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{xyz}{abc}$ হইলে দেখাও যে,
$$\frac{a}{a+x}+\frac{b}{b+y}+\frac{c}{c+z}=1+\frac{2abc}{(a+x)(b+y)(c+z)}.$$

[সঙ্কেত : 37 প্রশ্ন দেখ]

(প্রশ্ন 42-43এ) $bc+ca+ab=abc$ হইলে দেখাও যে,

42. $\frac{b+c}{bc(a-1)}+\frac{c+a}{ca(b-1)}+\frac{a+b}{ab(c-1)}=1.$

43. $\frac{2}{a-bc}+\frac{2}{b-ca}+\frac{2}{c-ab}=\frac{2a}{(a-bc)}\cdot\frac{2b}{(b-ca)}\cdot\frac{2c}{(c-ab)}.$

44. $bc+ca+ab=-abc$ হইলে দেখাও যে,
$$\frac{2}{a+bc}+\frac{2}{b+ca}+\frac{2}{c+ab}=-\frac{2a}{a+bc}\cdot\frac{2b}{b+ca}\cdot\frac{2c}{c+ab}.$$

45. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ হইলে দেখাও যে,

(i) $\frac{1}{a^5}+\frac{1}{b^5}+\frac{1}{c^5}=\frac{1}{a^5+b^5+c^5}=\frac{1}{(a+b+c)^5}$;

(ii) যদি n একটি অখণ্ড সংখ্যা হয়, $\frac{1}{a^{2n+1}}+\frac{1}{b^{2n+1}}+\frac{1}{c^{2n+1}}$
$$=\frac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}=\frac{1}{(a+b+c)^{2n+1}}.$$

(প্রশ্ন 46-49এ) $2s=a+b+c$ হইলে দেখাও যে,

46. $$\frac{s-a}{(s-b)(s-c)}+\frac{s-b}{(s-c)(s-a)}+\frac{s-c}{(s-a)(s-b)}=\frac{a^2+b^2+c^2-s^2}{(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

47. $$\frac{a}{s-a}+\frac{b}{s-b}+\frac{c}{s-c}+2=\frac{abc}{(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

48. $$\frac{a(b-c)(s-a)}{(s-b)(s-c)}+\frac{b(c-a)(s-b)}{(s-c)(s-a)}+\frac{c(a-b)(s-c)}{(s-a)(s-b)}=0.$$

49. $$\left(1-\frac{a}{s}\right)^3+\left(1-\frac{b}{s}\right)^3+\left(1-\frac{c}{s}\right)^3=1-\frac{3abc}{s^3}.$$

(প্রশ্ন 50-52এ) $3s=a+b+c$ হইলে দেখাও যে,

50. $$\frac{(s-a)^2}{(s-b)(s-c)}+\frac{(s-b)^2}{(s-c)(s-a)}+\frac{(s-c)^2}{(s-a)(s-b)}=3.$$

51. $$\frac{s-a}{(s-b)^2(s-c)^2}+\frac{s-b}{(s-c)^2(s-a)^2}+\frac{(s-c)}{(s-a)^2(s-b)^2}=\frac{3}{(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

52. $$\frac{1}{(s-b)^2+(s-c)^2-(s-a)^2}+\frac{1}{(s-c)^2+(s-a)^2-(s-b)^2}+\frac{1}{(s-a)^2+(s-b)^2-(s-c)^2}=0.$$

53. $x^2=by+cz,\ y^2=cz+ax,\ z^2=ax+by$ হইলে প্রমাণ কর যে,
$$\frac{a}{a+x}+\frac{b}{b+y}+\frac{c}{c+z}=1.$$

54. $x=\frac{a+1}{a-1},\ y=\frac{b+1}{b-1}$ এবং $z=\frac{c+1}{c-1}$ হইলে প্রমাণ কর যে,
$$\frac{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}{(1+yz)(1+zx)(1+xy)}=\frac{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}{(1+bc)(1+ca)(1+ab)}.$$
[মা. প্র., 1874]

55. $\frac{a}{x}(b-c)+\frac{b}{y}(c-a)+\frac{c}{z}(a-b)=0$ হইলে দেখাও যে,
$$\frac{x}{a}(y-z)+\frac{y}{b}(z-x)+\frac{z}{c}(x-y)=0.$$

[সঙ্কেত : প্রথম রাশিমালার bc, ca, ab-যুক্ত পদগুলি সংগ্রহ কর।]

56. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{b}{a}+\frac{d}{c}$ হইলে দেখাও যে, $\frac{a^3}{b^3}+\frac{c^3}{d^3}=\frac{b^3}{a^3}+\frac{d^3}{c^3}$ [মা. প্র., 1866]

57. $x=\frac{2(bc+ca+ab)}{a+b+c}$ হইলে দেখাও যে,

$$\frac{a+x}{a-x}+\frac{b+x}{b-x}+\frac{c+x}{c-x}+3=\frac{6abc}{(a-x)(b-x)(c-x)}.$$

58. $x+\frac{1}{x}=a+\frac{1}{a}$ হইলে দেখাও যে, $x^n+\frac{1}{x^n}=a^n+\frac{1}{a^n}.$

59. $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0.$$

[সঙ্কেত : প্রথম রাশিমালাকে a, b, c দ্বারা গুণ করিয়া যোগ কর।]

60. $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+3=a+b+c$ হইলে এবং $a+b+c$ শূন্য না হইলে দেখাও যে,

$$\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}+\frac{ab}{a+b}+a+b+c=bc+ca+ab.$$

ষষ্ঠ অধ্যায়

দুরূহ সরল সমীকরণ ও তদ্বিষয়ক প্রশ্নাবলী

(Harder simple Equations and Problems)

47. প্রথম খণ্ডের সপ্তম, পঞ্চদশ এবং ষোড়শ অধ্যায়ে সরল সমীকরণ এবং তদ্বিষয়ক সহজ প্রশ্নাবলী আলোচিত হইয়াছে। বর্ত্তমান অধ্যায়ে ঐগুলি অপেক্ষা জটিলতর বিষয় আলোচিত হইবে।

48. সরল সমীকরণের একাধিক বীজ থাকিতে পারে না। সরল সমীকরণের সংজ্ঞা হইতে দেখা যাইবে যে, অজ্ঞাতরাশিকে x ধরিলে যে-কোন সরল সমীকরণকে পক্ষান্তর এবং সরলতা-সম্পাদন দ্বারা '$ax+b=0$' আকারে প্রকাশ করা যায়।

পক্ষান্তরকরণ দ্বারা $ax=-b$,

উভয় পক্ষকে a দ্বারা ভাগ করিয়া $x=-\frac{b}{a}$. অতএব $-\frac{b}{a}$ সমীকরণের বীজ ;

a এবং b নির্দ্দিষ্ট-মানবিশিষ্ট ধ্রুবক রাশি বলিয়া $-\frac{b}{a}$-এর একাধিক মান সম্ভব নহে। সুতরাং ইহার একাধিক বীজ থাকিতে পারে না।

49. সমীকরণ-সমাধানের সাধারণ নিয়ম প্রথম খণ্ডের পঞ্চদশ অধ্যায়ে প্রদত্ত হইয়াছে। কোন-কোন স্থলে সমাধান সহজে নির্ণয় করা যায়। নিম্নে বিষয়টি আলোচিত হইল।

সামাধানের জন্য নিম্নলিখিত উপপাদ্যগুলি বিশেষ প্রয়োজনীয়।

উপপাদ্য 1. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হইলে $ad=bc$ হইবে।

অর্থাৎ দুইটি ভগ্নাংশ সমান হইলে **প্রথম ভগ্নাংশের লব × দ্বিতীয় ভগ্নাংশের হর = প্রথম ভগ্নাংশের হর × দ্বিতীয় ভগ্নাংশের লব।**

প্রমাণ। $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

উভয় পক্ষকে bd দ্বারা গুণ করিলে $\frac{a}{b}\times bd=\frac{c}{d}\times bd$; অথবা $ad=bc$.

উপপাদ্য 2. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হইলে $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ হইবে।

অর্থাৎ দুইটি ভগ্নাংশ সমান হইলে উহাদের বিপরীত ভগ্নাংশগুলিও পরস্পর সমান।

প্রমাণ। $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $\therefore$ $\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{1}{\frac{c}{d}}$; অতএব $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$.

উপপাদ্য 3. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হইলে $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ হইবে।

অর্থাৎ দুইটি ভগ্নাংশ সমান হইলে $\frac{\text{প্রথমটির লব}}{\text{দ্বিতীয়টির লব}}=\frac{\text{প্রথমটির হর}}{\text{দ্বিতীয়টির হর}}$।

প্রমাণ। $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

উভয় পক্ষকে $\frac{b}{c}$ দ্বারা গুণ করিলে $\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{c}{d}\times\frac{b}{c}$

অতএব $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

উপপাদ্য 4. $AX=0$ হইলে (i) হয় $A=0$, অথবা (ii) $X=0$;
অথবা (iii) $A=0$ এবং $X=0$ হইবে।

কারণ যদি A কিংবা X কোনটিই শূন্য না হয়, তাহা হইলে উহাদের গুণফল শূন্য হইতে পারে না।

উদাহরণ। সমাধান কর : $\frac{2x-1}{3x-2}=\frac{4x-3}{6x-5}$.

উপপাদ্য 1 অনুসারে $(2x-1)(6x-5)=(3x-2)(4x-3)$;
উভয় পক্ষ সরল করিয়া $12x^2-16x+5=12x^2-17x+6$;
পক্ষান্তর করিয়া $12x^2-16x-12x^2+17x=6-5$;
অথবা $x=1$.

[সমাধানের বিশুদ্ধি পরীক্ষা কর।]

প্রশ্নমালা 27

সমাধান কর :

1. $\frac{3x+1}{5x+2}=\frac{3x+5}{5x+9}$
2. $\frac{13-4x}{2x-5}=\frac{19-6x}{3x-7}$
3. $\frac{6x-7}{7-3x}=\frac{3-4x}{2x-5}$
4. $\frac{2x+a}{2x+b+c}=\frac{2x+b}{2x+a-c}$
5. $\frac{x+a}{x+b}=\frac{x+3a}{x+a+b}$ [ক. প্র., 1892]
6. $\frac{x-a}{x-b}=\frac{x-c}{x-d}$.

50. সংখ্যাত্মক-লব-বিশিষ্ট ভগ্নাংশের সমীকরণ।

উদাহরণ 1. সমাধান কর :

(i) $\frac{3}{(x-2)(x-3)}+\frac{1}{(x-3)(x-1)}+\frac{2}{(x-1)(x-2)}=0.$

(ii) $\frac{bc}{(x-b)(x-c)}+\frac{ca}{(x-c)(x-a)}+\frac{ab}{(x-a)(x-b)}=0.$

(i) হরগুলির ল. সা. গু. $(x-1)(x-2)(x-3)$ দ্বারা উভয় পক্ষকে গুণ করিয়া

$3(x-1)+(x-2)+2(x-3)=0$

সরল করিয়া $6x-11=0$;

$\therefore\ 6x=11$; অতএব $x=\frac{11}{6}=1\frac{5}{6}$.

(ii) $$\frac{bc}{(x-b)(x-c)}+\frac{ca}{(x-c)(x-a)}+\frac{ab}{(x-a)(x-b)}=0.$$

হরগুলির ল.সা. গু. $=(x-a)(x-b)(x-c)$; ইহা দ্বারা উভয় পক্ষকে গুণ করিলে

$bc(x-a)+ca(x-b)+ab(x-c)=0.$

সরল করিয়া $(bc+ca+ab)x-3abc=0.$

পক্ষান্তরকরণ দ্বারা $(bc+ca+ab)x=3abc$;

অতএব $$x=\frac{3abc}{bc+ca+ab}.$$

উদাহরণ 2. সমাধান কর :

$$\frac{1}{(x+3)(x+4)}+\frac{1}{(x+3)(x+5)}=\frac{1}{(x+3)(x+6)}+\frac{1}{(x+4)(x+5)}.$$

নিয়ম। ভগ্নাংশগুলিকে সমীকরণের এক-এক পক্ষে এরূপে সাজাও, যেন বামপক্ষের হরগুলির একটি সাধারণ গুণনীয়ক থাকে এবং দক্ষিণপক্ষের হরগুলিরও একটি সাধারণ গুণনীয়ক থাকে।

পক্ষান্তর করিয়া

$$\frac{1}{(x+3)(x+4)}-\frac{1}{(x+4)(x+5)}=\frac{1}{(x+3)(x+6)}-\frac{1}{(x+3)(x+5)}$$

অথবা $$\frac{1}{x+4}\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+5}\right)=\frac{1}{x+3}\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+5}\right).$$

সরল করিয়া $$\frac{2}{(x+3)(x+4)(x+5)}=\frac{-1}{(x+3)(x+5)(x+6)}.$$

উভয় পক্ষকে হরগুলির ল. সা. গু. $(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)$ দ্বারা গুণ করিলে

$2(x+6)=-(x+4)$;

অথবা $2x+12=-x-4$;

অথবা $3x=-16$; $\therefore\ x=-\frac{16}{3}=-5\frac{1}{3}$.

উদাহরণ 3. সমাধান কর : $\frac{1}{x-7}+\frac{1}{x-11}=\frac{1}{x-13}+\frac{1}{x-5}$.

নিয়ম। ভগ্নাংশগুলিকে সমীকরণের উভয়পক্ষে এরূপভাবে স্থাপন কর, যেন পক্ষদ্বয়কে সরল করিলে উহাদের লবে x-যুক্ত পদ লোপ পায়।

পক্ষান্তর করিয়া $\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x-5}=\frac{1}{x-13}-\frac{1}{x-11}$

সরল করিয়া $\frac{2}{(x-5)(x-7)}=\frac{2}{(x-11)(x-13)}$

2 দ্বারা ভাগ করিয়া $\frac{1}{(x-5)(x-7)}=\frac{1}{(x-11)(x-13)}$

অথবা $(x-11)(x-13)=(x-5)(x-7)$, [উপপাদ্য 1]

গুণ করিয়া $x^2-24x+143=x^2-12x+35$;

অথবা. $-24x+143=-12x+35$;

পক্ষান্তর করিয়া $-24x+12x=35-143$;

অথবা $-12x=-108$; $\therefore\ x=9$.

[অন্য প্রকার সমাধান]

প্রদত্ত সমীকরণের পক্ষদ্বয়কে সরল করিয়া

$$\frac{2x-18}{(x-7)(x-11)}=\frac{2x-18}{(x-13)(x-5)},$$

অথবা $$\frac{2x-18}{x^2-18x+17}=\frac{2x-18}{x^2-18x+65};$$

বিয়োগ করিয়া $(2x-18)\left\{\frac{1}{x^2-18x+77}-\frac{1}{x^2-18x+65}\right\}=0$.

অতএব হয় $2x-18=0$, অথবা $\frac{1}{x^2-18x+77}-\frac{1}{x^2-18x+65}=0$,

[উপপাদ্য 4, অনু. 49]

কিন্তু $\frac{1}{x^2-18x+77}-\frac{1}{x^2-18x+65}=0$ হইতে পারে না ; কারণ,

ঐরূপ হইলে $$\frac{1}{x^2-18x+77}=\frac{1}{x^2-18x+65};$$

অথবা $x^2-18x+77=x^2-18x+65$;

অথবা (উভয় পক্ষ হইতে x^2-18x বাদ দিয়া) $77=65$; কিন্তু ইহা অসম্ভব। অতএব $2x-18=0$; $\therefore\ x=9$.

প্রশ্নমালা 28

সমাধান কর :

1. $\frac{1}{(x-3)(x-4)}+\frac{2}{(x-4)(x-2)}+\frac{3}{(x-2)(x-3)}=0$

2. $\frac{3}{(x-5)(x-7)}+\frac{2}{(x-7)(x-3)}-\frac{4}{(x-3)(x-5)}=0$

3. $\frac{7}{x^2+5x+6}+\frac{4}{x^2+4x+3}+\frac{3}{x^2+3x+2}=0$

4. $\frac{p}{(x-b)(x-c)}+\frac{q}{(x-c)(x-a)}+\frac{r}{(x-a)(x-b)}=0.$

5. $\frac{1}{(x+1)(x+3)}-\frac{1}{(x+3)(x+4)}=\frac{1}{(x+2)(x+4)}-\frac{1}{(x+1)(x+2)}$

6. $\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{(x+1)(x+4)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}$

7. $\frac{1}{(x+1)(x+3)}+\frac{1}{(x+4)(x+1)}=\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+2)(x+4)}$

8. $\frac{1}{x^2+7x+12}+\frac{1}{x^2+8x+15}=\frac{1}{x^2+9x+18}+\frac{1}{x^2+9x+20}$

9. $\frac{1}{x^2+5x+6}+\frac{1}{x^2+6x+8}=\frac{1}{x^2+7x+10}+\frac{1}{x^2+7x+12}$

10. $\frac{1}{(x+b)(x+c)}-\frac{1}{(x+c)(x+d)}=\frac{1}{(x+d)(x+a)}-\frac{1}{(x+b)(x+d)}$

উদাহরণ 3এ প্রদত্ত উভয় প্রণালী দ্বারা সমাধান কর :

11. $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-4}$

12. $\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x-7}=\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-8}$

13. $\frac{1}{x+2a}+\frac{1}{x+5a}=\frac{1}{x+3a}+\frac{1}{x+4a}$

14. $\frac{1}{2x-3}+\frac{1}{2x-5}=\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{2x-9}$

15. $\frac{3}{3x-2}+\frac{2}{2x+1}=\frac{3}{3x+1}+\frac{2}{2x-1}$

51. ভাগ-দ্বারা-সরলীকরণ। যদি সমীকরণস্থ ভগ্নাংশে লবের মাত্রা হরের মাত্রা অপেক্ষা কম না হয়, তাহা হইলে কখন কখন লবকে হর দ্বারা ভাগ করিয়া সমীকরণটিকে সহজ আকারে প্রকাশ করা হয় এবং ইহাতে বীজ-নির্ণয়ের সুবিধা হয়।

উদাহরণ 1. সমাধান কর : $\dfrac{4x^2+8x+17}{2x+3}=\dfrac{6x^2+11x+24}{3x+4}$.

$$\frac{4x^2+8x+17}{2x+3}=\frac{6x^2+11x+24}{3x+4}.$$

ভাগ দ্বারা $$(2x+1)+\frac{14}{2x+3}=(2x+1)+\frac{20}{3x+4};$$

উভয় পক্ষ হইতে $2x+1$ বাদ দিয়া $$\frac{14}{2x+3}=\frac{20}{3x+4},$$

উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করিয়া $$\frac{7}{2x+3}=\frac{10}{3x+4}$$

উপপাদ্য 1 দ্বারা $$7(3x+4)=10(2x+3);$$

অথবা $$21x+28=20x+30;$$

পক্ষান্তর করিয়া $$21x-20x=30-28;$$

অর্থাৎ $$x=2.$$

উদাহরণ 2. সমাধান কর : $\dfrac{4x^3+16x^2+17x+8}{2x^3+5x^2+4x+2}=\dfrac{2x+5}{x+1}$.

(114 পৃষ্ঠার) উপপাদ্য 3 দ্বারা $$\frac{4x^3+16x^2+17x+8}{2x+5}=\frac{2x^3+5x^2+4x+2}{x+1}$$

ভাগ দ্বারা $$2x^2+3x+1+\frac{3}{2x+5}=2x^2+3x+1+\frac{1}{x+1};$$

উভয় পক্ষ হইতে $2x^2+3x+1$ বাদ দিয়া $$\frac{3}{2x+5}=\frac{1}{x+1};$$

(114 পৃষ্ঠার) উপপাদ্য (1) দ্বারা $$3(x+1)=(2x+5);$$

অথবা $$3x+3=2x+5;$$

পক্ষান্তর করিয়া $$x=2.$$

দ্রষ্টব্য। এস্থলে প্রথম খণ্ডের সপ্তম এবং পঞ্চদশ অধ্যায়ে প্রদত্ত নিয়ম এবং উদাহরণগুলিও দেখ।

উদাহরণ 3. সমাধান কর : $$\frac{6x-11}{x-2}+\frac{2x-5}{x-3}=8.$$

লবকে হর দ্বারা ভাগ করিয়া $6+\frac{1}{x-2}+2+\frac{1}{x-3}=8$;

$$\text{অর্থাৎ, } \frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+8=8 ;$$

উভয় পক্ষ হইতে 8 বাদ দিলে সমীকরণটি এইরূপ দাঁড়াইল :

$$\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}=0 ;$$

উভয় পক্ষকে $(x-2)(x-3)$ দ্বারা গুণ করিয়া $(x-3)+(x-2)=0$;

অর্থাৎ $2x-5=0$; অর্থাৎ $2x=5$; $\therefore\ x=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$.

উদাহরণ 4. সমাধান কর : $\frac{x^2-24}{x-5}-\frac{x^2-8x-8}{x-9}=\frac{6x-41}{x-7}-\frac{2x-21}{x-11}$.

প্রত্যেক ভগ্নাংশের লবকে উহার হর দিয়া ভাগ করিলে

$$x+5+\frac{1}{x-5}-\left(x+1+\frac{1}{x-9}\right)=6+\frac{1}{x-7}-\left(2+\frac{1}{x-11}\right) ;$$

অথবা $$4+\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-9}=4+\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x-11},$$

উভয় পক্ষ হইতে 4 বাদ দিলে সমীকরণটি এইরূপ দাঁড়ায় :

$$\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-9}=\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x-11}$$

সরল করিয়া $$\frac{-4}{(x-5)(x-9)}=\frac{-4}{(x-7)(x-11)},$$

-4 দিয়া ভাগ করিয়া $$\frac{1}{(x-5)(x-9)}=\frac{1}{(x-7)(x-11)}$$

$$\therefore\quad (x-7)(x-11)=(x-5)(x-9),$$

[উপপাদ্য 1, 49 অনু.]

গুণ দ্বারা $$x^2-18x+77=x^2-14x+45 ;$$

উভয় পক্ষ হইতে x^2 বাদ দিয়া এবং পক্ষান্তর করিয়া

$-18x+14x=45-77$; অর্থাৎ $-4x=-32$, $\therefore\ x=8$.

প্রশ্নমালা 29

সমাধান কর :

1. $\frac{3x+7}{x+2}=\frac{9x+13}{3x+4}$ 2. $\frac{4x-5}{2x-3}=\frac{9-6x}{4-3x}$

3. $\frac{x^2+11x+13}{x+10}=\frac{x^2+3x+3}{x+2}$

4. $\frac{4x^2+5x-5}{4x-3}=\frac{5x^2+8x-1}{5x-2}$

5. $\frac{x^3-2x^2-2x-2}{x-3}=\frac{6+4x+4x^2-x^3}{5-x}$

6. $\frac{x^2+7x+8}{x^2+19x+23}=\frac{x+6}{x+18}$ 7. $\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2=\frac{x+2}{x+4}$

8. $\frac{(x+1)(x+6)}{(x+3)(x+5)}=\frac{x+7}{x+8}$ 9. $\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{m-bpx-apx^2}{n-dpx-cpx^2}$

10. $\frac{ax^2+bx+e}{cx^2+dx+e}=\frac{ax+b}{cx+d}$ 11. $\frac{x+n}{x+m}=\left(\frac{2x+n+r}{2x+m+r}\right)^2$

[পা. প্র., 1883]

12. $\frac{4x^4+4x^3-29x^2+23x-2}{6x^4+x^3-56x^2+52x-6}=\frac{2x-3}{3x-7}$

13. $\frac{x+2}{x-3}+\frac{x-2}{x-6}=2$ 14. $\frac{ax}{x-b}+\frac{bx}{x-a}=a+b$

15. $\frac{2x-1}{x-1}-\frac{3x-14}{x-5}=\frac{2x-5}{x-3}-\frac{3x-20}{x-7}$

16. $\frac{3x-5}{x-2}-\frac{2x-7}{x-4}=\frac{2x-11}{x-6}-\frac{x-7}{x-8}$

17. $\frac{6x-7}{2x-3}-\frac{2x-1}{x-1}=\frac{10x+27}{2x+5}-\frac{4x+13}{x+3}$

18. $\frac{2x+11}{x+5}-\frac{9x-9}{3x-4}=\frac{4x+13}{x+3}-\frac{15x-47}{3x-10}$ [ক. প্র., 1890]

19. $\frac{x^2-x-2}{x-2}+\frac{2x^2-x-1}{x-1}=\frac{4x^2+x-3}{x+1}$ [বো. প্র., 1924]

20. $\frac{x^2+3}{x-1}+\frac{x^2-x+3}{x-2}=\frac{2(x-2)^2-9}{x-5}$

21. $\frac{x^2+5x+5}{x+4}-\frac{x^2-6x-6}{x-7}=\frac{x^2-4x-4}{x-5}-\frac{x^2-15x-15}{x-16}$.

52. সুবিধাজনক পদবিন্যাস এবং পক্ষান্তরকরণ দ্বারা সমীকরণ সমাধান। কখন-কখন সমীকরণের পক্ষদ্বয়কে সুবিধাজনক অংশে বিভক্ত করিয়া লইলে কিংবা কোন রাশি উভয় পক্ষে যোগ করিলে সমাধান সহজ হয়।

উদাহরণ 1. সমাধান কর :

$$\frac{x-(b+c)}{a}+\frac{x-(c+a)}{b}+\frac{x-(a+b)}{c}=3.$$

যেহেতু $3=1+1+1$;

অতএব $$\frac{x-(b+c)}{a}+\frac{x-(c+a)}{b}+\frac{x-(a+b)}{c}=1+1+1.$$

পক্ষান্তর করিয়া এবং পদগুলিকে সাজাইয়া

$$\left\{\frac{x-(b+c)}{a}-1\right\}+\left\{\frac{x-(c+a)}{b}-1\right\}+\left\{\frac{x-(a+b)}{c}-1\right\}=0;$$

অথবা $$\frac{x-(b+c)-a}{a}+\frac{x-(c+a)-b}{b}+\frac{x-(a+b)-c}{c}=0;$$

অথবা $$\frac{x-(a+b+c)}{a}+\frac{x-(a+b+c)}{b}+\frac{x-(a+b+c)}{c}=0;$$

অথবা $$\{x-(a+b+c)\}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=0$$

a, b এবং cএর মানগুলির কোন সম্বন্ধ প্রদত্ত হয় নাই ; সুতরাং

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ নহে, ধরা যাইতে পারে ;

$\therefore\ x-(a+b+c)=0$; অতএব $x=(a+b+c)$.

উদাহরণ 2. সমাধান কর :

$$\frac{x+a^2+2bc}{b-c}+\frac{x+b^2+2ca}{c-a}+\frac{x+c^2+2ab}{a-b}=0.$$

যেহেতু $(b-c)+(c-a)+(a-b)=0$;

অতএব যোগ দ্বারা $$\left\{\frac{x+a^2+2bc}{b-c}+(b-c)\right\}$$

$$+\left\{\frac{x+b^2+2ca}{c-a}+(c-a)\right\}+\left\{\frac{x+c^2+2ab}{a-b}+(a-b)\right\}=0.$$

অথবা $\dfrac{x+a^2+2bc+(b-c)^2}{b-c}+\dfrac{x+b^2+2ca+(c-a)^2}{c-a}$
$$+\frac{x+c^2+2ab+(a-b)^2}{a-b}=0\,;$$

অথবা $\dfrac{x+a^2+b^2+c^2}{b-c}+\dfrac{x+a^2+b^2+c^2}{c-a}+\dfrac{x+a^2+b^2+c^2}{a-b}=0\,;$

অথবা $(x+a^2+b^2+c^2)\left(\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{c-a}+\dfrac{1}{a-b}\right)=0\,;$

যদি $\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{c-a}+\dfrac{1}{a-b}$ শূন্য (0) না হয়,

$(x+a^2+b^2+c^2)=0$; অতএব $x=-(a^2+b^2+c^2)$.

উদাহরণ 3. সমাধান কর : $\dfrac{3}{10x+9}+\dfrac{4}{45x+2}=\dfrac{7}{18x+5}$.

[মা. প্র., 1884]

$3+4=7$; অর্থাৎ বামপক্ষের লবগুলির সমষ্টি = দক্ষিণপক্ষের লব ।

$$\frac{3}{10x+9}+\frac{4}{45x+2}=\frac{7}{18x+5}=\frac{3+4}{18x+5}\,;$$

অর্থাৎ $\dfrac{3}{10x+9}+\dfrac{4}{45x+2}=\dfrac{3}{18x+5}+\dfrac{4}{18x+5}\,;$

পক্ষান্তরকরণ দ্বারা একই লববিশিষ্ট ভগ্নাংশগুলিকে একত্র করিয়া

$$\left(\frac{3}{10x+9}-\frac{3}{18x+5}\right)+\left(\frac{4}{45x+2}-\frac{4}{18x+5}\right)=0\,;$$

সরল করিয়া $\dfrac{54x+15-30x-27}{(10x+9)(18x+5)}+\dfrac{72x+20-180x-8}{(18x+5)(45x+2)}=0\,;$

অর্থাৎ $\dfrac{12(2x-1)}{(10x+9)(18x+5)}-\dfrac{12(9x-1)}{18x+5)(45x+2)}=0\,;$

উভয় পক্ষকে 12 দ্বারা ভাগ এবং $(10x+9)(18x+5)(45x+2)$ দ্বারা গুণ করিয়া

$$(2x-1)(45x+2)-(10x+9)(9x-1)=0\,;$$

সরল করিয়া $(90x^2-41x-2)-(90x^2+71x-9)=0\,;$

অথবা, $-112x+7=0\,;$

অর্থাৎ $-112x=-7\,;\quad \therefore\ x=\dfrac{-7}{-112}=\dfrac{1}{16}$.

53. একই হর কিংবা সদৃশ হর-বিশিষ্ট পদগুলিকে একত্র করিলে কখন-কখন সমাধান সহজে পাওয়া যায়।

উদাহরণ 4. সমাধান কর : $\frac{4x+3}{9}+\frac{29-7x}{12-5x}=\frac{8x+19}{18}$. [ক. প্র., 1868]

সংখ্যাত্মক হর-বিশিষ্ট পদগুলিকে একত্রিত করিয়া

$$\frac{29-7x}{12-5x}=\frac{8x+19}{18}-\frac{4x+3}{9}=\frac{8x+19-(8x+6)}{18};$$

অর্থাৎ $\frac{29-7x}{12-5x}=\frac{13}{18}$;

অতএব $18(29-7x)=13(12-5x)$;

গুণ দ্বারা $522-126x=156-65x$;

পক্ষান্তর করিয়া $-126x+65x=156-522$;

অর্থাৎ $-61x=-366$;

$\therefore \quad x=6.$

প্রশ্নমালা 30

52 অণুচ্ছেদের উদাহরণ 1এর প্রণালীতে সমাধান কর :

1. $\frac{x-a}{b+c}+\frac{x-b}{c+a}+\frac{x-c}{a+b}=3.$

2. $\frac{x+a}{b+c}+\frac{x+b}{c+a}+\frac{x+c}{a+b}=-3.$

3. $\frac{x-bc}{b+c}+\frac{x-ca}{c+a}+\frac{x-ab}{a+b}=a+b+c.$

4. $\frac{bc(ax-1)}{b+c}+\frac{ca(bx-1)}{c+a}+\frac{ab(cx-1)}{a+b}=a+b+c.$

5. $\frac{x-p^3}{q^2+r^2-qr}+\frac{x-q^3}{r^2+p^2-rp}+\frac{x-r^3}{p^2+q^2-pq}=2(p+q+r)$

6. $\frac{x-4}{(x-1)(x-3)}+\frac{x-7}{(x-1)(x-6)}+\frac{x-9}{(x-3)(x-6)}=\frac{3}{x}.$ [মা. প্র., 1874]

7. $\frac{x-b-c}{(x-b)(x-c)}+\frac{x-c-a}{(x-c)(x-a)}+\frac{x-a-b}{(x-a)(x-b)}=\frac{3}{x}.$

52 অনুচ্ছেদের উদাহরণ 2এর প্রণালীতে সমাধান কর :

8. $\frac{x+a^2+2c^2}{b+c}+\frac{x+b^2+2a^2}{c+a}+\frac{x+c^2+2b^2}{a+b}=0$

9. $\frac{x-a^2-2c^2}{b+c}+\frac{x-b^2-2a^2}{c+a}+\frac{x-c^2-2b^2}{a+b}=0$

10. $\frac{x-a^3-2c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{x-b^3-2a^3}{c^2+ca+a^2}+\frac{x-c^3-2b^3}{a^2+ab+b^2}=0$

11. $\frac{x-abc(a+2c)}{bc}+\frac{x-abc(b+2a)}{ca}+\frac{x-abc(c+2b)}{ab}=0$

[সঙ্কেত : $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)$ বিয়োগ কর।]

12. $\frac{2(x+a^2)+(b+c)^2}{b-c}+\frac{2(x+b^2)+(c+a)^2}{c-a}+\frac{2(x+c^2)+(a+b)^2}{a-b}=0$

52 অনুচ্ছেদের উদাহরণ 3এর প্রণালীতে সমাধান কর :

13. $\frac{4}{x+1}+\frac{5}{x+3}=\frac{9}{x-1}$

14. $\frac{2}{x+7}+\frac{3}{x+9}-\frac{5}{x+5}=0.$

15. $\frac{3}{2x+3}+\frac{4}{2x+5}=\frac{7}{2x+11}$

16. $\frac{5}{3x-13}+\frac{8}{3x-10}=\frac{13}{3x-7}$

17. $\frac{l}{ax+b}+\frac{m}{ax+c}=\frac{l+m}{ax+d}$

18. $\frac{p+q}{ax+b}+\frac{p-q}{ax-b}=\frac{2p}{ax+c}$

19. $\frac{1}{x+2}+\frac{3}{x+3}+\frac{5}{x+5}=\frac{9}{x+4}$

20. $\frac{1}{x-6}+\frac{2}{x+3}+\frac{3}{x-2}=\frac{6}{x-1}$

21. $\frac{x-5}{(x-2)(x-3)}+\frac{x-7}{(x-3)(x-4)}+\frac{x-6}{(x-4)(x-2)}=\frac{3}{x}$

22. $\frac{x-b-c}{(x-b)(x-c)}+\frac{x-c-a}{(x-c)(x-a)}+\frac{x-a-b}{(x-a)(x-b)}=\frac{3x-3}{x^2-x}$

23. $\frac{3x-5}{(3x-2)(3x-4)}+\frac{3x-8}{(3x-2)(3x-7)}+\frac{3x-10}{(3x-4)(3x-7)}=\frac{3}{3x-1}$

24. $\frac{b+c}{x+3a}+\frac{c+a}{x+3b}+\frac{a+b}{x+3c}+\frac{6(bc+ca+ab)x+27abc}{(x+3a)(x+3b)(x+3c)}=\frac{2(a+b+c)}{x}$

124 পৃষ্ঠার উদাহরণ 4এর প্রণালীতে সমাধান কর :

25. $\frac{a-x^2}{bx}-\frac{b-x}{c}=\frac{c-x}{b}-\frac{b-x^2}{cx}$ [ক. প্র., 1886]

26. $\frac{6-5x}{5}-\frac{3}{14}\left(\frac{7-2x^2}{x-1}\right)-1\frac{1}{10}=\frac{1+3x}{7}-x+\frac{1}{35}$ [মা. প্র., 1867]

27. $\frac{5x+17}{18}-\frac{5x-9}{11x-8}+\frac{1}{6}=\frac{10x+29}{36}$

28. $\frac{bc-ad}{c(cx+d)}+\frac{c}{a}-\frac{c}{a}\cdot\frac{x^2+x+1}{x(x+1)}=\frac{c}{a}\cdot\frac{x^2+x-1}{x(x+1)}-\frac{a}{c}$.

54. (i) **দশমিক ভগ্নাংশযুক্ত সমীকরণ।** প্রয়োজন হইলে দশমিক ভগ্নাংশকে সামান্য ভগ্নাংশে পরিবর্তিত করিয়া লইবে।

উদাহরণ 1. সমাধান কর : $7{\cdot}35x+4{\cdot}5=11{\cdot}1x-6{\cdot}75$.

পক্ষান্তর করিয়া $7{\cdot}35x-11{\cdot}1x=-6{\cdot}75-4{\cdot}5$;

অথবা $-3{\cdot}75x=-11{\cdot}25$;

$$\therefore\ x=\frac{-11{\cdot}25}{-3{\cdot}75}=3.$$

উদাহরণ 2. সমাধান কর : $\cdot5(x-1)+\cdot\dot{3}(x+5)=\cdot1\dot{6}(x+18)$.

$$\cdot5=\frac{5}{10}=\frac{1}{2};\ \cdot\dot{3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3};\ \cdot1\dot{6}=\frac{16-1}{90}=\frac{1}{6};$$

অতএব, $\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{3}(x+5)=\frac{1}{6}(x+18)$;

উভয় পক্ষকে (হরগুলির ল. সা. গু.) 6 দ্বারা গুণ করিয়া

$3(x-1)+2(x+5)=(x+18)$;

অর্থাৎ $5x+7=x+18$;

পক্ষান্তর করিয়া $4x=11$;

$$\therefore\ x=\tfrac{11}{4}=2\tfrac{3}{4}=2{\cdot}75.$$

(ii) **অবিরত ভগ্নাংশযুক্ত সমীকরণ।**

উদাহরণ। সমাধান কর : $x+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}=\frac{3x+2}{3}$.

সরল করিয়া দেখা যাইবে যে,

$$\text{বামপক্ষ} = x + \frac{1+x}{1+2x} \text{ এবং দক্ষিণপক্ষ} = x + \frac{2}{3};$$

অতএব $$x + \frac{1+x}{1+2x} = x + \frac{2}{3};$$

অর্থাৎ $$\frac{1+x}{1+2x} = \frac{2}{3};$$

$\therefore$ $$3(1+x) = 2(1+2x);$$

অর্থাৎ $$3 + 3x = 2 + 4x;$$

পক্ষান্তর করিয়া $$-x = -1, \text{ অর্থাৎ } x = 1.$$

প্রশ্নমালা 31

সমাধান কর :

1. $2.5(x-1) - 0.2(x-3) + 7.7(x-2) = 0$

2. $\dfrac{1.5(x-.4)}{10.5} - \dfrac{.2(x-2.71)}{1.4} = x + 8.1$

3. $.\dot{2}x - 1.\dot{4} - .\dot{0}\dot{9}(x-1) = .125x + .25x - 3$

4. $\dfrac{.5}{2x} - \dfrac{.12}{4x} + \dfrac{.3}{6x} = 1.32$

5. $\dfrac{2.25}{.5x+2} = \dfrac{5.5}{.\dot{6}x + .0\dot{3}}$

6. $\dfrac{x}{3x - .\dot{3}} = \dfrac{15x + 3.5}{45x - .5}$ [পা. প্র., 1921]

7. $\dfrac{4.05}{9x} - \dfrac{1.8}{x} = \dfrac{.3}{8-2x} - \dfrac{3.6}{2.4-6x}$

8. $\dfrac{3\frac{1}{2}}{x} + \dfrac{.5}{x} = \dfrac{2.2 - \frac{1}{x}}{2.5}$ [পা. প্র., 1924]

9. $\dfrac{3.25 - x}{x - 2.5} = \dfrac{3\frac{1}{8} - x}{x - 2.\dot{3}}$

10. $\dfrac{2}{3x - 1.\dot{6}} - \dfrac{.2}{.6x - 1} = \dfrac{1}{3x - 2.5}$

11. $\dfrac{1.35}{3x} - \dfrac{.3}{.8 - 2x} = \dfrac{3.6}{2x} - \dfrac{3.6}{2.4 - 6x}$

12. $1=\dfrac{3}{4-\dfrac{3}{4-x}}$ 13. $\dfrac{6}{7-\dfrac{6}{7-\dfrac{6}{7-x}}}=1.$ [বো. প্র., 1891]

14. $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{x}}}=\frac{3}{7}$ 15. $x+\dfrac{2}{3+\dfrac{4}{5-\dfrac{1}{x}}}=\dfrac{5x+2}{5}.$

সরল-সমীকরণ-বিষয়ক প্রশ্নাবলী

55. প্রথম খণ্ডের সপ্তম এবং ষোড়শ অধ্যায়ে সরল সমীকরণ-বিষয়ক প্রশ্নাবলী আলোচিত হইয়াছে। নিম্নে আরও কয়েকটি উদাহরণ প্রদত্ত হইল।

উদাহরণ 1. 386কে এমন চারি অংশে বিভক্ত কর, যেন প্রথম অংশের সহিত 4 যোগ, দ্বিতীয় অংশ হইতে 5 বিয়োগ, তৃতীয় অংশকে 6 দ্বারা গুণ এবং চতুর্থ অংশকে 7 দ্বারা ভাগ করিলে ফল প্রত্যেক স্থলে সমান হইবে।

মনে কর, ফল প্রত্যেক স্থলে x হইল। অতএব প্রথম অংশ $=x-4$;

দ্বিতীয় অংশ $=x+5$; তৃতীয় অংশ $=\frac{x}{6}$ এবং চতুর্থ অংশ $=7x$;

যেহেতু এই চারি অংশের যোগফল $=386$;

অতএব $(x-4)+(x+5)+\frac{x}{6}+7x=386$;

সরল করিয়া $\dfrac{55x}{6}+1=386$;

পক্ষান্তর করিয়া $\dfrac{55x}{6}=385$; $\therefore\ x=385\times\dfrac{6}{55}=42.$

অতএব প্রথম অংশ $=x-4=42-4=38$;

দ্বিতীয় অংশ $=x+5=42+5=47$;

তৃতীয় অংশ $\dfrac{x}{6}=\dfrac{42}{6}=7$; চতুর্থ অংশ $=7x=7\times42=294.$

[সমাধানের বিশুদ্ধি-পরীক্ষা কর]

উদাহরণ 2. একটি তিন অঙ্ক-বিশিষ্ট সংখ্যাকে উল্টাইয়া লিখিলে মানের পরিবর্ত্তন হয় না। ইহার এককাঙ্ক দশকাঙ্ক অপেক্ষা 2 বেশী হইলে এবং অঙ্কগুলির সমষ্টি 7 হইলে সংখ্যাটি কত ?

স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, এককাঙ্ক এবং শতকাঙ্ক পরস্পর সমান। মনে কর দশকাঙ্ক $=x$; তাহা হইলে এককাঙ্ক কিংবা শতকাঙ্ক $=x+2$; অঙ্ক তিনটির সমষ্টি $=7$;

$\therefore \ (x+2)+x+(x+2)=7$; অর্থাৎ, $3x+4=7$;

অর্থাৎ, $3x=3$; $\quad \therefore \ x=1.$

অতএব দশকাঙ্ক $=1$; কাজেই এককাঙ্ক বা শতকাঙ্ক $=1+2=3.$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $=313.$

উদাহরণ 3. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ উহার সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের বাহু অপেক্ষা যথাক্রমে 3 গজ বেশী এবং 2 গজ কম। আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ নির্ণয় কর।

মনে কর বর্গক্ষেত্রটির বাহু $=x$ গজ ;

তাহা হইলে আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য $=(x+3)$ গজ এবং প্রস্থ $=(x-2)$ গজ।

যেহেতু ক্ষেত্র দুইটির ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান ;

অতএব $\quad (x+3)(x-2)=x^2$;

সরল করিয়া $x^2+x-6=x^2$;

উভয় পক্ষ হইতে x^2 বাদ দিয়া $x-6=0$;

$\therefore \ x=6.$

$\therefore$ নির্ণেয় দৈর্ঘ্য $=(x+3)$ বা 9 গজ ; প্রস্থ $=(x-2)$ বা 4 গজ।

উদাহরণ 4. কোন ব্যক্তি একটি ঘড়ি 20% লাভে বিক্রয় করিল। ক্রয়-মূল্য 5 টাকা কম এবং বিক্রয়-মূল্য $7\frac{1}{2}$ টাকা বেশী হইলে তাহার 50% লাভ হইত। ঘড়িটির ক্রয়মূল্য কত ?

[শতকরা লাভ এবং ক্ষতির প্রশ্নে নিম্নলিখিত বিষয় মনে রাখা সুবিধাজনক। যদি একটি জিনিষের ক্রয়-মূল্য x এবং উহা বিক্রয় দ্বারা $a\%$ লাভ হয়, তাহা হইলে

$$\text{বিক্রয়-মূল্য} = \text{ক্রয়-মূল্য} + \text{লাভ} = x + \frac{a}{100}x = \left(1+\frac{a}{100}\right)x.$$

যদি জিনিষটির ক্রয়মূল্য x এবং উহা বিক্রয় দ্বারা $b\%$ ক্ষতি হয় তাহা হইলে

বিক্রয়-মূল্য = ক্রয়-মূল্য − ক্ষতি $= x - \dfrac{bx}{100} = \left(1 - \dfrac{b}{100}\right)x.$

মনে কর, ঘড়িটির ক্রয়-মূল্য $= x$ টাকা।

সুতরাং বিক্রয়-মূল্য $= (1 + \frac{20}{100})x$ টাকা বা $\dfrac{6x}{5}$ টাকা ;

প্রশ্ন হইতে দেখা যাইতেছে যে, ক্রয়-মূল্য $(x-5)$ টাকা এবং বিক্রয়-মূল্য $\left(\dfrac{6x}{5} + 7\frac{1}{2}\right)$ টাকা হইলে 50% লাভ হইত।

অতএব $\dfrac{6x}{5} + 7\frac{1}{2} = (1 + \frac{50}{100})(x-5) = \frac{3}{2}(x-5)$;

উভয় পক্ষকে 10 দ্বারা গুণ করিয়া $12x + 75 = 15(x-5)$

পক্ষান্তর করিয়া $-3x = -75 - 75 = -150$; $\therefore\ x = 50.$

অতএব ঘড়ির ক্রয়-মূল্য = 50 টাকা।

উদাহরণ 5. দুই পাত্রে দুই প্রকার জল-মিশ্রিত দুধ আছে। প্রথম পাত্রে 8 সের দুধের সহিত 12 সের জল এবং দ্বিতীয় পাত্রে 14 সের দুধের সহিত 6 সের জল মিশ্রিত আছে। প্রথম পাত্রের 1 সেরের সহিত দ্বিতীয় পাত্রের কত সের মিশ্রিত করিলে দুধের পরিমাণ জলের $2\frac{1}{12}$ গুণ হইবে ?

মনে কর, দ্বিতীয় পাত্র হইতে গৃহীত দুধের পরিমাণ $= x$ সের।

প্রথম পাত্রে মোট $(8+12)$ বা 20 সেরে দুধের পরিমাণ = 8 সের ;

অতএব প্রথম পাত্র হইতে গৃহীত 1 সেরে দুধ আছে $\frac{8}{20}$ সের অর্থাৎ $\frac{2}{5}$ সের এবং জল আছে অবশিষ্ট $(1 - \frac{2}{5})$ বা $\frac{3}{5}$ সের।

দ্বিতীয় পাত্রের মোট $(14+6)$ বা 20 সেরে দুধের পরিমাণ = 14 সের ;

" " " x সেরে দুধের পরিমাণ $= \dfrac{14}{20}x$ সের বা $\dfrac{7x}{10}$ সের এবং উহাতে জলের পরিমাণ অবশিষ্ট $\left(x - \dfrac{7x}{10}\right)$ বা $\dfrac{3x}{10}$ সের।

অতএব শেষোক্ত মিশ্রিত দুধে দুধের পরিমাণ $= \left(\dfrac{2}{5} + \dfrac{7x}{10}\right)$ সের এবং জলের পরিমাণ $= \left(\dfrac{3}{5} + \dfrac{3x}{10}\right)$ সের। প্রশ্নানুসারে $\dfrac{2}{5} + \dfrac{7x}{10} = \left(\dfrac{3}{5} + \dfrac{3x}{10}\right) \times 2\dfrac{1}{12} = \dfrac{5}{4} + \dfrac{5x}{8}$;

উভয় পক্ষকে 40 দ্বারা গুণ করিয়া $16+28x=50+25x$;

পক্ষান্তর দ্বারা $28x-25x=50-16$;

অর্থাৎ, $3x=34$;

$\therefore\ x=\frac{34}{3}=11\frac{1}{3}$;

অতএব নির্ণেয় পরিমাণ $=11\frac{1}{3}$ সের।

উদাহরণ 6. 5টা ও 6টার মধ্যে এক ব্যক্তি বেড়াইতে বাহির হইয়া 6টা ও 7টার মধ্যে ফিরিয়া আসিয়া দেখিল যে, তাহার ঘড়ির কাঁটা দুইটি স্থান-বিনিময় করিয়াছে। সে কখন বাহির হইয়াছিল?

[ঘড়ি-বিষয়ক প্রশ্নে নিম্নলিখিত কথাগুলি মনে রাখা দরকার; এক ঘণ্টায় অর্থাৎ 60 মিনিটে মিনিটের কাঁটা 60 মিনিট-ঘর এবং ঘণ্টার কাঁটা 5 মিনিট-ঘর অতিক্রম করে। অতএব 1 মিনিটে মিনিটের কাঁটা 1 মিনিট-ঘর এবং ঘণ্টার কাঁটা $\frac{5}{60}$ বা $\frac{1}{12}$ মিনিট-ঘর অতিক্রম করে। স্পষ্টতঃ মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটার 12 গুণ বেগে চলে।]

প্রশ্ন হইতে দেখা যাইতেছে যে, বাহিরে যাইবার সময় মিনিটের কাঁটা 6টা এবং 7টার ঘরের মধ্যে, আর ঘণ্টার কাঁটা 5টা এবং 6টার ঘরের মধ্যে ছিল। মনে কর, নির্ণেয় সময় = 5টা $(30+x)$ মিনিট। এখন ঘণ্টার কাঁটা 1 মিনিটে $\frac{1}{12}$ মিনিট-ঘর অতিক্রম করে; অতএব 5টা $(30+x)$ মিনিটের সময় উহা 5টার ঘর হইতে $\frac{30+x}{12}$ মিনিট-ঘর সম্মুখে থাকিবে, [কারণ 5টার পর যখন মিনিটের কাঁটা $(30+x)$ মিনিট-ঘর অগ্রসর হইবে, তখন ঘণ্টার কাঁটা 5টার ঘর হইতে উহার $\frac{1}{12}$ সংখ্যক মিনিট-ঘর, অর্থাৎ $\frac{30+x}{12}$ মিনিট-ঘর অগ্রসর হইবে]। ফিরিবার সময় কাঁটা দুইটি স্থান-পরিবর্তন করাতে ঘণ্টার কাঁটা 6টার ঘর হইতে x মিনিট-ঘর সম্মুখে থাকিবে এবং মিনিটের কাঁটা 5টার ঘর হইতে $\frac{30+x}{12}$ মিনিট-ঘর, অর্থাৎ 12টার ঘর হইতে $\left(25+\frac{30+x}{12}\right)$ মিনিট-ঘর সম্মুখে থাকিবে। অতএব ফিরিবার সময় = 6টা $\left(25+\frac{30+x}{12}\right)$ মিনিট; এই $\left(25+\frac{30+x}{12}\right)$ মিনিটে ঘণ্টার কাঁটা 6টার ঘর হইতে x মিনিট-ঘর সম্মুখে অগ্রসর হইয়াছে।

$$\therefore\ x=\frac{1}{12}\left(25+\frac{30+x}{12}\right)$$

$$=\frac{330+x}{144}\quad \text{[সরল করিয়া]}$$

144 দ্বারা গুণ করিয়া $144x=330+x$;

পক্ষান্তর করিয়া $143x=330$; $\therefore\ x=\frac{330}{143}=\frac{30}{13}=2\frac{4}{13}$.

অতএব, নির্ণেয় সময় $=5$টা $(30+x)$ মিনিট, অর্থাৎ 5টা $32\frac{4}{13}$ মিনিট।

56. সম্পূর্ণ ও অসম্পূর্ণ বর্গ-রচনা-বিষয়ক প্রশ্ন।

যদি কতকগুলি লোক (বা বস্তু)কে বিভিন্ন সারিতে বর্গাকারে এরূপভাবে সাজান হয়, যেন প্রত্যেক সারির লোক (বা বস্তুর) সংখ্যা মোট সারির সংখ্যার সমান হয়, তাহা হইলে এইরূপ সমাবেশকে **সম্পূর্ণ বর্গ** (Solid Square) বলে।

কিন্তু যদি কোন সম্পূর্ণ বর্গের মধ্য হইতে সমভাবে অবস্থিত এক সম্পূর্ণ বর্গ অপসারিত করা হয়, তাহা হইলে এইরূপ সমাবেশকে **অসম্পূর্ণ বর্গ** (Hollow Square) বলা হয়। শূন্যস্থান হইতে বহিঃসীমা পর্যন্ত a-সংখ্যক সারি থাকিলে অসম্পূর্ণ বর্গটিকে a-গভীরতা-বিশিষ্ট (a-deep) বলা হয়।

```
* * * *
* * * *
* * * *
* * * *
```

প্রথম চিত্র

```
* * * * * * *
* * * * * * *
* * . . . * *
* * . . . * *
* * . . . * *
* * * * * * *
* * * * * * *
```

দ্বিতীয় চিত্র

পার্শ্বের প্রথম চিত্রে একটি সম্পূর্ণ বর্গক্ষেত্র প্রদর্শিত হইয়াছে ; ইহাতে চারিটি সারি আছে এবং প্রত্যেক সারিতে চারিটি তারকা-চিহ্ন আছে। দ্বিতীয় চিত্রে একটি অসম্পূর্ণ বর্গক্ষেত্র প্রদর্শিত হইয়াছে। ইহা 2 গভীরতা-বিশিষ্ট ; ইহা হইতে বিন্দুদ্বারা চিহ্নিত সম্পূর্ণ বর্গটিকে অপসারিত করা হইয়াছে। চিত্র হইতে দেখা যাইতেছে যে, ইহার বাহিরের সারিতে 7টি তারকা-চিহ্ন আছে এবং অপসারিত বর্গক্ষেত্রের বহিঃসারিতে $(7-2\times 2)$ তারকা-চিহ্ন আছে। অতএব দ্বিতীয় চিত্রে তারকা-চিহ্নের মোট সংখ্যা $=7^2-(7-2\times 2)^2$.

এইরূপে যদি কোন অসম্পূর্ণ বর্গক্ষেত্রের বহিঃসারিতে x-সংখ্যক লোক (বা বস্তু) থাকে এবং উহা a-গভীরতা-বিশিষ্ট হয়, তাহা হইলে অপসারিত বর্গক্ষেত্রের বহিঃসারিতে $(x-2a)$টি লোক (বা বস্তু) থাকিবে ; অতএব অসম্পূর্ণ বর্গক্ষেত্রটির লোক (বা বস্তু)-সংখ্যা n হইলে

$$n=x^2-(x-2a)^2$$
$$=x^2-(x^2-4ax+4a^2)=4ax-4a^2=4a(x-a). \quad \cdots\text{(i)}$$

উদাহরণ 7. এক সৈন্যাধ্যক্ষ তাঁহার সৈন্যগণকে 5-গভীরতা-বিশিষ্ট বর্গে সাজাইতে পারেন এবং 4-গভীরতা-বিশিষ্ট বর্গেও সাজাইতে পারেন ; কিন্তু শেষোক্ত বর্গের সম্মুখের সারির সৈন্যসংখ্যা পূর্ব্বোক্ত বর্গের সম্মুখের সারির সৈন্যসংখ্যা অপেক্ষা 8 বেশী। মোট সৈন্যসংখ্যা কত ?

মনে কর, 5-গভীরতা-বিশিষ্ট বর্গের সম্মুখের সারির সৈন্যসংখ্যা $=x$;

তাহা হইলে প্রশ্ন হইতে 4-গভীরতা-বিশিষ্ট বর্গের সম্মুখের সারির সৈন্য-সংখ্যা $=x+8$; অতএব, 132 পৃষ্ঠায় প্রদত্ত (i) দ্বারা

5 গভীরতা-বিশিষ্ট বর্গের সৈন্যসংখ্যা $=4\times5(x-5)=20x-100.$ ... (1)

এবং 4-গভীরতা-বিশিষ্ট বর্গের সৈন্যসংখ্যা $=4\times4\times(x+8-4)$

$=16x+64.$ ... (2)

কিন্তু সৈন্যসংখ্যা উভয়স্থলে একই ; অতএব, $20x-100=16x+64$;

পক্ষান্তর দ্বারা $20x-16x=64+100$;

অর্থাৎ, $4x=164$; $\therefore\ x=41.$

অতএব (1) হইতে নির্ণেয় সৈন্যসংখ্যা $=4\times5(x-5)=4\times5\times(41-5)=720.$

দ্রষ্টব্য। এস্থলে প্রথম খণ্ডের সপ্তম ও ষোড়শ অধ্যায়ে প্রদত্ত উদাহরণগুলিও দেখ।

প্রশ্নমালা 32

1. A, B এবং Cএর মধ্যে 1800 টাকা এইরূপে ভাগ করিয়া দাও, যেন A, 1 টাকা পাইলে B 3 টাকা এবং C 5 টাকা পায়।

2. মোট 76 জন বালক এবং বালিকার মধ্যে 460টি লিচু এইরূপে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল যে, প্রত্যেক বালক 7টি এবং প্রত্যেক বালিকা 5টি লিচু পাইল। বালিকার সংখ্যা নির্ণয় কর।

3. একটি থলিতে যত টাকা আছে, তাহার দ্বিগুণ আধুলি, তিনগুণ সিকি, 4 গুণ দুয়ানি, 6 গুণ আনি এবং 8 গুণ পয়সা আছে। থলিতে মোট 360 টাকা থাকিলে টাকার সংখ্যা কত ?

4. একজন মিস্ত্রী এইরূপ চুক্তি করিয়া কাজে নিযুক্ত হইল যে, সে যেদিন কাজ করিবে, সে-দিন 3 টাকা পাইবে, কিন্তু যেদিন অনুপস্থিত থাকিবে, সেইদিন 8 আনা জরিমানা দিবে। মার্চ্চ মাসের কাজের জন্য সে মোট 58 টাকা পাইয়া থাকিলে ঐ মাসে সে কত দিন অনুপস্থিত ছিল ?

5. Aএর অংশের $\frac{1}{6}$এর সহিত 9 টা. 5 আনা যোগ করিয়া যোগফলকে 3 দ্বারা গুণ করাতে উহা Bএর অংশের সমান হইল। Bএর 69 টা. 14 আনা থাকিলে Aএর কত ছিল ?

6. একটি তিন অঙ্ক-বিশিষ্ট সংখ্যার শতকাঙ্ক দশকাঙ্কের দ্বিগুণ এবং এককাঙ্কের চারিগুণ ; সংখ্যাটি উল্টাইয়া লিখাতে উহার মান 297 হ্রাস পাইল ; সংখ্যাটি কত ?

7. এইরূপ তিনটি ক্রমিক যুগ্মসংখ্যা নির্ণয় কর, যাহাদিগকে যথাক্রমে 3, 4 এবং 5 দ্বারা ভাগ করিলে লব্ধ সম্পূর্ণ ভাগফলগুলির সমষ্টি ক্ষুদ্রতম সংখ্যার সমান হইবে।

8. দুইটি সংখ্যার অন্তরফল 81 ; বৃহত্তর সংখ্যাকে ক্ষুদ্রতর সংখ্যাটি দ্বারা ভাগ করিলে 6 ভাগফল এবং 11 ভাগশেষ থাকে। সংখ্যাদ্বয় নির্ণয় কর।

9. তিনটি ক্রমিক অখণ্ড সংখ্যার বর্গের সমষ্টি হইতে 14 বিয়োগ করিয়া 3 দ্বারা ভাগ করিলে উহা ক্ষুদ্রতর সংখ্যাদ্বয়ের গুণফলের সমান হয়। সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর।

10. একটি গাড়ী বিক্রয় করাতে 88% ক্ষতি হইল। উহা 100 টাকা বেশী দামে বিক্রয় করিতে পারিলে 12% লাভ হইত। গাড়ীটির ক্রয়-মূল্য কত ?

11. একটি ঘোড়া 412 টাকাতে বিক্রয় না করিয়া 420 টাকাতে বিক্রয় করিলে 2% বেশী লাভ হইত। ঘোড়াটির ক্রয়-মূল্য কত ?

12. এক ব্যবসায়ী ক্রয়-মূল্যের উপর 64% লাভ রাখিয়া কোন জিনিষের দাম ফেলিল ; কিন্তু নগদ মূল্য পাইলে সে ক্রেতাদিগকে উক্ত নির্দ্ধারিত মূল্য হইতে 25% কমিশন বাদ দিয়া থাকে। জিনিষটির নগদ বিক্রয়-মূল্য 246 টাকা হইলে উহার ক্রয়-মূল্য কত ?

13. একব্যক্তি তাঁহার সঞ্চিত অর্থের 80% প্রথম পুত্রকে, অবশিষ্টের 80% দ্বিতীয় পুত্রকে এবং যাহা বাকি থাকিল, তাহার 80% তৃতীয় পুত্রকে দেওয়াতে তাঁহার 1000 টাকা বাকি থাকিল। তাঁহার সঞ্চিত অর্থের পরিমাণ নির্ণয় কর।

14. এক ফলবিক্রেতা তাহার ফলের 10% এবং 12টি প্রথম ক্রেতার নিকট, অবশিষ্টের $33\frac{1}{3}\%$ এবং 17টি দ্বিতীয় ক্রেতার নিকট এবং বাকিগুলির 20% এবং 10টি তৃতীয় ক্রেতার নিকট বিক্রয় করাতে তাহার 90টি ফল অবশিষ্ট থাকিল। প্রথমে তাহার নিকট কত ফল ছিল ?

15. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ উহার সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের বাহু অপেক্ষা যথাক্রমে 8 গজ বেশী এবং 4 গজ কম। আয়তক্ষেত্রের বাহুগুলি নির্ণয় কর।

16. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য প্রস্থ অপেক্ষা 2 গজ বেশী। দৈর্ঘ্যকে 4 গজ বাড়াইলে এবং প্রস্থকে 2 গজ কমাইলে ক্ষেত্রফল পরিবর্ত্তিত হয় না। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

17. একটি বাগানের দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থের অন্তর 4 গজ ; উহার বাহিরে চারিদিকে একটি 2 গজ বিস্তৃত রাস্তা আছে। রাস্তাটির ক্ষেত্রফল 160 বর্গগজ হইলে বাগানের দৈর্ঘ্য কত ?

18. 10 সের জলমিশ্রিত দুধে দুধের পরিমাণ জলের $\frac{2}{3}$; আর কত জল মিশাইলে দুধের পরিমাণ জলের $\frac{1}{2}$ হইবে ?

19. 22 তোলা তাম্রমিশ্রিত স্বর্ণে তাম্রের পরিমাণ স্বর্ণের $\frac{2}{9}$; আর কত তাম্র মিশ্রিত করিলে স্বর্ণের পরিমাণ মোট মিশ্রিত দ্রব্যের $\frac{3}{4}$ হইবে ?

20. এক ব্যবসায়ী 25 এবং 35 টাকা মণ দরে দুই রকমের মোট 60 মণ ঘৃত ক্রয় করিয়া মিশ্রিত করিল এবং এই মিশ্রিত ঘৃত 32 টাকা মণ দরে বিক্রয় করাতে তাহার $14\frac{2}{7}\%$ লাভ হইল। মিশ্রিত ঘৃতে কোন্ দরের কত মণ ছিল ?

21. 8 টাকা মণের 12 মণ চাউলের সহিত 10 টাকা মণের কত চাউল মিশ্রিত করিয়া $9\frac{1}{2}$ টাকা মণ দরে বিক্রয় করিলে যে লাভ হইবে, প্রথম প্রকারের চাউল $12\frac{1}{2}\%$ লাভে এবং দ্বিতীয় প্রকারের চাউল 10% লাভে পৃথগ্ভাবে বিক্রয় করিলেও মোট ঐ লাভ থাকিবে ?

22. একব্যক্তি 1টার কিছু পরে বাহিরে গেলেন এবং 2টা হইতে 3টার মধ্যে ফিরিয়া আসিয়া দেখিলেন যে, ঘড়ির কাঁটা দুইটি পরস্পর স্থান-বিনিময় করিয়াছে। ঐ ব্যক্তি কখন বাহিরে গিয়াছিলেন ?

23. একব্যক্তি 2টা এবং 3টার মধ্যে হঠাৎ ঘড়ির দিকে দৃষ্টি করিয়া ভুলক্রমে ঘণ্টার কাঁটাকে মিনিটের কাঁটা মনে করাতে অবধারিত সময় প্রকৃত সময় অপেক্ষা 57 মিনিট কম হইল। তখন প্রকৃত সময় কত ছিল ?

24. একব্যক্তি 4টা এবং 5টার মধ্যে বেড়াইতে বাহির হইলেন এবং রাত্রি 8টা এবং 9টার মধ্যে ফিরিয়া আসিয়া দেখিলেন যে, ঘড়ির কাঁটা দুইটি স্থান-বিনিময় করিয়াছে। তিনি কখন (i) বাহিরে গিয়াছিলেন, (ii) কত সময় বাহিরে ছিলেন এবং (iii) কখন ফিরিয়াছিলেন ?

25. (i) যদি 1000 টাকাকে 5-গভীরতা-বিশিষ্ট একটি বর্গে সাজান যায়, তাহা হইলে উহার সম্মুখের সারিতে কত টাকা থাকিবে স্থির কর।

(ii) n মার্ব্বেলকে a-গভীরতা-বিশিষ্ট বর্গে সাজাইলে প্রমাণ কর যে, উহার সম্মুখের সারিতে মার্ব্বেলের সংখ্যা $=a+\frac{n}{4a}$.

26. এক সৈন্যাধ্যক্ষ তাঁহার সৈন্যগণকে 5 কিংবা 3 উভয় গভীরতা-বিশিষ্ট বর্গে সাজাইতে পারেন, কিন্তু শেষোক্ত বর্গের সম্মুখের সারির সৈন্যসংখ্যা পূর্ব্বোক্ত বর্গের সম্মুখের সারির সৈন্যসংখ্যা অপেক্ষা 8 বেশী হইলে সৈন্যদলে মোট কত সৈন্য আছে নির্ণয় কর।

27. এক সৈন্যাধ্যক্ষ তাঁহার সৈন্যগণকে a কিংবা b-গভীরতা-বিশিষ্ট বর্গে সাজাইতে পারেন ; কিন্তু শেষোক্ত বর্গের সম্মুখের সারির সৈন্যসংখ্যা পূর্ব্বোক্ত বর্গের সম্মুখের সারির সৈন্যসংখ্যা অপেক্ষা c বেশী হইলে দেখাও যে, মোট সৈন্যসংখ্যা $=4ab\left(1+\frac{c}{a-b}\right)$ ।

সপ্তম অধ্যায়

সরল সহ-সমীকরণ

(Linear Simultaneous Equations)

এবং

তদ্বিষয়ক প্রশ্নাবলী (Problems)

57. মনে কর, কোন রাশি x অপর এক রাশি y হইতে 10 বেশী ;

$$\text{অর্থাৎ} \quad x - y = 10. \qquad \cdots \quad \text{(i)}$$

ইহা হইতে x এবং yএর কোন নির্দ্দিষ্ট মান পাওয়া যায় না ;

কারণ $\left.\begin{array}{l} x=10 \\ y=0 \end{array}\right\}$, অথবা $\left.\begin{array}{l} x=11 \\ y=1 \end{array}\right\}$, অথবা $\left.\begin{array}{l} x=12 \\ y=2 \end{array}\right\}$ ইত্যাদির যে-কোন একটি লইলে প্রত্যেক স্থলে $x-y=10$ হয়। স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, আরও কিছু দেওয়া না থাকিলে x এবং yএর কোন নির্দ্দিষ্ট মান নির্ণয় করা অসম্ভব। যদি এস্থলে অধিকন্তু ইহাও বলা হয় যে, x এবং yএর সমষ্টি 20,

$$\text{অর্থাৎ} \quad x + y = 20. \qquad \cdots \quad \text{(ii)}$$

তাহা হইলে (i) এবং (ii) দ্বারা x এবং yএর মান নির্ণয় করা যায়। কারণ,

$$\text{যেহেতু} \quad x - y = 10,$$
$$\text{এবং} \quad x + y = 20 ;$$

অতএব যোগ দ্বারা $(x-y)+(x+y)=10+20$;

অর্থাৎ $2x = 30$;

$\therefore \; x = 15$

এবং বিয়োগ দ্বারা $(x+y)-(x-y) = 20-10$;

অর্থাৎ $2y = 10$; $\therefore \; y = 5.$

অতএব, $x=15$ এবং $y=5$.

স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, (i) এবং (ii) এর প্রত্যেকটি একটি সমীকরণ এবং x ও y ইহারা এই সমীকরণদ্বয়ের অজ্ঞাত রাশি ; এই সমীকরণদ্বয়ের প্রত্যেকটি x এবং yএর অসংখ্য মান দ্বারা সিদ্ধ হইলেও ইহারা $x=15$ এবং $y=5$ এই মানদ্বয় দ্বারা যুগপৎ সিদ্ধ হইতেছে।

যদি একাধিক অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট দুই বা তদধিক সমীকরণ অজ্ঞাত রাশিসমূহের নির্দ্দিষ্ট মানসমূহ দ্বারা যুগপৎ (simultaneously) সিদ্ধ হয়, তাহা হইলে সমীকরণগুলিকে সহ-সমীকরণ (simultaneous equations) বলে এবং অজ্ঞাত রাশিগুলির উক্ত নির্দ্দিষ্ট মানগুলিকে উহাদের অর্থাৎ সহ-সমীকরণগুলির বীজ (roots) বলা হয়।

যদি সমীকরণগুলির অন্তর্গত অজ্ঞাত রাশিগুলি প্রত্যেকে একঘাত-বিশিষ্ট হয় এবং কোনটিতে দুই বা তদধিক অজ্ঞাত রাশির গুণফল না থাকে, তবে উহাদিগকে সরল সহ-সমীকরণ (linear simultaneous equations) বলে। যথা,

$\left.\begin{array}{l} x-y=10 \\ x+y=20 \end{array}\right\}$ ইহারা সরল সহ-সমীকরণ ; x এবং y ইহাদের অজ্ঞাত রাশি ;

এরূপ, $\left.\begin{array}{r} x+y\ +\ z=6 \\ 2x-y\ +3z=9 \\ 4x-6y+3z=1 \end{array}\right\}$ ইহারাও সরল সহ-সমীকরণ ; x, y এবং z ইহাদের অজ্ঞাত রাশি।

ইহাদের প্রত্যেকটি x, y এবং zএর অসংখ্য মান দ্বারা সিদ্ধ হইলেও ইহা সহজে দেখান যায় যে, ইহারা $x=1$, $y=2$, $z=3$ দ্বারা যুগপৎ সিদ্ধ হয়।

সহ-সমীকরণগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ হইলে এবং উহাদের সংখ্যা উহাদের অন্তর্ভূত অজ্ঞাত রাশিসমূহের সংখ্যার সমান হইলেই অজ্ঞাত রাশিগুলির নির্দ্দিষ্ট মান নির্ণয় করা সম্ভব হয়। যথা, অজ্ঞাত রাশির সংখ্যা দুইটি হইলে সহ-সমীকরণের সংখ্যাও দুইটি হওয়া দরকার। এরূপ অজ্ঞাত রাশির সংখ্যা তিনটি হইলে সহ-সমীকরণের সংখ্যাও তিনটি হওয়া দরকার।

58. নিম্নে দুইটি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট সরল সহ-সমীকরণের বিষয় আলোচিত হইয়াছে। প্রত্যেক স্থলে দুইটি পরস্পর নিরপেক্ষ সমীকরণ দেওয়া আছে এবং উহাদের দ্বারা অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের মান নির্ণয় করা হইয়াছে। এই জাতীয় সমীকরণ সাধারণতঃ কয়েকটি বিভিন্ন প্রণালীতে সমাধান করা যায়। নিম্নে উহাদের বিষয় আলোচিত হইল।

59. দুইটি সহ-সমীকরণ-সমাধানের প্রথম প্রণালী।

প্রত্যেক সমীকরণ হইতে অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের যে-কোন একটিকে অপর অজ্ঞাত রাশি দ্বারা প্রকাশ কর এবং লব্ধ মান দুইটির সমতাদ্বারা একটি সমীকরণ গঠন কর। এই সমীকরণে মাত্র শেষোক্ত অজ্ঞাত রাশিটি থাকিবে ; এখন ইহার সমাধান দ্বারা এই অজ্ঞাত রাশিটির মান নির্ণয় কর এবং পরে প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের যে-কোন একটিতে এই মান বসাইয়া অবশিষ্ট অজ্ঞাত রাশিটিরও মান নির্ণয় কর।

সমাধান নির্ণয়ের পূর্ব্বে সমীকরণদ্বয়কে যতদূর সম্ভব সরল করিয়া লইবে। সর্ব্বশেষে লব্ধ বীজের বিশুদ্ধতা পরীক্ষা করিবে।

নিম্নের উদাহরণগুলি হইতে প্রণালীটি বুঝা যাইবে।

উদাহরণ 1. সমাধান কর : $\left.\begin{array}{ll} x=4y+1 & \cdots\text{(i)} \\ x=2y+3 & \cdots\text{(ii)} \end{array}\right\}$

(i) এবং (ii) হইতে $4y+1=2y+3$, [প্রত্যেক পক্ষ xএর সমান বলিয়া]

পক্ষান্তর করিয়া $4y-2y=3-1$; অর্থাৎ $2y=2$; $\therefore\ y=1.$

এখন (i) হইতে $x=4y+1=4.1+1=5.$

অতএব, $x=5$ এবং $y=1.$

[বিশুদ্ধি-পরীক্ষা : $x=5$, এবং $y=1$ বসাইলে প্রথম সমীকরণের বামপক্ষ $=5$, ডানপক্ষ $=4.1+1=5.$ দ্বিতীয় সমীকরণের বামপক্ষ 5 এবং ডানপক্ষ $=2.1+3=5.$ অতএব, সমীকরণ শুদ্ধ হইয়াছে]

উদাহরণ 2. সমাধান কর : $3x+y=18$;
$5x-2y=8.$

পক্ষান্তর করিয়া প্রথম সমীকরণ হইতে $y=18-3x$ ... (i)

এবং দ্বিতীয় সমীকরণ হইতে $y=\frac{5x-8}{2}.$ ... (ii)

অতএব, $\frac{5x-8}{2}=18-3x,$ [প্রত্যেক পক্ষ yএর সমান বলিয়া]

উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করিলে $5x-8=36-6x$;

পক্ষান্তর দ্বারা $5x+6x=36+8$

অথবা, $11x=44$; $\therefore\ x=4.$

এখন (i) হইতে, $y=18-3x=18-3\times4=18-12=6.$

$\therefore\ x=4$ এবং $y=6.$

[বিশুদ্ধি পরীক্ষা : প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ে $x=4$ এবং $y=6$ বসাইলে দেখিতে পাওয়া যাইবে যে, সমীকরণদ্বয় সিদ্ধ হইয়াছে ।]

দ্রষ্টব্য। উদাহরণ 2এ yকে x দ্বারা প্রকাশ করিয়া সমাধান নির্ণয় করা হইয়াছে, যেহেতু ইহাই সুবিধাজনক। তবে xকে y দ্বারা প্রকাশ করিয়াও সমাধান নির্ণয় করা চলিবে এবং লব্ধ ফলও উভয়স্থলে একইরূপ হইবে।

উদাহরণ 3. সমাধান কর : $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=5.$ ... (i)

$x-2y=2.$ ... (ii)

প্রথম সমীকরণ হইতে পক্ষান্তর দ্বারা $\frac{x}{2}=5-\frac{y}{3}$;

উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করিলে $x=10-\frac{2}{3}y$;

দ্বিতীয় সমীকরণ হইতে $x=2+2y$; ... (iii)

অতএব $2+2y=10-\frac{2}{3}y,$

[প্রত্যেক পক্ষ xএর সমান বলিয়া]

পক্ষান্তর দ্বারা $2y+\frac{2}{3}y=10-2$;

অথবা $\frac{8}{3}y=8$; $\therefore\ y=8\div\frac{8}{3}=\frac{8\times3}{8}=3.$

এখন (iii) হইতে $x=2+2y=2+2\times3=8.$

অতএব $x=8$ এবং $y=3.$

[সমাধানের বিশুদ্ধি-পরীক্ষা কর।]

প্রশ্নমালা 33

59 অনুচ্ছেদোক্ত প্রণালীতে সমাধান কর :

1. $x=2y+1$, $x=y+5$
2. $y=3x+2$, $y=2x+3$
3. $x=3y-4$, $x=6-2y$
4. $y=5x-7$, $2x-y=1$
5. $x+y=5$, $2x+y=8$
6. $x+2y=10$, $x+5y=22$
7. $2x-y=3$, $5x-2y=8$
8. $7x+2y=20$, $5x=3y=1$
9. $7x-3y=31$, $9x-5y=41$
10. $x+3y=9$, $5x-9=3y$
11. $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=3$, $x-2y=2$
12. $x+y-10=0$, $x-4=2y$
13. $\frac{1}{3}(x-1)=\frac{1}{2}(y-1)$, $2x-y=5$
14. $\frac{x}{2}+y=9$, $\frac{x}{6}=y-1$
15. $x+2y=3=4x-y$. [ক. প্র., 1917]

[সঙ্কেত : প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়কে $\left.\begin{array}{l}x+2y=3\\4x-y=3\end{array}\right\}$ রূপে লিখিয়া সমাধান কর ।]

60. দুইটি সহ-সমীকরণ-সমাধানের দ্বিতীয় প্রণালী।

সমীকরণদ্বয়ের যে-কোনটি হইতে অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের একটির মান অপরটির দ্বারা প্রকাশ কর এবং অপর সমীকরণে প্রথমোক্ত অজ্ঞাত রাশিটির স্থলে এই মান বসাইয়া একটি সমীকরণ গঠন কর ; এই সমীকরণটিতে শুধু শেষোক্ত অজ্ঞাত রাশিটি থাকিবে। এখন ইহার সমাধানদ্বারা এই অজ্ঞাত রাশিটির মান নির্ণয় কর এবং পরে প্রদত্ত সমীকরণ-দ্বয়ের যে-কোন একটিতে এই মান বসাইয়া অবশিষ্ট অজ্ঞাতরাশিটিও নির্ণয় কর।

সমাধানের পূর্ব্বে প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় যতদূর সম্ভব সরল করিয়া লইবে। সর্ব্বশেষে লব্ধ ফলের বিশুদ্ধতা পরীক্ষা করিবে।

উদাহরণ 1. সমাধান কর : $x+3y=9$. ... (i)

$4x+y=14$. ... (ii)

প্রথম সমীকরণ হইতে পক্ষান্তর দ্বারা $x=9-3y$. ... (iii)

এখন দ্বিতীয় সমীকরণে xএর স্থলে $9-3y$ বসাইলে

$4(9-3y)+y=14$;

অর্থাৎ $36-11y=14$; অর্থাৎ $-11y=14-36=-22$;

$$\therefore\ y=\frac{-22}{-11}=2.$$

এখন (iii) হইতে $x=9-3y=9-3.2=9-6=3.$

অতএব, $x=3, y=2.$

[বিশুদ্ধি-পরীক্ষা : $x=3, y=2$ বসাইলে

প্রথম সমীকরণে বামপক্ষ $=3+3.2=9=$ ডানপক্ষ ;

এবং দ্বিতীয় সমীকরণে বামপক্ষ $=4x+y=4.3+2=14=$ ডানপক্ষ।]

উদাহরণ 2. $3x+2y=9$ ... (i)

$4x+y=7.$ ... (ii)

দ্বিতীয় সমীকরণ হইতে $y=7-4x$ ... (iii)

এখন প্রথম সমীকরণে yএর স্থলে $7-4x$ বসাইলে

$$3x+2(7-4x)=9\ ;$$

অথবা $-5x+14=9$;

পক্ষান্তর দ্বারা $-5x=9-14=-5$; $\therefore\ x=\dfrac{-5}{-5}=1.$

এখন (iii) হইতে $y=7-4x=7-4.1=3,$

অতএব, $x=1$; $y=3.$

দ্রষ্টব্য। এস্থলে যে-কোন সমীকরণ হইতে xএর মান-নির্ণয়-পূর্ব্বক উক্ত মান অপর সমীকরণে xএর স্থলে বসাইয়াও উত্তর স্থির করা যাইত ; কিন্তু উল্লিখিত প্রক্রিয়াই সুবিধাজনক।

উদাহরণ 3. সমাধান কর : $\dfrac{x+3}{5}+\dfrac{y-2}{3}=2$

$$\tfrac{2}{3}(x+1)-\tfrac{1}{4}(y-1)=1.$$

সমীকরণে ভগ্নাংশ থাকিলে উহাদিগকে ভগ্নাংশমুক্ত করিয়া সরল করিয়া লইতে হয়। প্রথম সমীকরণটির উভয় পক্ষকে হরগুলির ল. সা. গু. 15 দ্বারা গুণ করিয়া ভগ্নাংশমুক্ত করিলে

$$3(x+3)+5(y-2)=30\ ;$$

সরল করিয়া $3x+5y-1=30$;

পক্ষান্তর দ্বারা $3x+5y=31.$ ... (i)

এইরূপে দ্বিতীয় সমীকরণটির উভয় পক্ষকে 12 দ্বারা গুণ করিয়া ভগ্নাংশমুক্ত করিলে $8(x+1)-3(y-1)=12$;

সরল করিয়া $8x-3y+11=12$; পক্ষান্তর দ্বারা $8x-3y=1.$ ... (ii)

(i) হইতে পক্ষান্তর দ্বারা $3x=31-5y$; অথবা, $x=\dfrac{31-5y.}{3}$ ... (iii)

x-এর এই মান (ii) এ বসাইলে $\frac{8\times(31-5y)}{3}-3y=1$;

উভয় পক্ষকে 3 দ্বারা গুণ করিলে $8\times(31-5y)-9y=3$;

সরল করিয়া $248-49y=3$;

পক্ষান্তর করিয়া $-49y=3-248=-245$;

$$\therefore\ y=\frac{-245}{-49}=5.$$

এখন (iii) হইতে $x=\frac{31-5y}{3}=\frac{31-5\times5}{3}=\frac{31-25}{3}=2.$

অতএব, $x=2$; $y=5$.

[বিশুদ্ধি-পরীক্ষা : $x=2$, $y=5$ বসাইলে প্রথম সমীকরণের বামপক্ষ $\frac{2+3}{5}+\frac{5-2}{3}=1+1=2=$ ডানপক্ষ ; এবং দ্বিতীয় সমীকরণের বামপক্ষ $=\frac{2}{3}(2+1)-\frac{1}{4}(5-1)=2-1=1=$ ডানপক্ষ।]

প্রশ্নমালা 34

60 অনুচ্ছেদোক্ত প্রণালীতে সমাধান কর :

1. $x=y$, $3x+2y=5$
2. $x=2y+3$, $2x+5y=15$
3. $y=3x+2$, $2x+3y=17$
4. $y=4x+5.$, $2y+3x=-1$
5. $x+2y=13$, $2x-5y=-1$
6. $x+3y=7$, $5x-y=3$
7. $2x+y=7$, $3x+4y=18$
8. $x+y-3=0$, $4x-5y+6=0$
9. $3x+2y=16$, $4x+3y=23$
10. $2x+3y=7$, $8x-7y=9$ [পাট. প্র., 1918]
11. $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=\frac{1}{4}$, $4x+9y=5$
12. $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=6$, $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=5$
13. $\frac{x-1}{5}+\frac{y-2}{3}=3$, $3y-2x=12$
14. $\frac{1}{3}(x-y)=\frac{1}{4}(y-1)$, $\frac{1}{7}(4x-5y)=x-7$ [ক. প্র., 1872]

15. $x+1=\frac{3}{4}(y-1)$
$y-1=\frac{3}{2}(x-1)$

16. $x+y=a+b$
$bx+ay=2ab$

17. $x-y=2a$
$ax+by=a^2+b^2$
[মা. প্র., 1926]

18. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$
$ax+by=a^2+b^2.$

61. দুইটি সহ-সমীকরণ-সমাধানের তৃতীয় প্রণালী।

সমীকরণ দুইটিকে এমন দুইটি রাশিদ্বারা গুণ কর, যেন অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের একটির সহগ উভয় গুণফলেই (উহার প্রদত্ত সহগদ্বয়ের ল. সা. গু. এর) সমান হয়। এখন যোগ বা বিয়োগ দ্বারা এই অজ্ঞাত রাশিটি লোপ করিলে একটি মাত্র অজ্ঞাত রাশি-বিশিষ্ট এক সমীকরণ পাইবে ; ইহার সমাধান দ্বারা শেষোক্ত অজ্ঞাত রাশিটির মান নির্ণয় কর এবং পরে প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের যে-কোন একটিতে এই মান বসাইয়া অপর অজ্ঞাত রাশিটিও নির্ণয় কর। সমাধানের পূর্ব্বে সমীকরণদ্বয় যতদূর সম্ভব সরল করিয়া লইবে এবং সর্ব্বশেষে প্রাপ্ত ফলের বিশুদ্ধতা পরীক্ষা করিবে।

উদাহরণ 1. সমাধান কর : $5x+9y=23$
$7x+4y=15.$

প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ে xএর সহগ 5 এবং 7 ; এবং উহাদের ল. সা. গু. $=35$; অতএব, xএর সহগ সমান করিবার জন্য প্রথম সমীকরণকে 7 এবং দ্বিতীয় সমীকরণকে 5 দ্বারা গুণ কর ; তাহা হইলে

$$35x+63y=161$$
$$35x+20y=\ \ 75.$$

এখন বিয়োগ দ্বারা $43y=\ 86$; $\therefore\ y=\frac{86}{43}=2.$

yএর এই মান প্রথম সমীকরণে বসাইলে $5x+9\times2=23$;

অথবা, $5x=23-18=5$; $\therefore\ x=\frac{5}{5}=1.$

অতএব, $x=1,\ \ y=2.$

[বিশুদ্ধি-পরীক্ষা : প্রথম সমীকরণ হইতে xএর মান নির্ণয় করা হইয়াছে।
দ্বিতীয় সমীকরণে $x=1$, $y=2$ বসাইলে বামপক্ষ $=7.1+4.2=15=$ ডানপক্ষ।]

দ্রষ্টব্য। এস্থলে yএর সহগ সমান করিয়াও উত্তর নির্ণয় করা যায়।

যে-অজ্ঞাত রাশিটি অপনয়ন করিতে গুণন কম কষ্টসাধ্য হয়, উহাই অপনয়ন করা উচিত।

উদাহরণ 2. $3(3x+2y)+2(3y+x)=58$;
$$\tfrac{3}{5}(x-1)-\tfrac{8}{25}(y+2)+1=0.$$
এস্থলে প্রথমে সমীকরণদ্বয়কে সরল কর। প্রথম সমীকরণটিকে সরল করিয়া
$$11x+12y=58. \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(i)}$$
দ্বিতীয় সমীকরণকে 25 দ্বারা গুণ করিয়া $15(x-1)-8(y+2)+25=0$;
$$\text{অথবা, } 15x-8y=6. \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$
দেখা যাইতেছে যে, (i) এবং (ii)-চিহ্নিত সমীকরণদ্বয়কে yএর সহগ সমান করিয়া লওয়াই সুবিধাজনক। সমীকরণদ্বয়ে yএর সহগ 12 এবং 8 ; এবং উহাদের ল. সা. গু. = 24. অতএব (i)কে $(24 \div 12)$ অর্থাৎ 2 দ্বারা এবং (ii)কে $(24 \div 8)$ অর্থাৎ 3 দ্বারা গুণ কর ; তাহা হইলে
$$22x+24y=116 ;$$
$$45x-24y=18.$$
এখন যোগ দ্বারা $67x=134$; $\therefore \ x=\frac{134}{67}=2.$

xএর এই মান (i)-চিহ্নিত সমীকরণে বসাইলে $11 \times 2+12y=58$

অথবা $12y=58-22=36$; $\therefore \ y=\frac{36}{12}=3.$

অতএব, $x=2$; $y=3$.

[সমাধানের বিশুদ্ধি পরীক্ষা কর।]

উদাহরণ 3. সমাধান কর : $ax+by=a^2+b^2$
$$a^2x-b^2y=a^3-b^3.$$
yএর সহগ সমান করিবার জন্য প্রথম সমীকরণটিকে b দ্বারা গুণ কর ; তাহা হইলে
$$abx+b^2y=a^2b+b^3 ;$$
দ্বিতীয় সমীকরণ হইতে $\quad a^2x-b^2y=a^3-b^3$;

যোগ দ্বারা $\quad (ab+a^2)x=a^2b+a^3$;
$$\therefore \quad x=\frac{a^2b+a^3}{ab+a^2}=\frac{a^2(b+a)}{a(b+a)}=a.$$
xএর এই মান প্রথম সমীকরণে বসাইলে $a.a+by=a^2+b^2$;

পক্ষান্তর করিয়া $\quad by=a^2+b^2-a^2=b^2$;
$$\therefore \quad y=\frac{b^2}{b}=b.$$
অতএব $x=a, \ y=b$.

[বিশুদ্ধি-পরীক্ষা : $x=a, \ y=b$ বসাইলে প্রথম সমীকরণের বামপক্ষ $a.a+b.b$ $=a^2+b^2=$ ডানপক্ষ এবং দ্বিতীয় সমীকরণের বামপক্ষ $=a^2.a-b^2.b$ $=a^3-b^3=$ ডানপক্ষ। অতএব সমাধান শুদ্ধ হইয়াছে।]

প্রশ্নমালা 35

61 অণুচ্ছেদোক্ত প্রণালীতে সমাধান কর :

1. $5x+4y=32$, $x+6y=22$

2. $5x+3y=11$, $3x+5y=23$ [পাট. প্র., 1926]

3. $2x+3y=3$, $5x-2y=4$

4. $6x-7y=16$, $9x-5y=35$

5. $5x-3y=19$, $3x-5y=5$

6. $7x-3y=31$, $9x-5y=41$

7. $23x-24y=21$, $25x-16y=43$

8. $\frac{x+y}{2}+\frac{3x-5y}{4}=2$, $\frac{x}{14}+\frac{y}{18}=1$

9. $\frac{x+y}{3}+\frac{3x-2y}{4}=\frac{3}{4}$, $17x-31y=\frac{2}{3}$

10. $(x+4)(y-3)=xy+11$, $(x-3)(y-4)=xy+1$

11. $\frac{x+2}{5}=\frac{y+2}{7}$, $x+y=8$

[সঙ্কেত : উভয় সমীকরণকে প্রথমে সরল কর]

12. $x+5y=36$, $\frac{x+y}{5}=\frac{x-y}{3}$

13. $\frac{x+1}{3}=\frac{y+1}{4}$, $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}$

14. $7(x+y)+2(x-y)=20$, $5(x+y)-3(x-y)=1$

15. $\frac{1}{3}(x-y)=\frac{1}{4}(y-1)$, $\frac{1}{7}(4x-5y)=x-7$

16. $x+y=a+b$, $a^2x+b^2y=a^3+b^3$

17. $ax+by=c$, $a^2x+b^2y=c^2$

18. $px+qy=r$, $qx-py=0$

19. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$

20. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$, $ax-by=a^2-b^2$.

দুইটি সহ-সমীকরণ-সমাধানের চতুর্থ প্রণালী

বজ্রগুণন-প্রণালী

(Method of Cross Multiplication)

62. মনে কর, (আবশ্যক হইলে সরল করিয়া এবং পক্ষান্তর করিয়া) সমীকরণ দুইটি নিম্নলিখিত আকারে লিখিত হইল :

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \qquad \cdots(1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0. \qquad \cdots(2)$$

প্রমাণ করিতে পারা যায় যে, $a_1b_2-a_2b_1=0$ (শূন্য) না হইলে*

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}. \qquad \cdots(3)$$

প্রমাণ। প্রথমে সমীকরণদ্বয়ের বামপক্ষ হইতে উহাদের ধ্রুবকপদ (x এবং y-নিরপেক্ষ পদ c_1 এবং c_2) অপনয়ন কর। (1) এবং (2) চিহ্নিত সমীকরণের উভয় পক্ষকে যথাক্রমে c_2 এবং c_1 দিয়া গুণ করিলে

$$c_2a_1x+b_1c_2y+c_1c_2=0$$

$$c_1a_2x+b_2c_1y+c_1c_2=0\,;$$

অতএব বিয়োগ দ্বারা $(c_1a_2-c_2a_1)x+(b_2c_1-b_1c_2)y=0$;

পক্ষান্তর করিয়া $(c_1a_2-c_2a_1)x=-(b_2c_1-b_1c_2)y=(b_1c_2-b_2c_1)y$,

অতএব $$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}.$$

এইরূপে (1) এবং (2) হইতে y অপসারিত করিলে

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

অতএব $$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

সমীকরণ (1) এবং (2) হইতে x, yএর মধ্যে পরস্পর সম্বন্ধ নির্ণয় করিবার এই প্রণালীকে **বজ্রগুণন-প্রণালী (Method of Cross Multiplication)** বলে।

(3)-চিহ্নিত ফলটি অতি প্রয়োজনীয় ; উহা (1) এবং (2)-চিহ্নিত সমীকরণ হইতে নিম্নলিখিত কৌশলে একেবারেই লিখা যায়।

---

*$a_1b_2-a_2b_1=0$ হইলে (3)-চিহ্নিত ফলটি অসিদ্ধ হইল। এরূপ স্থলে সমীকরণদ্বয় হয় অসিদ্ধ, না হয় পরস্পর-সাপেক্ষ। অতএব এরূপ স্থলে উহাদের সমাধান অসম্ভব।

$$a_1x+b_1y+c_1=0$$
$$a_2x+b_2y+c_2=0$$

(i) x, y এবং 1কে লব করিয়া পর-পর তিনটি ভগ্নাংশ লিখ এবং উহাদিগকে সমতা-চিহ্ন (=) দ্বারা সংযুক্ত কর ;

(ii) xএর হর = প্রথম সমীকরণে yএর সহগ × দ্বিতীয় সমীকরণের ধ্রুবক পদ
− দ্বিতীয় সমীকরণে yএর সহগ × প্রথম সমীকরণের ধ্রুবক পদ

(iii) yএর হর = প্রথম সমীকরণের ধ্রুবক পদ × দ্বিতায় সমীকরণে xএর সহগ
− দ্বিতীয় সমীকরণের ধ্রুবক পদ × প্রথম সমীকরণে xএর সহগ ;

(iv) 1এর হর = প্রথম সমীকরণে xএর সহগ × দ্বিতীয় সমীকরণে yএর সহগ
− দ্বিতীয় সমীকরণে xএর সহগ × প্রথম সমীকরণে yএর সহগ।

অতএব বজ্রগুণন-প্রণালী দ্বারা দুইটি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট সহ-সমীকরণের সমাধান সহজে লিখা যায়।

এই প্রণালী-প্রয়োগের পূর্ব্বে প্রত্যেক সমীকরণকে (আবশ্যক হইলে সরল এবং পক্ষান্তর করিয়া)

$$ax+by+c=0$$

-এইরূপ আকারে লিখিবে এবং সমীকরণদ্বয়ের একটিকে অপরটির নীচে এরূপভাবে লিখিবে, যেন উহাদের সদৃশ পদগুলি একই পাটিতে (column-এ) থাকে।

উদাহরণ 1. সমাধান কর : $2x+3y+5=0$
$4x+7y+6=0.$

বজ্রগুণন দ্বারা $\dfrac{x}{3\times6-7\times5}=\dfrac{y}{5\times4-6\times2}=\dfrac{1}{2\times7-4\times3}$;

অর্থাৎ, $\dfrac{x}{-17}=\dfrac{y}{8}=\dfrac{1}{2}$;

$\therefore\ x=\dfrac{-17}{2}=-8\frac{1}{2}$ এবং $y=\dfrac{8}{2}=4.$

অতএব $x=-8\frac{1}{2}$ এবং $y=4.$

[সমাধানের বিশুদ্ধি পরীক্ষা কর]

উদাহরণ 2. সমাধান কর : $2x+3(y+1)=19,$ ···(1)
$5(x+2)-8(y+1)=11.$ ···(2)

বজ্রগুণন-প্রণালী-প্রয়োগের পূর্ব্বে প্রত্যেক সমীকরণকে '$ax+by+c=0$' -আকারে প্রকাশ করিয়া লইবে।

পক্ষান্তর করিয়া এবং সরল করিয়া (1) হইতে $2x+3y-16=0$
এবং (2) হইতে $5x-8y-9=0$.

বজ্রগুণন দ্বারা

$$\frac{x}{3.(-9)-(-8)(-16)}=\frac{y}{(-16).5-(-9).2}=\frac{1}{2(-8)-5.3}$$

অথবা, $\frac{x}{-27-128}=\frac{y}{-80+18}=\frac{1}{-16-15}$;

অথবা, $\frac{x}{-155}=\frac{y}{-62}=\frac{1}{-31}$;

$\therefore x=\frac{-155}{-31}=5$ এবং $y=\frac{-62}{-31}=2$.

অতএব $x=5$ এবং $y=2$.

প্রশ্নমালা 36

বজ্রগুণন-প্রণালী দ্বারা সমাধান কর :

1. $2x+3y+7=0$, $3x+2y+8=0$
2. $4x+3y-7=0$, $3x-5y+2=0$
3. $x-2y+10=0$, $2x-3y+16=0$
4. $2x-y-4=0$, $5x+3y-10=0$
5. $3x+4y-14=0$, $8y-7x-2=0$
6. $3x+2y-17=0$, $2x-3y+6=0$
7. $x+2y=2$, $y-2x=5$
8. $9x-5y=17$, $13y-2x=20$
9. $3x+4y=7$, $2x+3y=5$
10. $(x-6)^2+(y-1)^2=(x-7)^2+(y-2)^2$, $x-2=2y+3$
11. $(x+7)(y-3)+7=(y+3)(x-1)+5$, $5x-11y+35=0$
12. $x+y+1=0$, $(b+c)x+(c+a)y+(a+b)=0$
13. $ax+by=c$, $a^2x+b^2y=c^2$
14. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$, $2bx+ay=2ab$
15. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$, $ax-by=a^2-b^2$

16-35. প্রশ্নমালা 35এর 1-20 প্রশ্নগুলি বজ্রগুণন-প্রণালী দ্বারা সমাধান কর।

সহ-সমীকরণ-বিষয়ক বিবিধ উদাহরণ

63. উদাহরণ 1. সমাধান কর : $25x+27y=131$ ... (i)
$27x+25y=129.$ ... (ii)

এস্থলে প্রথম সমীকরণে x এবং yএর সহগ যথাক্রমে অপর সমীকরণে y এবং xএর সহগের সমান। এরূপ ক্ষেত্রে নিম্নলিখিত প্রণালীতে সহজে উত্তর পাওয়া যায়।

(i) এবং (ii) যোগ করিয়া $52x+52y=260$;

উভয় পক্ষকে 52 দ্বারা ভাগ করিলে $x+y=\frac{260}{52}=5$ ... (iii)

(ii) হইতে (i) বিয়োগ করিয়া $2x-2y=-2$

উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করিয়া $x-y=-1.$ ... ... (iv)

এখন (iii) এবং (iv) হইতে যোগ দ্বারা $2x=4$, অর্থাৎ $x=2.$

ও (iii) এবং (iv) হইতে বিয়োগ দ্বারা $2y=6$, অর্থাৎ $y=3.$

অতএব, $x=2,\ y=3.$

উদাহরণ 2. সমাধান কর : $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=13$

$\frac{5}{x}+\frac{4}{y}=22.$

মনে কর, $\frac{1}{x}=u$ এবং $\frac{1}{y}=v$, তাহা হইলে প্রদত্ত সমীকরণ দুইটি এরূপ দাঁড়াইবেঃ

$2u+3v=13$ ... (i)
$5u+4v=22.$ ... (ii)

এখন 61 অণুচ্ছেদোক্ত প্রণালীতে u অপনয়ন করিতে (i)কে 5 দ্বারা এবং (ii)কে 2 দ্বারা গুণ করিলে

$$10u+15v=65$$
$$10u+\ 8v=44.$$

বিয়োগ দ্বারা $7v=21$; $\therefore\ v=3.$

vএর এই মান (i)এ বসাইলে $2u+3.3=13$; অর্থাৎ $2u=13-9=4.$

$\therefore\ u=4\div2=2.$

$$\left.\begin{array}{l}\text{অতএব } \frac{1}{x}=u=2 \quad \therefore\ x=\frac{1}{2}\\ \text{এবং } \frac{1}{y}=v=3\ ;\ \therefore\ y=\frac{1}{3}\end{array}\right\}$$

উদাহরণ 3. সমাধান কর :

$$\frac{8}{3x+2y+1}+\frac{3}{6x-4y+5}=2$$

$$\frac{3}{3x+2y+1}-\frac{1}{6x-4y+5}=\frac{1}{24}.$$

মনে কর $\frac{1}{3x+2y+1}=u$ এবং $\frac{1}{6x-4y+5}=v$; তাহা হইলে প্রদত্ত সমীকরণ দুইটি এইরূপ দাঁড়াইবে :

$$8u+3v=2 \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

$$3u-\ v=\tfrac{1}{24}. \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

v অপনয়ন করিতে (ii)কে 3 দ্বারা গুণ করিয়া (i)এর সহিত যোগ করিলে

$$17u=2+\tfrac{1}{8}=\tfrac{17}{8}\ ;$$

$$\therefore\ u=\tfrac{17}{8}\div 17=\tfrac{1}{8}\ ;$$

uএর এই মান (i)এ বসাইলে $8\times\frac{1}{8}+3v=2$;

পক্ষান্তর করিয়া $3v=2-8\times\frac{1}{8}=1$;

$\therefore$ $v=\frac{1}{3}.$

অতএব $\frac{1}{3x+2y+1}=u=\frac{1}{8}$; $\therefore\ 3x+2y+1=8$;

পক্ষান্তর দ্বারা $3x+2y=7.$ ... (iii)

এবং $\frac{1}{6x-4y+5}=v=\frac{1}{3}$ $\therefore\ 6x-4y+5=3$;

পক্ষান্তর দ্বারা $6x-4y=-2.$ ... (iv)

এখন 61 বা 62 অণুচ্ছেদোক্ত প্রণালীতে (iii) এবং (iv) সমাধান করিলে দেখিবে যে,

$$x=1,\ y=2.$$

প্রশ্নমালা 37

সমাধান কর :

1. $12x+17y=41$
   $17x+12y=46$

2. $29x+37y=124$
   $37x+29y=140$

3. $51x+101y=405$
   $101x+51y=355$

4. $81x-62y=138$
   $62x-81y=5$

5. $75x-53y=269$
$53x-75y=115$

6. $ax+by=ab$
$bx+ay=ab$

7. $ax-by=ab$
$bx-ay=ab$

8. $\frac{4}{x}+\frac{10}{y}=2$
$\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{19}{20}$

9. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5$
$\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=12$

10. $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=2$
$\frac{5}{x}+\frac{10}{y}=5\frac{5}{6}$ [ক. প্র., 1887]

11. $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=2$
$\frac{1}{x}-\frac{1}{2y}=\frac{1}{3}$ [ক. প্র., 1927]

12. $\frac{5}{x}+\frac{3}{y}=30$
$\frac{9}{x}=2+\frac{5}{y}$ [বো. প্র., 1927]

13. $\frac{x}{2}+\frac{3}{y}=1\frac{1}{2}$
$\frac{x}{3}-\frac{4}{y}=-\frac{1}{2}$

14. $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-2}=2$
$\frac{2}{x-1}+\frac{3}{y-2}=5$
[এ. প্র., 1913]

15. $\frac{8}{x+2y}+\frac{3}{2x-y}=3$
$\frac{12}{x+2y}-\frac{6}{2x-y}=1$
[বো. প্র., 1930]

16. $\frac{12}{x+y}+\frac{8}{x-y}=8$
$\frac{27}{x+y}-\frac{12}{x-y}=6$
[এ. প্র., 1927]

17. $\frac{7}{2x+3y}+\frac{9}{8x-7y}=2$
$\frac{5}{2x+3y}-\frac{6}{8x-7y}=\frac{1}{21}$

18. $\frac{4}{x+y-2}+\frac{2}{2x+y-5}=2$
$\frac{7}{x+y-2}-\frac{4}{2x+y-5}=1.$

19. $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$
$\frac{b}{x}+\frac{a}{y}=1$

20. $\frac{a}{x-c}+\frac{b}{y-d}=m$
$\frac{b}{x-c}+\frac{a}{y-d}=n$

21. $3x-2y=6xy$
$5x+6y=38xy$

[সঙ্কেত : উভয় সমীকরণকে xy দ্বারা ভাগ করিলে উহারা এইরূপ দাঁড়াইবে :

$$\frac{3}{y}-\frac{2}{x}=6 ;\ \frac{5}{y}+\frac{6}{x}=38.$$]

22. $3x-y=3xy$
$4y+x=34xy$

23. $x+y=2xy$
$x-y=xy$ [ঢা. প্র., 1931]

24. $\frac{x+y}{xy}=5$
$\frac{x-y}{xy}=9.$

25. $(a+b)x+(a-b)y=2a$
$(a-b)x+(a+b)y=2b.$
[এ. প্র., 1891]

সহ-সমীকরণ-বিষয়ক প্রশ্ন (Problems)

64. সরল সমীকরণ দ্বারা প্রশ্নের সমাধান-প্রণালী প্রথম খণ্ডের 206 পৃষ্ঠায় বর্ণিত হইয়াছে। যে-সকল প্রশ্নে একাধিক অজ্ঞাত রাশি থাকে, কখনও কখনও ঐগুলিতে প্রত্যেক অজ্ঞাত রাশির জন্য স্বতন্ত্র অক্ষর ধরিয়া অনেকস্থলে সমীকরণ গঠন এবং উত্তর নির্ণয় করা সহজ হয়। এরূপক্ষেত্রে যতগুলি অক্ষর ধরা হইবে, প্রশ্ন হইতে ততগুলি পরস্পর-নিরপেক্ষ সমীকরণ গঠিত করিতে হয় এবং প্রাপ্ত সহ-সমীকরণগুলি হইতে অক্ষরগুলির মান নির্ণয় করিতে হয়।

নিম্নে কতকগুলি উদাহরণ দেওয়া হইল :

উদাহরণ 1. কোন সংখ্যার তিনগুণ এবং অপর এক সংখ্যার পাঁচগুণের সমষ্টি 71 ; প্রথম সংখ্যার পাঁচগুণ দ্বিতীয় সংখ্যার আটগুণ হইতে 4 বেশী হইলে সংখ্যাদ্বয় নির্ণয় কর।

মনে কর, প্রথম সংখ্যা x এবং দ্বিতীয় সংখ্যা y ;

অতএব প্রশ্নের প্রথম সর্ত্তানুসারে $3x+5y=71$; ··· (i)

প্রশ্নের দ্বিতায় সর্ত্তানুসারে $5x-8y=4.$ ··· (ii)

এখন (i) এবং (ii) সহ-সমীকরণদ্বয় হইতে x এবং y পাওয়া যাইবে।

(i)কে 5 দ্বারা গুণ করিলে $15x+25y=355,$ ··· (iii)

এবং (ii)কে 3 দ্বারা গুণ করিলে $15x-24y=12$; ··· (iv)

(iii) হইতে (iv) বিয়োগ করিলে $49y=343$; $\therefore$ $y=\frac{343}{49}=7$.

(i)এ $y=7$ বসাইলে $3x+35=71$; $\therefore$ $3x=71-35=36$; $\therefore$ $x=12$.

অতএব, $x=12$, $y=7$.

[বিশুদ্ধি-পরীক্ষা : $3.12+5.7=36+35=71$;
$5.12-8.7=60-56=4$.

অতএব সমাধান শুদ্ধ হইয়াছে।]

উদাহরণ 2. কোন ভগ্নাংশের লবের সহিত 4 যোগ করিলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{2}$এর সমান হয় এবং উহার হরের সহিত 1 যোগ করিলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{5}$এর সমান হয়। ভগ্নাংশটি কত ?

মনে কর, নির্ণেয় ভগ্নাংশ$=\frac{x}{y}$; তাহা হইলে $\frac{x+4}{y}=\frac{1}{2}$; ... (i)

$$\frac{x}{y+1}=\frac{1}{5}. \quad \cdots \text{(ii)}$$

(i)এর উভয় পক্ষকে $2y$ দ্বারা গুণ করিলে $2(x+4)=y$. ... (iii)

(ii)এর উভয় পক্ষকে $5(y+1)$ দ্বারা গুণ করিলে $5x=y+1$

$\therefore$ $5x-1=y$. ... (iv)

এখন (iii) এবং (iv) সহ-সমীকরণদ্বয় হইতে x এবং y পাওয়া যাইবে।

(iv) এবং (iii) হইতে $5x-1=2(x+4)=2x+8$;

পক্ষান্তর করিয়া $5x-2x=8+1$; অর্থাৎ, $3x=9$; $\therefore$ $x=3$.

(iii)এ $x=3$ ধরিলে $y=2(x+4)=2\times7=14$.

$$\therefore \text{ নির্ণেয় ভগ্নাংশ}=\frac{x}{y}=\frac{3}{14}.$$

উদাহরণ 3. একটি দুই অঙ্ক-বিশিষ্ট সংখ্যা উহার অঙ্কগুলির যোগফলের পাঁচগুণ। সংখ্যাটির সহিত 9 যোগ করিলে অঙ্কদ্বয় পরস্পর স্থান-বিনিময় করে। সংখ্যাটি কত ?

মনে কর, সংখ্যাটির দশকাঙ্ক$=x$ এবং এককাঙ্ক$=y$

অতএব সংখ্যাটির মান$=10x+y$

প্রশ্নের প্রথম সর্তানুসারে $10x+y=5(x+y)$;

পক্ষান্তর করিয়া $5x=4y$: ... ... (i)

x এবং y স্থান-বিনিময় করিলে যে সংখ্যা পাওয়া যায়, তাহার মান$=10y+x$, অতএব প্রশ্নের দ্বিতীয় সর্তানুসারে $10x+y+9=10y+x$

পক্ষান্তর করিয়া $9x+9=9y$;

উভয় পক্ষকে 9 দ্বারা ভাগ করিয়া $x+1=y$. ... (ii)

(ii) হইতে y এর মান (i) এ স্থাপন করিলে $5x=4(x+1)=4x+4$;

পক্ষান্তর করিয়া $x=4$.

এখন (ii) হইতে $y=x+1=4+1=5$.

অতএব নির্ণেয় সংখ্যা $=45$.

[বিশুদ্ধি-পরীক্ষা : $45=5(4+5)$ অর্থাৎ 5×9 ; এবং $45+9=54$.]

উদাহরণ 4. তিনজন পুরুষ এবং ছয়জন বালক একটি কাজ দুই দিনে শেষ করিতে পারে। চারিজন পুরুষ এবং সাতজন বালক ঐ কাজ $1\frac{3}{5}$ দিনে পারিলে একজন পুরুষ অথবা একজন বালক ঐ কাজ কতদিনে পারিবে ?

মনে কর, কাজটি একজন লোক x দিনে এবং একজন বালক y দিনে করিতে পারে। তাহা হইলে একদিনে একজন লোক কাজের $\frac{1}{x}$ অংশ এবং একজন বালক কাজের $\frac{1}{y}$ অংশ করিতে পারিবে।

অতএব প্রশ্নের প্রথম সর্তানুসারে $\frac{3}{x}+\frac{6}{y}=\frac{1}{2}$; ... (i)

এবং দ্বিতীয় সর্তানুসারে $\frac{4}{x}+\frac{7}{y}=\frac{5}{8}$. ... (ii)

(i)কে 4 দ্বারা গুণ করিলে $\frac{12}{x}+\frac{24}{y}=2$; ... (iii)

এবং (ii)কে 3 দ্বারা গুণ করিলে $\frac{12}{x}+\frac{21}{y}=\frac{15}{8}$ ... (iv)

(iii) হইতে (iv) বিয়োগ করিলে $\frac{3}{y}=2-\frac{15}{8}=\frac{1}{8}$; $\therefore\ y=24$.

এখন (i)এ $y=24$ ধরিলে $\frac{3}{x}+\frac{6}{24}=\frac{1}{2}$; অর্থাৎ $\frac{3}{x}=\frac{1}{2}-\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$; $\therefore\ x=12$.

অতএব একজন পুরুষ 12 দিনে এবং একজন বালক 24 দিনে কাজটি সম্পন্ন করিতে পারে।

উদাহরণ 5. এক ব্যক্তি স্রোতের অনুকূলে দাঁড় বাহিয়া তিন ঘণ্টায় 42 মাইল গেল ; কিন্তু স্রোতের প্রতিকূলে দাঁড় বাহিয়া ফিরিয়া আসিতে তাহার 21 ঘণ্টা লাগিল। নৌকা এবং স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

মনে কর, প্রতি ঘণ্টায় স্থির-জলে নৌকার বেগ x মাইল এবং স্রোতের বেগ y মাইল। অতএব প্রশ্নের প্রথম সর্ত্তানুসারে $x+y=\frac{42}{3}=14.$ ... (i)

এবং দ্বিতীয় সর্ত্তানুসারে $x-y=\frac{42}{21}=2.$ ... (ii)

(i) এবং (ii) হইতে যোগ দ্বারা $2x=16, \therefore x=8.$

এখন (i) এ $x=8$ ধরিলে, $8+y=14$; $\therefore y=14-8=6.$

অতএব প্রতি ঘণ্টায় নৌকার বেগ 8 মাইল এবং স্রোতের বেগ 6 মাইল।

[বিশুদ্ধি-পরীক্ষা : $(8+6)\times 3=42$; এবং $(8-6)\times 21=2\times 21=42.$]

উদাহরণ 6. কতকগুলি বালকের মধ্যে কয়েকটি লেবু সমানভাবে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল। যদি দুইজন বালক বেশী হইত, তাহা হইলে প্রত্যেকে একটি করিয়া লেবু কম পাইত ; কিন্তু যদি চারিজন কম হইত, তাহা হইলে প্রত্যেকে চারিটি বেশী পাইত। বালকের সংখ্যা এবং লেবুর সংখ্যা নির্ণয় কর।

মনে কর, বালকের সংখ্যা x এবং প্রত্যেকে y লেবু পাইল।

তাহা হইলে মোট লেবুর সংখ্যা $=xy.$

অতএব প্রশ্নের সর্ত্তানুসারে $(x+2)(y-1)=xy,$ ... (i)

$(x-4)(y+4)=xy$ ... (ii)

সরল করিয়া (i) হইতে $xy-x+2y-2=xy$;

পক্ষান্তর এবং সরল করিয়া $-x+2y=2$; ... (iii)

এবং (ii) হইতে $xy+4x-4y-16=xy$;

অথবা $4x-4y=16$;

উভয় পক্ষকে 4 দ্বারা ভাগ করিয়া $x-y=4.$ ... (iv)

(iii) এবং (iv) হইতে যোগ দ্বারা $y=6.$

এখন (iv)এ $y=6$ ধরিলে $x-6=4,$

$\therefore x=4+6=10.$

অতএব বালকের সংখ্যা $=10$;

এবং মোট লেবুর সংখ্যা $=xy=10\times 6=60.$

প্রশ্নমালা 38

1. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 80 এবং অন্তর 60 ; সংখ্যাদ্বয় কত ?

2. দুইটি কোণের সমষ্টি 135° এবং অন্তর 45° ; কোণ দুইটি কত ?

3. একটি সংখ্যার দ্বিগুণ এবং অপর এক সংখ্যার তিনগুণের সমষ্টি 72 ; প্রথম সংখ্যার তনগুণ দ্বিতীয় সংখ্যার চারিগুণ অপেক্ষা 6 বেশী। সংখ্যাদ্বয় কত ?

4. পাঁচটি গরু এবং তিনটি ছাগলের দাম 230 টাকা। সাতটি গরু এবং আটটি ছাগলের দাম 360 টাকা। একটি গরু এবং একটি ছাগলের দাম কত ?

5. এক দোকানদার 15 মণ চাউল এবং 3 মণ চিনি 186 টাকায় এবং 12 মণ চাউল এবং 8 মণ চিনি 216 টাকায় বিক্রয় করিল। চাউল এবং চিনির প্রতিমণের বিক্রয়-মূল্য স্থির কর।

6. এরূপ একটি ভগ্নাংশ নির্ণয় কর, যাহার লবের সহিত 1 যোগ করিলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{2}$এর এবং যাহার হর হইতে 1 বিয়োগ করিলে উহা $\frac{1}{3}$এর সমান হয়।

7. কোন ভগ্নাংশের লব এবং হর উভয়ে 1 যোগ করিলে উহা $\frac{3}{4}$এর সমান হয় ; আবার লব ও হর উভয় হইতে 3 বিয়োগ করিলে উহা $\frac{1}{2}$ এর সমান হয়। ভগ্নাংশটি কত ?

8. এরূপ একটি ভগ্নাংশ নির্ণয় কর, যাহার লবে 1 যোগ এবং হর হইতে 1 বিয়োগ করিলে ভগ্নাংশ $\frac{2}{5}$এর সমান হয় ; কিন্তু লব হইতে 1 বিয়োগ এবং হরে 1 যোগ করিলে উহা $\frac{1}{6}$এর সমান হয়।

9. একটি ভগ্নাংশের লবকে 1 এবং হরকে 3 বাড়াইলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{2}$এর সমান হয় ; কিন্তু লবকে 2 এবং হরকে 1 বাড়াইলে উহা $\frac{3}{4}$এর সমান হয়। ভগ্নাংশটি কত ?

10. দুইটি ভগ্নাংশের প্রত্যেকটির লব 1 ; উহাদের সমষ্টি $\frac{3}{4}$ এবং অন্তর $\frac{1}{4}$ হইলে ভগ্নাংশদ্বয় কত ?

[সঙ্কেত : মনে কর, ভগ্নাংশদ্বয় যথাক্রমে $\frac{1}{x}$এবং$\frac{1}{y}$.]

11. একটি ভগ্নাংশের লব 1 এবং অপর এক ভগ্নাংশের লব 2 ; ভগ্নাংশ-দুইটির সমষ্টি $\frac{3}{10}$; প্রথমটির দ্বিগুণ দ্বিতীয়টি হইতে $\frac{1}{5}$ বেশী হইলে ভগ্নাংশ-দুইটি নির্ণয় কর।
(অক্সফোর্ড প্রবেশিকা)

12. একটি ভগ্নাংশের লব 1 এবং অপর এক ভগ্নাংশের হর 5 ; উভয় ভগ্নাংশের সমষ্টি $\frac{17}{20}$; দ্বিতীয়টি প্রথমটির দ্বিগুণ অপেক্ষা $\frac{1}{10}$ বেশী হইলে ভগ্নাংশ-দুইটি নির্ণয় কর।

13. দুইটি অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের যোগফল 5 ; সংখ্যাটিকে 9 দিয়া বাড়াইলে অঙ্কদ্বয় স্থান-বিনিময় করে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

14. দুইটি অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার এককাঙ্ক দশকাঙ্ক অপেক্ষা 3 বেশী। সংখ্যাটি অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির 3 গুণ অপেক্ষা 4 বেশী হইলে উহা কত ?

15. একটি দুই-অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা হইতে 36 বিয়োগ করিলে উহার অঙ্কদ্বয় স্থান-বিনিময় করে। যদি উহার দশকাঙ্কের দ্বিগুণ এবং এককাঙ্কের 9 গুণের সমষ্টি 41 হয়, তাহা হইলে সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

16. একটি দুই-অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা হইতে উহার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি বিয়োগ করিলে অঙ্কগুলি স্থান-বিনিময় করে। যদি উহার দশকাঙ্কের 5 গুণ এককাঙ্কের 6 গুণ অপেক্ষা এক বেশী হয়, তবে সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

17. 10 এবং 100 এর অন্তর্ভূত একটি সংখ্যার দশকাঙ্কের 4 গুণ উহার এককাঙ্ক অপেক্ষা 1 কম ; অঙ্কদ্বয়ের অন্তরের চারিগুণকে 1 বাড়াইলে সংখ্যাটি পাওয়া যায়। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

18. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যাকে অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি দ্বারা ভাগ করিলে 4 ভাগফল হয় এবং 3 অবশিষ্ট থাকে এবং সংখ্যাটির সহিত 27 যোগ করিলে অঙ্কগুলি স্থান-বিনিময় করে। সংখ্যাটি কত?

19. 10 এবং 100এর অন্তর্ভূত একটি সংখ্যা উহার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির আটগুণ। সংখ্যাটি হইতে 45 বিয়োগ করিলে উহার অঙ্কদ্বয় স্থান-বিনিময় করে। সংখ্যাটি কত নির্ণয় কর। [এ. প্র., 1920]

20. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যাকে উহার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল 7 হয় এবং অঙ্কদ্বয়ের বিপরীত রাশি-দুইটির (reciprocalsএর) সমষ্টি অঙ্ক-দুইটির গুণফলের বিপরীত রাশির 9 গুণ। সংখ্যাটি নির্ণয় কর। [মা. প্র., 1887]

21. কোন দুই অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা এবং উহার অঙ্কদ্বয় উল্টাইয়া লিখিলে উৎপন্ন সংখ্যা, এই উভয়ের সমষ্টি 110 ; প্রথম সংখ্যাটি শেষোক্ত সংখ্যা এবং 1 এর অন্তরের 5 গুণ অপেক্ষা 1 বেশী হইলে সংখ্যাটি নির্ণয় কর। [ক. প্র., 1884]

22. দুইজন পুরুষ এবং তিনজন বালক একটি কাজ 5 দিনে এবং তিনজন পুরুষ ও দুইজন বালক ঐ কাজটি 4 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। একজন পুরুষ অথবা একজন বালক একা কাজটি কতদিনে পারিবে?

23. A এবং B একটি কাজ 6 দিনে করিতে পারে। যদি A দ্বিগুণ এবং B তিনগুণ পরিশ্রম করিতে পারিত, তাহা হইলে কাজটি $2\frac{1}{2}$ দিনে সম্পন্ন হইত। A একা কাজটি কত দিনে পারিবে?

24. A এবং B একত্র একটি কাজ 10 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। A একা 12 দিন কাজ করিবার পর চলিয়া গেল এবং B আসিয়া অবশিষ্ট কাজটি 8 দিনে শেষ করিল। উহারা প্রত্যেকে একা কাজটি কতদিনে সম্পন্ন করিতে পারিবে?

25. দুইটি নল দ্বারা একটি চৌবাচ্চা 6 মিনিটে পূর্ণ হয়। নল-দুইটি একসঙ্গে খুলিয়া দিবার তিন মিনিট পরে দ্বিতীয় নলটি বন্ধ করিয়া দেওয়ায় চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হইতে আরও 5 মিনিট লাগিল। প্রথম অথবা দ্বিতীয় নলটি দ্বারা চৌবাচ্চাটি স্বতন্ত্রভাবে কত সময়ে পূর্ণ হইবে?

26. এক ব্যক্তি স্রোতের অনুকূলে দাঁড় বাহিয়া 5 ঘণ্টায় 40 মাইল গেল ; কিন্তু স্রোতের প্রতিকূলে 40 মাইল ফিরিয়া আসিতে তাহার 10 ঘণ্টা লাগিল। নৌকার এবং স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

27. স্রোতের অনুকূলে দাঁড় বাহিয়া 30 মাইল গিয়া যাত্রাস্থানে ফিরিয়া আসিতে এক ব্যক্তির 12 ঘণ্টা লাগিল। যদি স্রোতের অনুকূলে 15 মাইল যাইয়া স্রোতের প্রতিকূলে 9 মাইল আসিতে তাহার 4 ঘণ্টা লাগে, নৌকার এবং স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

28. স্রোতের অনুকূলে 22 মাইল এবং প্রতিকূলে 15 মাইল যাইতে একখানি নৌকার 5 ঘণ্টা লাগে। যদি স্রোতের অনুকূলে 33 মাইল এবং প্রতিকূলে 20 মাইল যাইতে উহার 7 ঘণ্টা লাগে, নৌকার এবং স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

29. কতকগুলি বালকের মধ্যে কয়েকটি আম সমানভাবে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল। যদি 5 জন বালক বেশী থাকিত, তাহা হইলে প্রত্যেকে 1টি আম কম পাইত ; কিন্তু যদি 3 জন কম থাকিত, তাহা হইলে প্রত্যেকে 1টি বেশী পাইত। বালকের সংখ্যা এবং প্রত্যেকের অংশ নির্ণয় কর।

30. একটি আয়তাকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ এরূপ যে, দৈর্ঘ্য 5 গজ কমাইলে এবং প্রস্থ 4 গজ বাড়াইলে, অথবা দৈর্ঘ্য 10 গজ বাড়াইলে এবং প্রস্থ 5 গজ কমাইলে ক্ষেত্রফল উভয় স্থলে ঠিক থাকে। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ নির্ণয় কর।

31. একটি আয়তাকার ক্ষেত্রের পরিসীমা 60 ফুট। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য 5 ফুট বাড়াইলে এবং প্রস্থ 5 ফুট কমাইলে উহার ক্ষেত্রফল 75 বর্গফুট হ্রাস পায়। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ নির্ণয় কর।

32. একটি ঘরের দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ এরূপ যে, উহার দৈর্ঘ্যকে 3 গজ বাড়াইলে এবং প্রস্থকে 3 গজ কমাইলে ক্ষেত্রফল 18 বর্গগজ কমে, কিন্তু দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ উভয়কে 3 গজ বাড়াইলে ক্ষেত্রফল 60 বর্গগজ বাড়ে। ঘরটির দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ কত ?

33. কতকগুলি টাকা কয়েকজন ভিক্ষুকের মধ্যে বিতরণ করিতে গিয়া দেখা গেল যে, প্রত্যেককে তিন আনা হিসাবে দিতে গেলে 2 আনা বাঁচে ; কিন্তু প্রত্যেককে 4 আনা হিসাবে দিতে গেলে $2\frac{1}{2}$ টাকা কম পড়ে। ভিক্ষুকের সংখ্যা কত ?

34. 5 বৎসর পূর্ব্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 6 গুণ ছিল। 3 বৎসর পরে পিতার বয়সের সহিত 1 বৎসর যোগ করিলে উহা পুত্রের বয়সের তিনগুণ হইবে। পিতা এবং পুত্রের বর্ত্তমান বয়স কত ?

35. পিতার বর্ত্তমান বয়স তাঁহার পাঁচ পুত্রের বয়সের সমষ্টির সমান। 15 বৎসর পরে পিতার বয়স উক্ত পাঁচ পুত্রের বয়সের সমষ্টির অর্দ্ধেক হইবে। পিতার বর্ত্তমান বয়স কত ? [পা. প্র., 1910]

36. দশ বৎসর পূর্ব্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 7 গুণ ছিল; দুই বৎসর পরে পিতার বয়সের দ্বিগুণ পুত্রের বয়সের 5 গুণ হইবে। উহাদের বর্ত্তমান বয়স কত?

[ক. প্র., 1920]

37. যখন চাউলের দাম টাকায় আট সের, তখন কোন পরিবারের মাসিক খরচ 195 টাকা এবং যখন চাউলের দাম টাকায় 10 সের, তখন মাসিক খরচ 191 টাকা। ঐ পরিবারে মাসে কত চাউল দরকার হয় এবং চাউল ব্যতীত অন্যান্য মাসিক খরচের পরিমাণ কত?

38. পুস্তক-ছাপাইতে প্রথম এক হাজারের জন্য একরূপ দর এবং প্রত্যেক অতিরিক্ত এক-এক হাজারের জন্য অন্যরূপ দর লওয়া হয়। যদি 7000 পুস্তক ছাপাইবার খরচ 340 টাকা এবং 5000 ছাপাইবার খরচ 260 টাকা হয়, তাহা হইলে ছাপাইবার দর নির্ণয় কর।

39. আয়ের প্রথম একটি অংশের উপর আয়কর দিতে হয় না এবং তদতিরিক্ত অংশের প্রতিটাকায় কোন নির্দ্দিষ্ট হারে আয়কর দিতে হয়। মোট আয় 5000 টাকা হইতে 7000 টাকা হওয়ায় এক ব্যক্তিকে 78 টা. 2 আনার পরিবর্ত্তে 130-3-4 পাই আয়কর দিতে হয়। প্রতিটাকায় আয়করের হার এবং যে অংশের আয়কর দিতে হয় না, উহা স্থির কর।

40. একটি মোটর-লরী 400 মণ ওজন বহন করিতে পারে। যদি উহা 150 বস্তা চাউল এবং 100 বস্তা ময়দা, কিংবা 108 বস্তা চাউল এবং 184 বস্তা ময়দা বহন করিতে সমর্থ হয়, তাহা হইলে প্রত্যেক বস্তা চাউল এবং প্রত্যেক বস্তা ময়দার ওজন নির্ণয় কর।

অষ্টম অধ্যায়

সরল সমীকরণের লেখ

(Graphs of Simple Equations)

65. প্রথম খণ্ডের ঊনবিংশ অধ্যায়ে প্রদর্শিত হইয়াছে যে, কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক দেওয়া থাকিলে ছক-কাগজের সাহায্যে উহার অবস্থান নির্ণয় করা যায়। x এবং yএর মধ্যে কোন সম্বন্ধ না থাকিলে (x, y) বিন্দুটি দ্বারা ছক-কাগজের যে-কোন বিন্দুকে সূচিত করা চলে; কারণ x এবং yএর বিভিন্ন মান ধরিয়া কাগজের যে-কোন স্থানে বিন্দুটি স্থাপিত করা যাইতে পারে। কিন্তু x এবং yএর মধ্যে যদি কোন সম্বন্ধ দেওয়া থাকে, তাহা হইলে বিন্দুটিকে কাগজের সর্ব্বত্র স্থাপিত করা যাইবে না; কারণ এস্থলে x-এর কোন একটি মান ধরিলে প্রদত্ত সম্বন্ধ হইতে yএর একটি নির্দ্দিষ্ট মান পাওয়া যাইবে; কাজেই বিন্দুটিকে ছক-কাগজের উপর অনির্দ্দিষ্টভাবে স্থাপিত করা চলিবে না।

মনে কর, x এবং y-সমন্বিত একটি সমীকরণ দেওয়া আছে। উহাতে xএর স্থানে 1, 2, 3, ইত্যাদি মান পরপর বসাইলে সমীকরণটি হইতে yএর যথাক্রমে কতকগুলি মান পাওয়া যাইবে। এখন xএর এক-একটি মানকে ভুজ এবং yএর অনুরূপ মানকে কোটি ধরিয়া কতকগুলি বিন্দু অঙ্কিত করিতে পারা যায়। এই বিন্দুগুলির মধ্য দিয়া একটি রেখা টানিলে রেখাটিকে প্রদত্ত **সমীকরণের লেখ** (Graph) বলে। স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, একটি রেখার যে-কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা কোন সমীকরণ সিদ্ধ হইলে উক্ত রেখাটি হইবে সমীকরণটির লেখ।

66. '$y=mx$'-আকার-বিশিষ্ট সমীকরণের লেখ।

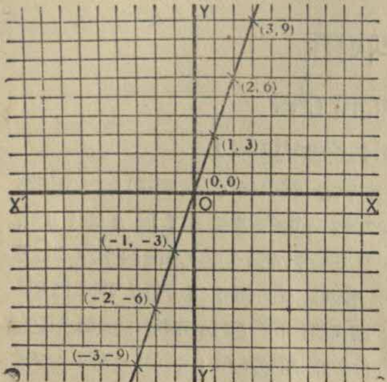
উদাহরণ 1. '$y=3x$'এর লেখ অঙ্কিত কর।

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে দেখা যাইতেছে যে,

যখন $x=$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=3x=$	-9	-6	-3	0	3	6	9

ক্ষুদ্রবর্গক্ষেত্রের 1 বাহুকে একক লইয়া $(-3, -9)$, $(-2, -6)$, $(-1, -3)$, $(0, 0)$, $(1, 3)$, $(2, 6)$ এবং $(3, 9)$ বিন্দুগুলি অঙ্কিত করিলে দেখা যাইবে

যে, উহারা একটি মূলবিন্দুগামী সরলরেখার উপরে অবস্থিত (চিত্র দেখ)। মাপনী



দ্বারা সরলরেখাটি অঙ্কিত কর এবং ইহাকে উভয়দিকে ইচ্ছামত বর্দ্ধিত কর। এই সরলরেখাটিকেই '$y=3x$' সমীকরণের লেখ বা সংক্ষেপে '$3x$'এর লেখ বলা হয়। পরীক্ষা দ্বারা সহজে দেখান যায় যে, যে-বিন্দুর স্থানাঙ্কগুলি দ্বারা $y=3x$ সমীকরণটি সিদ্ধ হয়, কেবলমাত্র ঐ সকল বিন্দুই এই 'লেখ'এর উপর অবস্থিত, অন্য কোন বিন্দু নহে; অর্থাৎ সরলরেখাটির উক্ত বিন্দুগুলির **সঞ্চার-পথ** (Locus)।

উল্লিখিতভাবে দেখান যায় যে, m ধ্রুবক রাশি (Constant) হইলে '$y=mx$' আকারের যে-কোন সমীকরণের লেখ অর্থাৎ 'mxএর লেখা' মূলবিন্দুগামী একটি সরলরেখা।

$ax+by=0$ সমীকরণটিকে $y=-\frac{ax}{b}$ আকারে লিখা যায় এবং উল্লিখিত প্রণালীতে উহার লেখ অঙ্কন করা যায়।

দ্রষ্টব্য। কোন সমীকরণের লেখ অঙ্কন করিতে হইলে x এবং y এরূপ লওয়া উচিত, যেন উহারা অখণ্ড সংখ্যা হয়।

বিন্দু অঙ্কন করিতে সুবিধামত একক লইবে।

67. '$y=mx+c$' আকার-বিশিষ্ট-সমীকরণের লেখ।

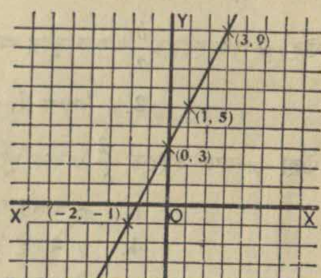
উদাহরণ 2. '$y=2x+3$'এর লেখ অঙ্কিত কর।

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে দেখা যাইতেছে যে,

যখন $x=$	-4	-2	0	1	3
$y=2x+3=$	-5	-1	3	5	9

ক্ষুদ্রবর্গক্ষেত্রের 1 বাহুকে একক লইয়া $(-4, -5)$, $(-2, -1)$, $(0, 3)$, $(1, 5)$ এবং $(3, 9)$ বিন্দুগুলি অঙ্কিত করিলে দেখা যাইবে যে, উহারা এক সরলরেখায়

অবস্থিত। মাপনী দ্বারা সরলরেখাটি অঙ্কিত করিয়া উহাকে উভয় দিকে বর্দ্ধিত কর (চিত্র)। এই সরলরেখাটিকেই '$y=2x+3$' সমীকরণের লেখ বা সংক্ষেপে '$2x+3$'এর লেখ বলা হয়। যে-যে বিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা $y=2x+3$ সমীকরণটি সিদ্ধ হয়, কেবলমাত্র ঐ সকল বিন্দুই এই সরলরেখার উপর অবস্থিত, অপর কোন বিন্দু নহে অর্থাৎ 'লেখ'টিই উক্ত বিন্দুগুলির **সঞ্চার-পথ।**



উল্লিখিতভাবে দেখান যায় যে, m এবং c ধ্রুবক রাশি হইলে

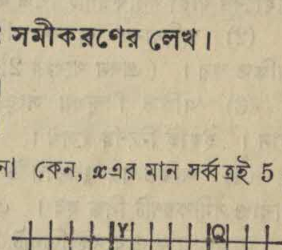
'$y=mx+c$'এর লেখ একটি সরলরেখা।

68. $ax=b$ এবং '$cy=d$'-আকার-বিশিষ্ট সমীকরণের লেখ।

উদাহরণ 3. (i) $x=5$এর লেখ অঙ্কিত কর।

(ii) $y=4$এর লেখ অঙ্কিত কর।

(i) $x=5$; এস্থলে yএর মান যাহাই হউক না কেন, xএর মান সর্ব্বত্রই 5; অতএব (5, 0), (5, 4), (5, 7) ইত্যাদি বিন্দুগুলি 'লেখ'এর উপর থাকিবে। বিন্দুগুলি অঙ্কিত করিলে স্পষ্ট দেখা যাইবে যে, লেখটি y-অক্ষের সমান্তরাল PQ সরলরেখা (চিত্র) এবং ইহা y-অক্ষ হইতে 5 একক দূরে অবস্থিত।



(ii) $y=4$; এস্থলে xএর মান যাহাই হউক না কেন, yএর মান সর্ব্বত্রই 4; অতএব (−3, 4), (0, 4), (5, 4) ইত্যাদি বিন্দুগুলি 'লেখ'এর উপর থাকিবে। বিন্দুগুলি অঙ্কিত করিলে দেখা যাইবে যে, লেখটি x-অক্ষের সমান্তরাল RS সরলরেখা (চিত্র) এবং ইহা x-অক্ষ হইতে 4 একক দূরে অবস্থিত।

অনুসিদ্ধান্ত 1. '$ax=b$, অর্থাৎ $x=\frac{b}{a}$'এর লেখ y-অক্ষের সমান্তরাল এবং উহা y-অক্ষ হইতে $\frac{b}{a}$ একক দূরে অবস্থিত।

2. '$cy=d$, অর্থাৎ $y=\frac{d}{c}$' এর লেখ x-অক্ষের সমান্তরাল এবং উহা x-অক্ষ হইতে $\frac{d}{c}$ একক দূরে অবস্থিত।

3. x-অক্ষই '$y=0$'এর লেখ।

4. y-অক্ষই '$x=0$'এর লেখ।

69. একঘাত সমীকরণের লেখ-অঙ্কনের সহজ প্রণালী।

পূর্ব্ববর্ত্তী উদাহরণ তিনটি হইতে স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, একঘাত সমীকরণের লেখ একটি সরলরেখা ; কিন্তু যেহেতু দুইটি বিন্দু দিয়া একটিমাত্র সরলরেখা অঙ্কিত করা যায়, অতএব একঘাত সমীকরণের লেখ-অঙ্কনের প্রণালী নিম্নলিখিতরূপ হইবে :

(1) প্রদত্ত সমীকরণ হইতে x এবং yএর এইরূপ দুইটি মান-যুগ্ম নির্ণয় কর, যাহাদের দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

(2) সুবিধামত একক ধরিয়া একখানি ছক-কাগজের উপর এই দুইটি বিন্দু অঙ্কিত কর। (প্রথম খণ্ডের 229 পৃষ্ঠায় 'একক-নির্দ্দেশ' দেখ)

(3) অঙ্কিত বিন্দুদ্বয় সংযুক্ত করিয়া মাপনী দ্বারা একটি সীমাহীন সরলরেখা টান। ইহাই নির্ণেয় লেখ।

(4) অঙ্কিত সরলরেখার উপর তৃতীয় একটি বিন্দু লইয়া দেখাও যে, উহার স্থানাঙ্ক দ্বারাও সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। এইরূপে অঙ্কনের বিশুদ্ধি পরীক্ষা করা যায়।

প্রকৃতপক্ষে প্রথমেই তিনটি বিন্দু অঙ্কিত করিয়া দেখিতে হয়, উহারা এক সরল-রেখায় অবস্থিত কিনা। বিন্দুত্রয় এক সরলরেখায় না থাকিলে কোথাও ভুল হইয়াছে বুঝিতে হইবে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য 1. সরল রেখাটি x এবং y-অক্ষকে যে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে, উহাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করাই সুবিধাজনক। সমীকরণটিতে (i) $y=0$ স্থাপন করিয়া xএর মান নির্ণয় কর এবং (ii) $x=0$ স্থাপন করিয়া yএর মান নির্ণয় কর ; তাহা হইলে উক্ত বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক পাইবে।

তবে স্থানাঙ্কগুলিকে এইরূপভাবে লওয়া বাঞ্ছনীয়, যেন উহাদের মধ্যে ভগ্নাংশ না থাকে। প্রদত্ত সমীকরণটিকে '$y=mx+c$'-আকারে রাখিলে স্থানাঙ্ক-নির্ণয়ের সুবিধা হয়।

বিশেষ দ্রষ্টব্য 2. যে বিন্দুদ্বয় দিয়া সরলরেখাটি অঙ্কিত হইবে, উহারা যেন যথাসম্ভব ব্যবধানে থাকে। তাহা না হইলে অঙ্কনে ভুল থাকিতে পারে।

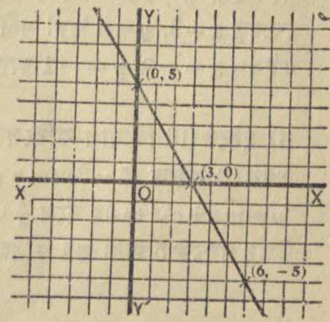
উদাহরণ 4. $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$এর লেখ অঙ্কিত কর ;

স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে,

যখন $x=$	3	0	6
$y=$	0	5	-5

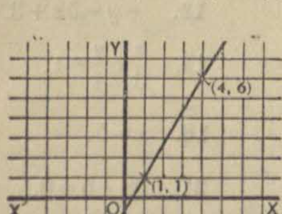
অতএব, (3, 0), (0, 5) এবং (6, −5), এই তিনটি বিন্দু 'লেখ'এর উপর অবস্থিত।

এখন ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের এক বাহুকে একক ধরিয়া (3, 0) এবং (0, 5) বিন্দু দুইটি অঙ্কিত কর এবং উহাদিগকে সংযুক্ত করিয়া মাপনী দ্বারা একটি অসীম সরলরেখা টান। চিত্র হইতে দেখা যাইতেছে যে, অঙ্কিত রেখাটি (6, −5) বিন্দু দিয়াও যাইতেছে। অতএব অঙ্কিত সরলরেখাই নির্ণেয় লেখ।



উদাহরণ 5. $5x-3y=2$এর লেখ অঙ্কিত কর।

এস্থলে $x=0$, $y=-\frac{2}{3}$ এবং $y=0$ হইলে $x=\frac{2}{5}$; অতএব $(0, -\frac{2}{3})$ এবং $(\frac{2}{5}, 0)$ বিন্দুদ্বয় 'লেখ'এর উপর অবস্থিত। এই স্থানাঙ্কগুলিতে ভগ্নাংশ থাকায় নিম্নলিখিত অখণ্ড সংখ্যাযুক্ত স্থানাঙ্কগুলি লওয়া হইল। সমীকরণটিকে $y=\frac{5x-2}{3}$ রূপে লেখা যায়। দেখা যাইতেছে যে,



যখন $x=$	-2	1	4
$y=$	-4	1	6

অতএব $(-2, -4)$, (1, 1) এবং (4, 6) বিন্দুগুলি 'লেখ'এর উপর অবস্থিত। এখন ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের এক বাহুকে একক ধরিয়া $(-2, -4)$ এবং (4, 6) বিন্দুদ্বয় অঙ্কিত করা হইল এবং উহাদিগকে সংযুক্ত করিয়া একটি অসীম সরলরেখা টানা হইল। স্পষ্টতঃ ইহা তৃতীয় বিন্দু (1, 1) দিয়াও যাইতেছে (চিত্র)। অতএব অঙ্কিত সরলরেখাটিই নির্ণেয় লেখ।

70. দুইটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ।

নিম্নপ্রদর্শিত প্রণালীতে দুইটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ। (3, 5) এবং (−2, −1) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে কর, '$y=mx+c$ই' নির্ণেয় সমীকরণ; (69 অনু.)

যেহেতু $x=3$, $y=5$ দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়, $\therefore \quad 5=3m+c$; ... (i)

এইরূপ $x=-2$, $y=-1$ দ্বারাও সমীকরণটি সিদ্ধ হয়,

$\therefore \quad -1=-2m+c$. ··· (ii)

(i) হইতে (ii) বিয়োগ করিলে $6=5m$; $\quad \therefore \quad m=\frac{6}{5}$.

এখন (i) হইতে $5-3m=c$; $\therefore \quad c=5-3m=5-3\times\frac{6}{5}=\frac{7}{5}$.

'$y=mx+c$'এ mএর স্থলে $\frac{6}{5}$ এবং cএর স্থলে $\frac{7}{5}$ বসাইলে $y=\frac{6}{5}x+\frac{7}{5}$;

উভয় পক্ষকে 5 দ্বারা গুণ করিয়া $5y=6x+7$. ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

প্রশ্নমালা 39

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির লেখ অঙ্কিত কর:

1-5. $y=x$; $\quad y=2x$; $\quad y=-4x$; $\quad -y=3x$; $\quad -2y=-7x$.

6-9. $y-5x=0$; $\quad 5y-x=0$; $\quad 3x+2y=0$; $\quad -7x+5y=0$.

10. $y=3x+2$ **11.** $y=-2x+3$ **12.** $-y=5x+3$.

13. $3y=2x+1$ **14.** $5x+7=2y+3$ **15.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$.

16. $\frac{x}{5}-\frac{y}{3}=1$ **17.** $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=-1$ **18.** $x=5$.

19. $x=-7$ **20.** $x+3=0$ **21.** $2x+5=0$.

22. $y=7$ **23.** $y=-3$ **24.** $y+5=0$ **25.** $2y+3=0$.

নিম্নলিখিত রাশির লেখ অঙ্কিত কর:

26. $5x$ **27.** $-\frac{3}{2}x$ **28.** $x+2$ **29.** $3x+2$

30. $-2x+5$ **31.** $\frac{5x+3}{7}$ **32.** $\frac{9-8x}{5}$

নিম্নলিখিত বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর :

33. $(2, 1), (1, 2)$ **34.** $(3, 0), (0, 5)$ **35.** $(-5, 0), (0, 7)$

36. $(-3, 0), (0, -4)$ **37.** $(5, 1), (-2, -3)$ **38.** $(-2, 1), (3, -2)$

39. $(-2, -3), (-4, -2)$ **40.** $(-2, -4), (2, -4)$

41. $(-3, -2), (3, 2), (6, 4)$

[সঙ্কেত : যে-কোন দুইটি বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করিয়া দেখাও যে, উহা অবশিষ্ট বিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারাও সিদ্ধ হয়।]

42. $(0, 5), (3, 11), (-2, 1)$ এবং $(-3, -1)$

43. $(-2, 5), (-1, 3), (3, -5), (4, -7)$.

বিবিধ প্রশ্নমালা (খ)

I

1. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর : $a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)$.

2. (i) $(a+b)^4$কে বিস্তৃত আকারে লিখ।

(ii) $x=\sqrt[4]{5}-1$ হইলে $x^4+4x^3+6x^2+4x+6$এর মান নির্ণয় কর।

3. (i) প্রমাণ কর যে,

$$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(b+c)(c+a)(a+b)$$

(ii) সরল কর :

$$(x+y+z)^3+(x-y-z)^3+(y-z-x)^3+(z-x-y)^3$$

4. (i) $(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)$কে চারিটি বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর।

(ii) $3(y-z)(z-x)(x-y)$কে তিনটি ত্রিঘাতের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর।

5. $a+b+c=0$ হইলে দেখাও যে,

$$2(a+b)^2(a+c)^2+2(b+c)^2(b+a)^2+2(c+a)^2(c+b)^2=a^4+b^4+c^4$$

6. $4x^3-20x^2+17x-4$, $2x^3-15x^2+31x-12$ এবং $4x^3-16x^2+13x-3$এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর। [বো. প্র., 1902]

7. $\dfrac{210x^3+631x^2+181x-210}{210x^3-239x^2-631x-210}$ কে লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্তিত কর।

[পা. প্র., 1902]

8. সরল কর : $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}\right)-\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\right)$.

[বো. প্র., 1887]

II

1. $s=\frac{a+b+c}{n}$ হইলে দেখাও যে, $(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3$

$$-3(s-a)(s-b)(s-c)=\frac{3-n}{n}(a^3+b^3+c^3-3abc)$$

2. $a=\sqrt[3]{5}+\sqrt[4]{7}-2\sqrt{2}$, $b=\sqrt[4]{7}+\sqrt{2}+2\sqrt[3]{5}$ এবং $c=\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}-2\sqrt[4]{7}$ হইলে $a^3+b^3+c^3+3\{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\}+6abc$এর মান নির্ণয় কর।

3. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর : $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$.

4. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর :

$2a^2-6b^2-12c^2+17bc+2ca-ab-4a+b-2c+2$.

5. দেখাও যে,

(i) $a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab=\frac{1}{2}[(b+c)^2+(c+a)^2+(a+b)^2]$;

(ii) $a^2+b^2+c^2$, $8a^2b^2c^2+(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)$ এর একটি গুণনীয়ক।

6. $6x^4-2x^3+9x^2+9x-4$ এবং $9x^4+80x^2-9$এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর এবং xএর এরূপ একটি মান নির্ণয় কর, যাহা বসাইলে উভয় রাশিমালার মান শূন্য হইবে।

[বো. প্র., 1895]

7. দেখাও যে, $\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}-\frac{2x}{1+x^2}-\frac{4x^3}{1+x^4}-\frac{8x^7}{1+x^8}-\frac{16x^{15}}{1-x^{16}}=0$.

[এ. প্র., 1920]

8. (i) $x=\frac{a-1}{a+1}$ এবং $y=\frac{2a-1}{2a+1}$ হইলে দেখাও যে,

$$xy-1=3(x-y)$$

[মা. প্র., 1926]

(ii) সরল কর : $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\times\frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2}{\left(\frac{x}{y}-1\right)\left(\frac{y}{x}+1\right)}-\frac{2}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}$. [লণ্ডন পরীক্ষা]

III

1. দেখাও যে, $x=a^2(b-c)$, $y=b^2(c-a)$, $z=c^2(a-b)$ হইলে

$$\left(\frac{x}{a}\right)^3+\left(\frac{y}{b}\right)^3+\left(\frac{z}{c}\right)^3=3abc(b-c)(c-a)(a-b).$$

2. $x=na+b+c$, $y=a+nb+c$, $z=a+b+nc$ হইলে $(x^2-yz)(b-c)+(y^2-zx)(c-a)+(z^2-xy)(a-b)$এর মান নির্ণয় কর।

3. (i) a^5+b^5কে এবং (ii) $x+(1-x)y+(1-x)(1-y)z+(1-x)(1-y)(1-z)a-1$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

4. $(a+1)(a+4)(a+5)(a+8)+11$কে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর।

5. সরল কর : $2(x-y)^2(x-z)^2+2(y-z)^2(y-x)^2$
$$+2(z-x)^2(z-y)^2-(y-z)^4-(z-x)^4-(x-y)^4.$$

6. $a^3+6a^2+11a+12$ এবং a^3-a^2-3a-9এর গ. সা. গু. এবং ল. সা. গু. নির্ণয় কর। [এ. প্র., 1913]

7. সরল কর : $\dfrac{6x^2y^2}{m+n}\div\left[\dfrac{3(m-n)x}{7(r+s)}\div\left\{\dfrac{4(r-s)}{21xy^2}\div\dfrac{r^2-s^2}{4(m^2-n^2)}\right\}\right]$

[অক্সফোর্ড এবং কেম্‌ব্রিজ পরীক্ষা]

8. দেখাও যে,

(i) $$\frac{b-c}{(px+b)(px+c)}+\frac{c-a}{(px+c)(px+a)}+\frac{a-b}{(px+a)(px+b)}=0.$$

(ii) $$1+\frac{a}{1-a}+\frac{b}{(1-a)(1-b)}+\frac{c}{(1-a)(1-b)(1-c)}$$
$$+\frac{d}{(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)}=\frac{1}{(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)}.$$

IV

1. সরল কর : $a(b+c-a)^2+b(c+a-b)^2+c(a+b-c)^2$
$$+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

2. (i) $(a+b)^5$কে বিস্তৃত আকারে লিখ।

(ii) $a=\sqrt[3]{11}+2$, $b=\sqrt[3]{11}-1$ হইলে
$a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$এর মান নির্ণয় কর।

3. (i) $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

(ii) $a+b+c=0$ হইলে দেখাও যে, $(a^2+b^2+c^2)^2=2(a^4+b^4+c^4)$.

4. (i) পর্য্যবেক্ষণ দ্বারা $3x^4-16x^3+21x^2+4x-12$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

(ii) সমাধান কর: $3x^5-16x^4+21x^3+4x^2-12x=0$.

5. $\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}=1$ হইলে দেখাও যে, $a(1-b)(1-c)(1+b)(1+c)$ $+b(1-c)(1-a)(1+c)(1+a)+c(1-a)(1-b)(1+a)(1+b)=4abc.$

6. দুইটি রাশিমালার গ. সা. গু. $=2x-3$ এবং ল. সা. গু. $=(2x-3)(5x-1)\times(x-5)$; উহাদের একটি $10x^2-17x+3$ হইলে অপরটি কত ?

7. দেখাও যে $\frac{a}{ax+x^2}+\frac{b}{bx+x^2}+\frac{c}{cx+x^2}$

$=\frac{3}{x}-\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}-\frac{1}{x+c}$. [বো. প্র., 1920]

8. দেখাও যে, $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{5a-8b}{5b-3a}}}}}}=\frac{b}{a}$.

V

1. $y+z-x=b-c,\ z+x-y=c-a,\ x+y-z=a-b$ হইলে $2y^2z^2+2z^2x^2+2x^2y^2-x^4-y^4-z^4$এর মান নির্ণয় কর।

2. (i) প্রমাণ কর যে, $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$ $=a^3+b^3+c^3-3abc.$

(ii) $3(y+z-2x)(z+x-2y)(x+y-2z)$কে তিনটি ত্রিঘাতের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর।

3. বিপরীত রাশিমালা কাহাকে বলে ?

$x^4+5x^3y+8x^2y^2+5xy^3+y^4$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

4. $3s=a+b+c$ হইলে দেখাও যে, $\frac{(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2}{2}$

$=-\frac{(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3}{3}\cdot\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\right).$

5. $2(a-b)(a-c)+2(b-c)(b-a)+2(c-a)(c-b)$কে তিনটি বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর। [বো. প্র., 1884]

6. $3x^4+17x^3+27x^2+7x-6$ এবং $6x^4+7x^3-27x^2+17x-3$এর গ. সা. গু. এবং ল. সা. গু. নির্ণয় কর। [মা. প্র., 1888]

7. $3x^5-6x^4+17x^3-34x^2+54x-107$কে $x-2$ দ্বারা ভাগ করিলে ভাগশেষ কত হইবে ?

. $(b+c-a)x=(c+a-b)y=(a+b-c)z=2$ হইলে দেখাও যে,

$$\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=abc.$$ [ঢা. বো., 1926]

VI

1. সরল কর : $\{(y+z)^2-(x+y)(x+z)\}(2x+y+z)+\{(z+x)^2-(y+z)(y+x)\}(x+2y+z)+\{(x+y)^2-(z+x)(z+y)\}(x+y+2z)$

2. (i) প্রমাণ কর যে, $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=\frac{1}{2}\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$

(ii) $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=0$ হইলে প্রমাণ কর যে, $a=b=c$.

3. $a+b+c=p$, $bc+ca+ab=q$, $abc=r$ হইলে

(i) $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)$

এবং (ii) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$এর মান p, q এবং r দ্বারা প্রকাশ কর।

4. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর : $a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)+(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)+3abc(a+b+c)$.

5. $2s=a+b+c$ হইলে দেখাও যে,
$2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4=16s(s-a)(s-b)(s-c)$.

9. x^2+ax+b এবং x^2+cx+dএর গ. সা. গু. $=x+m$;
দেখাও যে, $m=\dfrac{b-d}{a-c}$ এবং $(bc-ad)(a-c)=(b-d)^2$.

7. প্রমাণ কর যে, দুইটি রাশিমালার গুণফল রাশিমালাদ্বয়ের গ. সা. গু. এবং ল. সা. গু.-র গুণফলের সমান।

xএর দুইমাত্রা-বিশিষ্ট দুইটি রাশিমালার গ. সা. গু. $=x-a$ এবং ল. সা. গু. $=x^3-(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x-abc$; রাশিমালা দুইটি নির্ণয় কর।

8. $2s=a+b+c$ হইলে দেখাও যে,

$$\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}-\frac{1}{s}=\frac{abc}{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$ [ক. প্র., 1907]

VII

1. (i) $a+b+c=0$ হইলে প্রমাণ কর যে, $a^3+b^3+c^3=3abc$.

(ii) সরল কর : $\dfrac{(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3}{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)}$.

2. সরল কর : $(ax+by+cz)(bcyz+cazx+abxy)$
$-(by+cz)(cz+ax)(ax+by)$.

3. $x^5+11x-12$ এবং x^5+11x^3+54এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

[পা. প্র., 1895]

4. $2x^4+13x^3-4x^2+6x+1$ এবং $x^4+7x^3-2x^2-21x-3$এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

5. $2x^2+3y^2+6z^2+11yz+8zx+5xy$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

6. দেখাও যে, $(ax+by-cz)^2+(yc+zb)^2+(za+xc)^2$
$+(xb-ya)^2=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$.

7. দেখাও যে,

(i) $a(a+b)(a+c)+b(b+c)(b+a)+c(c+a)(c+b)$
$+3(b+c)(c+a)(a+b)$, $a+b+c$ দ্বারা বিভাজ্য,

এবং (ii) $(a^2-1)(b^2-1)(c^2-1)+(a+bc)(b+ca)(c+ab)$,
$abc+1$ দ্বারা বিভাজ্য

8. সরল কর :

$$\frac{\left\{\left(\frac{a^2}{bc}-1\right)+\left(\frac{b^2}{ca}-1\right)+\left(\frac{c^2}{ab}-1\right)\right\}\left\{\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^4+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^4+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^4\right\}}{\left\{\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2\right\}^2}$$

VIII

1. $b+c=p, c+a=q, a+b=r$ হইলে

$\dfrac{a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}$ এর মান p, q এবং r দ্বারা প্রকাশ কর।

2. (i) প্রমাণ কর যে, $(b-c)(c-a)(a-b)$

$$=a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2).$$

(ii) $x=\sqrt[3]{5}+7, y=\sqrt[3]{5}+3, z=\sqrt[3]{5}-2$ হইলে

$x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)$এর মান নির্ণয় কর।

3. $(a+b)^7$এর বিস্তৃত আকার লিখ। যোগ না করিয়া প্রমাণ কর যে, এই বিস্তৃত আকারের অন্তর্গত যাবতীয় সংখ্যাত্মক সহগের সমষ্টি $=2^7$.

4. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর :

$(y^3+1)(x^2+x+1)(x+1)-(x^3+1)(y^2+y+1)(y+1).$

[মা. প্র., 1887]

5. $1+x+x^2=0$ হইলে দেখাও যে,

$(a+bx+cx^2)+(ax+bx^2+c)+(ax^2+b+cx)=0.$

6. $x-\dfrac{1}{x}=a-\dfrac{1}{a}$ হইলে দেখাও যে, $x^3-\dfrac{1}{x^3}=a^3-\dfrac{1}{a^3}$. [স্কু. ফা., 1954]

7. সরল কর : $\dfrac{a^4+b^4+ab(a^2+b^2)}{(a+b)^2}-\dfrac{a^4+b^4-ab(a^2+b^2)}{(a-b)^2}$

$$+\frac{12a^2b^2}{(a+b)^2-(a-b)^2}$$ [মা. প্র., 1882]

8. $x+y+z=xyz$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}=\frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$$ [ক. প্র., 1898]

নবম অধ্যায়

ভাগশেষ-উপপাদ্য (Remainder Theorem)

ও

গুণনীয়ক-উপপাদ্য (Factor Theorem)

71. উদাহরণ 1. $x-2$ দ্বারা x^2+5x+7কে ভাগ কর এবং দেখাও যে, যে-x-নিরপেক্ষ ভাগশেষ পাইলে তাহা ভাজ্যে xএর স্থলে 2 বসাইয়াও পাওয়া যায়।

$$\begin{array}{l} x-2)\ x^2+5x+7\ (x+7 \\ \qquad\ \ \underline{x^2-2x} \\ \qquad\qquad\ 7x+7 \\ \qquad\qquad\ \underline{7x-14} \\ \qquad\qquad\qquad 21 \end{array}$$

ভাগের প্রক্রিয়া হইতে দেখা যাইতেছে যে, x-নিরপেক্ষ ভাগশেষ $=21$.
ভাজ্যে xএর স্থলে 2 লিখিলে
ভাজ্যের মান $=2^2+5.2+7=21$.
ইহা এবং লব্ধ ভাগশেষ পরস্পর সমান।

অতএব $x-2$ দ্বারা ভাগে ভাজ্যে xএর স্থলে 2 বসাইয়াও x-নিরপেক্ষ ভাগশেষ পাওয়া যায়।

উদাহরণ 2. $x-a$ দ্বারা x^2+px+qকে ভাগ কর এবং a, p, q x-নিরপেক্ষ রাশি হইলে দেখাও যে, যে-x-নিরপেক্ষ ভাগশেষ পাইলে, তাহা ভাজ্যে xএর স্থলে a বসাইয়াও পাওয়া যায়।

$$\begin{array}{l} x-a)\ x^2+px+q\ (x+a+p \\ \qquad\ \ \underline{x^2-ax} \\ \qquad\ (a+p)x+q \\ \qquad\ \underline{(a+p)x-a(a+p)} \\ \qquad\qquad a^2+pa+q. \end{array}$$

$\therefore$ x-নিরপেক্ষ ভাগশেষ $=a^2+pa+q$.
ভাজ্যে xএর স্থলে a বসাইলে ভাজ্যের মান $=a^2+pa+q$.
ইহা এবং লব্ধ ভাগশেষ পরস্পর সমান।

অতএব $x-a$ দ্বারা ভাগে ভাজ্যে xএর স্থলে a লিখিয়াও x-নিরপেক্ষ ভাগশেষ পাওয়া যায়।

পরবর্তী 73 অনুচ্ছেদে প্রমাণিত হইবে যে, পূর্ব্বোক্ত ভাজ্যগুলির অনুরূপ যে-কোন ভাজ্যকে $x-a$ দ্বারা ভাগ করিলে ভাজ্যে xএর স্থলে a লিখিয়া x-নিরপেক্ষ ভাগশেষ পাওয়া যায় ভাগ করিবার প্রয়োজন হয় না।

এই নিয়মটিকে **ভাগশেষ-উপপাদ্য** বলে। ইহা দ্বারা ভাগ না করিয়াই ভাগশেষ নির্ণয় করা যায়।

72. যদি n একটি অখণ্ড ধনসংখ্যা এবং $p, q, r, \ldots l, m$ x-নিরপেক্ষ রাশি হয়, তাহা হইলে $px^n+qx^{n-1}+rx^{n-2}+\ldots+lx+m$কে xএর একটি **মূলদ** (**rational**) এবং **অখণ্ড** (**integral**) রাশিমালা বলে। এইরূপ রাশিমালায় xএর মূলচিহ্নযুক্ত কোন পদ থাকে না, অথবা x-যুক্ত কোন ভগ্নাংশও থাকে না এবং xএর সূচকগুলি অখণ্ড ধনসংখ্যা হইয়া থাকে।

যথা, $2x+3$, $4x^2+3x-5$, $2x^3+x^2-5x+8$, ইহারা প্রত্যেকে xএর মূলদ অখণ্ড রাশিমালা।

73. **ভাগশেষ-উপপাদ্য (Remainder Theorem)।** **$x-a$ দ্বারা xএর কোন মূলদ** (rational) এবং অখণ্ড (integral) রাশিমালাকে ভাগ করিলে যে x-নিরপেক্ষ ভাগশেষ থাকে, তাহা ভাজ্যে xএর স্থলে a বসাইলে পাওয়া যায়।

মনে কর, $px^n+qx^{n-1}+rx^{n-2}+\cdots+lx+m$ xএর একটি মূলদ এবং অখণ্ড রাশিমালা এবং ইহাকে $x-a$ দ্বারা ভাগ করাতে Q হইল ভাগফল এবং R হইল x-নিরপেক্ষ ভাগশেষ। প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$R=pa^n+qa^{n-1}+ra^{n-2}+\cdots+la+m. \quad \cdots \quad (1)$$

প্রমাণ। ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ,

$$\therefore \quad px^n+qx^{n-1}+rx^{n-2}+\cdots+lx+m=(x-a)Q+R. \quad \cdots \quad (2)$$

যেহেতু (2) একটি অভেদ এবং Rএর মধ্যে x-যুক্ত কোন পদ নাই, অতএব xএর স্থলে যে-কোন মান বসাইলে (2)এর উভয় পক্ষের সমতা অক্ষুণ্ণ থাকিবে এবং Rএর কোন পরিবর্ত্তন হইবে না।

এখন (2)এর উভয় পক্ষে xএর স্থলে a লিখ এবং মনে কর, $x=a$ লিখিলে Qএর মান Q' হয়। তাহা হইলে

$$pa^n+qa^{n-1}+ra^{n-2}+\cdots+la+m=(a-a)\times Q'+R=0\times Q'+R=R.$$

অতএব উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

অনুসিদ্ধান্ত 1. রাশিমালাকে $x+a$ দ্বারা ভাগ করিলে রাশিমালাটিতে xএর স্থলে $-a$ লিখিয়া x-নিরপেক্ষ ভাগশেষটি পাওয়া যায়।

কারণ $x+a=x-(-a)$.

অনুসিদ্ধান্ত 2. রাশিমালাটিকে $ax+b$ দ্বারা ভাগ করিলে রাশিমালাটিতে xএর স্থলে $-\frac{b}{a}$ লিখিয়া x-নিরপেক্ষ ভাগশেষটি পাওয়া যায়।

কারণ $ax+b=a(x+\frac{b}{a})=a\{x-(-\frac{b}{a})\}$.

74. xএর মূলদ এবং অখণ্ড রাশিমালাটিকে সংক্ষেপে $f(x)$ দ্বারা সূচিত করিলে উহার xএর স্থলে a লিখিয়া যে রাশিমালাটি পাওয়া যায়, তাহা $f(a)$ দ্বারাই সূচিত হইবে। অতএব ভাগশেষ-উপপাদ্য নিম্নলিখিতরূপেও প্রকাশ করা যায় :

ভাগশেষ-উপপাদ্য। xএর কোন মূলদ এবং অখণ্ড রাশিমালা $f(x)$কে $x-a$ দ্বারা ভাগ করিলে $f(a)$ হইবে x-নিরপেক্ষ ভাগশেষ।

অনুসিদ্ধান্ত 1. $f(x)$কে $x+a$ দ্বারা ভাগ করিলে $f(-a)$ হইবে x-নিরপেক্ষ ভাগশেষ।

অনুসিদ্ধান্ত 2. $f(x)$কে $ax+b$ দ্বারা ভাগ করিলে $f(-\frac{b}{a})$ হইবে x-নিরপেক্ষ ভাগশেষ।

উদাহরণ 1. (i) $2x^3-3x^2+5x+7$কে $x-2$ দ্বারা ভাগ করিলে
এবং (ii) $px^4-qx^3+rx^2+sx-t$কে $x-a$ দ্বারা ভাগ করিলে x-নিরপেক্ষ ভাগশেষটি কত হইবে ?

(i) ভাগশেষ-উপপাদ্য-অনুসারে ভাজ্যে xএর স্থলে 2 বসাইয়া
নির্ণেয় ভাগশেষ $=2.2^3-3.2^2+5.2+7=16-12+10+7=21.$

(ii) ভাজ্যে xএর স্থলে a বসাইয়া
নির্ণেয় ভাগশেষ $=pa^4-qa^3+ra^2+sa-t.$

উদাহরণ 2. x^3+8x^2+5x-7কে $x+3$ দ্বারা ভাগ করিলে x-নিরপেক্ষ ভাগশেষ কত হইবে ?

$x+3=x-(-3)$; অতএব ভাজ্যে xএর স্থলে -3 লিখিয়া
নির্ণেয় ভাগশেষ $=(-3)^3+8(-3)^2+5(-3)-7=-27+72-15-7=23.$

উদাহরণ 3. $3x^2+6x+5$কে $2x+1$ দ্বারা ভাগ করিলে x-নিরপেক্ষ ভাগশেষটি কত হইবে ?

$2x+1=2(x+\frac{1}{2})=2\{x-(-\frac{1}{2})\}$; অতএব ভাজ্যে xএর স্থলে $-\frac{1}{2}$ লিখিয়া
নির্ণেয় ভাগশেষ $=3(-\frac{1}{2})^2+6(-\frac{1}{2})+5=\frac{3}{4}-3+5=2\frac{3}{4}.$

প্রশ্ন। প্রকৃত ভাগ দ্বারা উপরিউক্ত ফলগুলির বিশুদ্ধতা পরীক্ষা কর।

প্রশ্নমালা 40

ভাগ না করিয়া x-নিরপেক্ষ ভাগশেষ নির্ণয় কর :
[1-8 প্রশ্নের উত্তর মুখে-মুখে বল] :

1. $x+5$কে $x-1$ দ্বারা ভাগে
2. $2x+7$কে $x-1$ দ্বারা ভাগে

3. $5x+3$কে $x-2$ দ্বারা ভাগে

4. $8x+9$কে $x-2$ দ্বারা ভাগে

5. x^2+2x+4কে $x-1$ দ্বারা ভাগে

6. x^3+1কে $x-2$ দ্বারা ভাগে

7. x^2+2x+3কে $x+1$ দ্বারা ভাগে

8. x^4+1কে $x+2$ দ্বারা ভাগে

9. x^2+5x+3কে $x-2$ দ্বারা ভাগে

10. $2x^2-3x+5$কে $x-3$ দ্বারা ভাগে

11. $4x^3+7x^2+5x+1$কে $x-7$ দ্বারা ভাগে

12. $2x^3-3x^2+2x-1$কে $x+4$ দ্বারা ভাগে

13. $3x^4-2x^3+12x-8$কে $x+5$ দ্বারা ভাগে

14. $6x^5-5x^2-8x+4$কে $x+3$ দ্বারা ভাগে

15. $8x^3+20x^2+14x+9$কে $2x-5$ দ্বারা ভাগে

16. $27x^3-54x^2+12x-8$কে $3x-7$ দ্বারা ভাগে

17. $81x^4-45x^2-6x+4$কে $3x+1$ দ্বারা ভাগে

18. $343x^4+98x^2-21x+9$কে $7x+2$ দ্বারা ভাগে

19. (i) ax^2+bx+cকে $x-p$ দ্বারা ভাগে ;

(ii) ax^3+bx^2+cx+dকে $x-p$ দ্বারা ভাগে

20. দেখাও যে, xএর মূলদ এবং অখণ্ড রাশিমালা $f(x)$কে $x-a$ দ্বারা ভাগ করিলে $f(a)$ ভাগশেষ থাকিবে।

প্রমাণ কর যে, $f(x)$কে $(x-a)(x-b)$ দ্বারা ভাগ করিলে

$$\frac{(x-b)f(a)-(x-a)f(b)}{a-b}$$

ভাগশেষ থাকিবে।

75. গুণনীয়ক-উপপাদ্য (Factor-Theorem)। যদি xএর কোন মূলদ এবং অখণ্ড রাশিমালাতে xএর স্থলে a বসাইলে রাশিমালাটির মান 0 (শূন্য) হয়, তাহা হইলে $(x-a)$ রাশিমালাটির একটি গুণনীয়ক হইবে ; অর্থাৎ রাশিমালাটি $x-a$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

অথবা, $f(a)=0$ হইলে $(x-a)$, $f(x)$এর একটি গুণনীয়ক।

প্রমাণ। যেহেতু রাশিমালাটির xএর স্থলে a বসাইলে উহার মান 0 (শূন্য) হয়, অতএব [ভাগশেষ-উপপাদ্য-অনুসারে] রাশিমালাটিকে $(x-a)$ দ্বারা ভাগ করিলে ভাগশেষ 0 (শূন্য) হইবে, অর্থাৎ কোন ভাগশেষ থাকিবে না। কাজেই রাশিমালাটি $(x-a)$ দ্বারা বিভাজ্য ; অর্থাৎ $(x-a)$ রাশিমালাটির একটি গুণনীয়ক।

অনুসিদ্ধান্ত 1. (1) যদি xএর স্থলে $-a$ লিখিলে রাশিমালাটির মান 0 (শূন্য) হয়, তাহা হইলে রাশিমালাটি $[x-(-a)]$, অর্থাৎ $x+a$ দ্বারা বিভাজ্য ; অর্থাৎ $(x+a)$ রাশিমালাটির একটি গুণনীয়ক।

অনুসিদ্ধান্ত 2. $f\left(-\frac{b}{a}\right)=0$ হইলে $ax+b$ $f(x)$এর একটি গুণনীয়ক হইবে।

$x-\left(-\frac{b}{a}\right)=x+\frac{b}{a}=\frac{1}{a}(ax+b)$; যেহেতু $f\left(-\frac{b}{a}\right)=0$, অতএব গুণনীয়ক-উপপাদ্য-অনুসারে $x-\left(-\frac{b}{a}\right)$বা $\frac{1}{a}(ax+b)$ $f(x)$এর একটি গুণনীয়ক। কাজেই $(ax+b)$ও $f(x)$এর একটি গুণনীয়ক।

এই উপপাদ্যের সাহায্যে সহজে কোন রাশিমালাকে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যায়।

অনুসিদ্ধান্ত 3. *f(x)*এর সহগগুলির বীজগণিতীয় সমষ্টি *0* (শূন্য) হইলে *(x−1)* *f(x)*এর একটি গুণনীয়ক।

কারণ 1এর যে-কোন ঘাত$=1$. অতএব $f(x)$এ $x=1$ লিখিলে ইহার প্রত্যেক পদ সহগের সমান হইবে।

অর্থাৎ $f(1)=f(x)$এর যাবতীয় সহগগুলির বীজগণিতীয় সমষ্টি। কাজেই এই সমষ্টি 0 (শূন্য) হইলেই $f(1)=0$;

$\therefore\ x-1$ $f(x)$এর একটি গুণনীয়ক।

অনুসিদ্ধান্ত 4. $f(x)$এ xএর অযুগ্ম-ঘাতের সহগ-সমষ্টি যুগ্ম-ঘাতের সহগ-সমষ্টির সমান হইলে $x+1$ $f(x)$এর একটি গুণনীয়ক।

ইহা পূর্ব্ববর্ত্তী অনুসিদ্ধান্তের অনুরূপ ভাবে সহজে প্রমাণ করা যায়।

উদাহরণ 1. দেখাও যে, $x-1$ x^2-3x+2এর গুণনীয়ক।

x^2-3x+2এর সহগ সমষ্টি$=1-3+2=0$.

$\therefore\ x-1$ x^2-3x+2এর গুণনীয়ক। [অনুসি. 3]

অথবা, $f(1)=1^2-3.1+2=1-3+2=0$.

$\therefore\ x-1$ $f(x)$এর গুণনীয়ক।

উদাহরণ 2. দেখাও যে, $x+1$ $f(x)\equiv 3x^5+x^2+2x+4$এর গুণনীয়ক।

প্রদত্ত রাশিমালায় xএর অযুগ্ম-ঘাতের সহগ-সমষ্টি $=3+2=5$

এবং যুগ্ম-ঘাতের „ „ $=1+4=5.$

এই সমষ্টিদ্বয় পরস্পর সমান, অতএব $x+1$ $f(x)$এর গুণনীয়ক। [অনুসি. 4]

অথবা $f(-1)=3(-1)^5+(-1)^2+2(-1)+4=-3+1-2+4=0.$

$\therefore$ $x-(-1)$ অর্থাৎ $x+1$ $f(x)$এর উৎপাদক।

উদাহরণ 3. দেখাও যে, $x+2$ x^3-3x+2এর একটি গুণনীয়ক।

$x+2=x-(-2)$; xএর স্থলে -2 লিখিলে

$$x^3-3x+2=(-2)^3-3(-2)+2=-8+6+2=0;$$

অতএব $x-(-2)$ বা $x+2$ প্রদত্ত রাশিমালার একটি গুণনীয়ক।

উদাহরণ 4. দেখাও যে, $2x+3$ $2x^2+11x+12$এর একটি গুণনীয়ক।

$2x+3=2(x+\frac{3}{2})=2\{x-(-\frac{3}{2})\}$; xএর স্থলে $-\frac{3}{2}$ লিখিলে

প্রদত্ত রাশিমালা $=2(-\frac{3}{2})^2+11(-\frac{3}{2})+12=\frac{9}{2}-\frac{33}{2}+12=0.$

অতএব রাশিমালাটি $x-(-\frac{3}{2})$ বা $\frac{2x+3}{2}$ দ্বারা বিভাজ্য ; অতএব উহা $2x+3$ দ্বারাও বিভাজ্য।

উদাহরণ 5. p কত হইলে $x^5-61x+p$ $x+1$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে ?

$x+1=x-(-1)$; অতএব যদি প্রদত্ত রাশিমালায় xএর স্থলে -1 লিখিলে রাশিমালাটির মান 0 (শূন্য) হয়, তাহা হইলে রাশিমালাটি $x+1$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে। কিন্তু $x=-1$ লিখিলে $x^5-61x+p=(-1)^5-61(-1)+p$

$$=-1+61+p=60+p.$$

$\therefore$ $60+p=0$; অর্থাৎ $p=-60.$

উদাহরণ 6. x^2+px+q এবং $x^2+p'x+q'$, এই রাশিমালাদ্বয়ের একটি সাধারণ গুণনীয়ক থাকিলে দেখাও যে,

$$(q-q')^2=(p'q-pq')(p-p').$$

মনে কর, $(x-a)$ই সাধারণ গুণনীয়ক।

যেহেতু $(x-a)$ x^2+px+qএর গুণনীয়ক ; $\therefore$ $a^2+pa+q=0$ ···(1)

এবং যেহেতু $x-a$ $x^2+p'x+q'$এর গুণনীয়ক ; $\therefore$ $a^2+p'a+q'=0$···(2)

(1) এবং (2) হইতে বিয়োগ দ্বারা

$(p-p')a+(q-q')=0$; অথবা $(p-p')a=-(q-q')$;

$$\therefore \quad a=-\frac{q-q'}{p-p'}. \quad \cdots \quad (3)$$

আবার (2)কে p দ্বারা এবং (1)কে p' দ্বারা গুণ করিয়া বিয়োগ করিলে

$(p-p')a^2+pq'-p'q=0$; $\therefore \quad (p-p')a^2=p'q-pq'$;

$$\therefore \quad a^2=\frac{p'q-pq'}{p-p'}. \quad \cdots \quad (4)$$

এখন (4)এ aর স্থলে উহার পূর্ব্বপ্রাপ্ত মান $-\frac{q-q'}{p-p}$, বসাইলে

$$\left(-\frac{q-q'}{p-p'}\right)^2=\frac{p'q-pq'}{p-p'} \text{ ; অর্থাৎ } \frac{(q-q')^2}{(p-p')^2}=\frac{(p'q-pq')}{p-p'}$$

উভয় পক্ষকে $(p-p')^2$ দ্বারা গুণ করিলে

$$\frac{(q-q')^2}{(p-p')^2}\times(p-p')^2=\frac{p'q-pq'}{p-p'}\times(p-p')^2$$

অর্থাৎ $(q-q')^2=(p'q-pq')(p-p')$.

উদাহরণ 7. (i) $x^3-6x^2+11x-6$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর ; এবং (ii) $x^3-6x^2+11x-6=0$ সমীকরণটির বীজ নির্ণয় কর।

xএর স্থলে বিভিন্ন মান বসাইয়া পরীক্ষা করিয়া দেখ, প্রদত্ত রাশিমালাটির মান 0 (শূন্য) হয় কিনা ; মান 0 (শূন্য) হইলে রাশিমালাটির একটি গুণনীয়ক পাওয়া যাইবে। উহা বাহির করিয়া লইলে বাকি অংশ নিম্নতর মানের একটি রাশিমালা হইবে এবং এই অংশের গুণনীয়ক উল্লিখিত গুণনীয়ক-উপপাদ্যটি আবার-প্রয়োগ করিয়া অথবা অন্য প্রকারে সহজে নির্ণয় করিতে পারা যাইবে।

(i) xএর স্থলে 1 বসাইলে

$$x^3-6x^2+11x-6=1-6+11-6=0.$$

অতএব $x-1$, প্রদত্ত রাশিমালাটির একটি-গুণনীয়ক। ইহা বাহির করিয়া লইলে

$$\begin{aligned} x^3-6x^2+11x-6 &= (x-1)(x^2-5x+6) \\ &= (x-1)(x-2)(x-3). \end{aligned}$$

(ii) $x^3-6x^2+11x-6=0$;

বামপক্ষকে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করিলে

$$(x-1)(x-2)(x-3)=0 ;$$

গুণনীয়কগুলির গুণফলের মান 0 (শূন্য) বলিয়া উহাদের কোন একটি অবশ্য 0 হইবে ; কারণ যদি উহাদিগের একটিও শূন্য না হয় তবে উহাদের গুণফলের মান 0 (শূন্য) হইতে পারে না।

অতএব হয় $(x-1)=0$, অথবা $(x-2)=0$, অথবা $(x-3)=0$;

$\therefore \quad x=1, 2$ অথবা 3.

প্রশ্নমালা 41

ভাগ না করিয়া দেখাও যে :

1. x^2-5x+4, $x-1$ দ্বারা বিভাজ্য
2. x^2+7x+6, $x+1$ দ্বারা বিভাজ্য
3. $3x^2-8x+5$, $x-1$ দ্বারা বিভাজ্য
4. $5x^2+8x+3$, $x+1$ দ্বারা বিভাজ্য
5. $9x^2+13x+4$, $x+1$ দ্বারা বিভাজ্য

ভাগ না করিয়া দেখাও যে :

6. x^2-5x+6, $x-3$ দ্বারা বিভাজ্য
7. $2x^3-3x^2+5x-4$, $x-1$ দ্বারা বিভাজ্য
8. $3x^3+4x^2+2x-44$, $x-2$ দ্বারা বিভাজ্য
9. $2x^2+11x+15$, $x+3$ দ্বারা বিভাজ্য
10. $8y^2-26y+15$, $2y-5$ দ্বারা বিভাজ্য
11. $8y^3-12y^2-26y+15$, $2y+3$ দ্বারা বিভাজ্য
12. $625x^4-16$, $5x-2$ দ্বারা বিভাজ্য [পা. প্র., 1921]
13. d কত হইলে $2x^3+3x^2+4x+d$, $x-4$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে ?
14. m কত হইলে $3x^4-mx^3+12x^2-2$, $x+2$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে ?
15. $x-2$, $120x^3-167x^2-ax+56$ রাশিমালাটির একটি গুণনীয়ক হইলে a এর মান নির্ণয় কর। [ঢা. প্র., 1925]
16. m কত হইলে $3mx^4-8m^2x^3+(5m^4+7)x-7$, $x-m$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে ?
17. কোন্ সর্ত্ত পূর্ণ হইলে $x^3+(p+q)x+a$, $x+p+q$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে ? [পা. প্র., 1895]

18. $x+a$, x^2+px+q এবং $x^2+p'x+q'$এর সাধারণ গুণনীয়ক হইলে দেখাও যে, $a=\dfrac{q-q'}{p-p'}$.

19. ax^2+bx+c এবং bx^2+cx+a-এর গ. সা. গু. $x-p$ হইলে দেখাও যে, $a^3+b^3+c^3=3abc$.

20. x^3+bx+c এবং x^3+cx+bএর একটি সাধারণ গুণনীয়ক আছে ; b এবং cএর মধ্যে সম্বন্ধ নির্ণয় কর। [পা. প্র., 1891]

21. x^3+px^2+q এবং x^2+qx+pএর $x-a$ আকারের একটি সাধারণ গুণনীয়ক আছে। ইহার সর্ত্ত নির্ণয় কর।

22. x^3+px^2+qx+r এবং x^2+qx+rএর একটি $x-a$ আকারের সাধারণ গুণনীয়ক থাকিলে দেখাও যে, $(p-1)^2-q(p-1)+r=0$.

23. x^3-2x^2-x+2কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর ;
এবং $x^3-2x^2-x+2=0$এর বীজ নির্ণয় কর।

24. x^3+2x^2-5x-6কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর ;
এবং $x^3+2x^2-5x-6=0$এর বীজ নির্ণয় কর।

25. $2x^3-3x^2-23x+12$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর ;
এবং $2x^3-3x^2-23x+12=0$এর বীজ নির্ণয় কর।

26. $x^4-4x^3-x^2+16x-12$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর ;
এবং $x^4-4x^3-x^2+16x-12=0$এর বীজ নির্ণয় কর।

76. বিভাজ্যতা বিষয়ক বিবিধ উপপাদ্য।

উপপাদ্য 1. n যে-কোন অখণ্ড ধনরাশি হইলে x^n-y^n $x-y$ দ্বারা বিভাজ্য।

প্রমাণ। x^n-y^n xএর একটি মূলদ অখণ্ড রাশিমালা এবং ইহাতে xএর স্থলে y বসাইলে $x^n-y^n=y^n-y^n=0$ হয়। অতএব গুণনীয়ক-উপপাদ্য-অনুসারে x^n-y^n $(x-y)$ দ্বারা বিভাজ্য।

প্রকৃত ভাগ দ্বারা দেখা যাইবে যে,

$$\frac{x^n-y^n}{x-y}=x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\dots\dots+xy^{n-2}+y^{n-1}.$$

যথা, x^2-y^2, x^3-y^3, x^4-y^4, x^5-y^5, ইহারা প্রত্যেকে $x-y$ দ্বারা বিভাজ্য।

উপপাদ্য 2. n যে-কোন যুগ্ম ধনসংখ্যা হইলে $x^n - y^n$ $x+y$ দ্বারা বিভাজ্য ; কিন্তু n অযুগ্ম হইলে বিভাজ্য হইবে না।

প্রমাণ। $x+y=x-(-y)$;
xএর স্থলে $-y$ লিখিলে $x^n-y^n=(-y)^n-(y)^n$;
যেহেতু x যুগ্ম ধনসংখ্যা হইলে $(-y)^n-y^n=y^n-y^n=0$;
এবং x অযুগ্ম-ধনসংখ্যা হইলে $(-y)^n-y^n=-y^n-y^n=-2y^n$, অর্থাৎ 0 নহে ;

অতএব n যুগ্ম-ধনসংখ্যা হইলে x^n-y^n $x-(-y)$ বা $x+y$ দ্বারা বিভাজ্য। কিন্তু n অযুগ্ম-ধনসংখ্যা হইলে x^n-y^n $x+y$ দ্বারা বিভাজ্য নহে।

প্রকৃত ভাগ দ্বারা দেখা যাইবে যে, n যুগ্ম-ধনসংখ্যা হইলে

$$\frac{x^n-y^n}{x+y}=x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\cdots+xy^{n-2}-y^{n-1}.$$

যথা, x^2-y^2, x^4-y^4, x^6-y^6, ইহারা প্রত্যেকে $x+y$ দ্বারা বিভাজ্য। কিন্তু x^3-y^3, x^5-y^5, ইহারা $x+y$ দ্বারা বিভাজ্য নহে।

উপপাদ্য 3. যদি n অযুগ্ম ধনসংখ্যা হয়, তবে x^n+y^n $x+y$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে, কিন্তু n যুগ্ম হইলে ঐরূপ হইবে না।

প্রমাণ। $x+y=x-(-y)$;
xএর স্থলে $-y$ লিখিলে $x^n+y^n=(-y)^n+y^n$;
যেহেতু n অযুগ্ম হইলে $(-y)^n+y^n=-y^n+y^n=0$;
কিন্তু n যুগ্ম হইলে $(-y)^n+y^n=y^n+y^n=2y^n$, অর্থাৎ 0 নহে,
অতএব n অযুগ্ম হইলে x^n+y^n $x+y$ দ্বারা বিভাজ্য ;
কিন্তু n যুগ্ম হইলে x^n+y^n $x+y$ দ্বারা বিভাজ্য নহে।
প্রকৃত ভাগ দ্বারা দেখা যাইবে যে, n অযুগ্ম হইলে

$$\frac{x^n+y^n}{x+y}=x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\cdots-xy^{n-2}+y^{n-1}.$$

যথা, x^3+y^3, x^5+y^5, x^7+y^7, ইহারা প্রত্যেকে $x+y$ দ্বারা বিভাজ্য ; কিন্তু x^2+y^2, x^4+y^4, x^6+y^6 ইহাদের কোনটিই $x+y$ দ্বারা বিভাজ্য নহে।

উপপাদ্য 4. n যুগ্ম বা অযুগ্ম যাহাই হউক না কেন, x^n+y^n $x-y$ দ্বারা কখনও বিভাজ্য নহে।

প্রমাণ। xএর স্থলে y লিখিলে $x^n+y^n=y^n+y^n=2y^n$, অর্থাৎ '0' নহে। অতএব x^n+y^n $x-y$ দ্বারা বিভাজ্য নহে।

যথা, x^2+y^2, x^3+y^3, x^4+y^4, x^5+y^5, ইহাদের কোনটিই $x-y$ দ্বারা বিভাজ্য নহে।

উদাহরণ 1. প্রমাণ কর যে, n অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে $15^{2n}-5^{3n}$ 100 দ্বারা বিভাজ্য; অতএব ইহার ডানদিকের দুইটি অঙ্ক 0 (শূন্য) হইবে।

$$15^{2n}-5^{3n}=(15^2)^n-(5^3)^n=225^n-125^n.$$

$\therefore$ উপপাদ্য 1 অনুসারে প্রদত্ত রাশি $(225-125)$ বা 100 দ্বারা বিভাজ্য। অতএব রাশিটির ডানদিকের অঙ্ক দুইটি 0 (শূন্য)।

উদাহরণ 2. দেখাও যে, n অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে $\frac{9^n}{3}+\frac{4^n}{2}$-এর ডানদিকের অঙ্কটি 5 হইবে।

$$\frac{9^n}{3}+\frac{4^n}{2}=\frac{(3^2)^n}{3}+\frac{(2^2)^n}{2}=\frac{3^{2n}}{3}+\frac{2^{2n}}{2}=3^{2n-1}+2^{2n-1};$$

$\therefore$ ইহা $(3+2)$ বা 5 দ্বারা বিভাজ্য। [উপপাদ্য 3]

অতএব প্রদত্ত রাশিটির ডানদিকের অঙ্ক হয় 5, না হয় 0 হইবে; কিন্তু অযুগ্ম-সংখ্যার যে-কোন ঘাত অযুগ্মরাশি এবং যুগ্মরাশির যে-কোন ঘাত যুগ্মরাশি বলিয়া 3^{2n-1} অযুগ্ম এবং 2^{2n-1} যুগ্ম; কাজেই ইহাদের সমষ্টি অযুগ্ম হইবে। তাহা হইলে প্রদত্ত রাশির শেষ অঙ্ক 0 হইতে পারে না; অতএব উহা 5ই হইবে।

উদাহরণ 3. দেখাও যে, n অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে $a^n(b-c)+b^n(c-a)+c^n(a-b)$ রাশিমালাটি $(b-c)(c-a)(a-b)$ দ্বারা বিভাজ্য।

প্রদত্ত রাশিমালাটি bএর একটি মূলদ এবং অখণ্ড রাশিমালা; ইহাতে bএর স্থলে c বসাইলে

$$a^n(b-c)+b^n(c-a)+c^n(a-b)=a^n(c-c)+c^n(c-a)+c^n(a-c)$$
$$=a^n\times 0+c^{n+1}-c^na+c^na-c^{n+1}=0.$$

অতএব $a^n(b-c)+b^n(c-a)+c^n(a-b)$ $b-c$ দ্বারা বিভাজ্য। এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, উহা $c-a$ এবং $a-b$ দ্বারাও বিভাজ্য। অতএব প্রদত্ত রাশিটি $(b-c)$, $(c-a)$ এবং $(a-b)$এর গুণফল অর্থাৎ $(b-c)(c-a)(a-b)$ দ্বারাও বিভাজ্য।

উদাহরণ 4. দেখাও যে, n অখণ্ড ধনরাশি হইলে

$(ac)^n-(ad)^n+(bd)^n-(bc)^n$ $ac-ad+bd-bc$ দ্বারা বিভাজ্য।

$$ac-ad+bd-bc=(ac-ad)+(bd-bc)$$
$$=a(c-d)-b(c-d)=(a-b)(c-d).$$

এখন $(ac)^n-(ad)^n+(bd)^n-(bc)^n$, এই রাশিমালাটি aর একটি মূলদ এবং অখণ্ড রাশিমালা এবং ইহাতে aএর স্থানে b লিখিলে

$$(ac)^n-(ad)^n+(bd)^n-(bc)^n=(bc)^n-(bd)^n+(bd)^n-(bc)^n=0.$$

অতএব রাশিমালাটি $a-b$ দ্বারা বিভাজ্য। এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, উহা $(c-d)$ দ্বারাও বিভাজ্য। অতএব রাশিমালাটি $(a-b)$ এবং $(c-d)$এর গুণফল অর্থাৎ $(ac-ad+bd-bc)$ দ্বারাও বিভাজ্য।

77. গুণনীয়ক-নির্ণয়ে এবং অভেদ-প্রমাণে গুণনীয়ক-উপপাদ্যের প্রয়োগ।

পূর্ব্বেই প্রদর্শিত হইয়াছে যে, গুণনীয়ক-উপপাদ্যের দ্বারা কোন রাশিমালাকে সহজে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যায় এবং তৃতীয় এবং উচ্চতর মানের সমীকরণের সমাধান করা যায়। [178 পৃষ্ঠার উদাহরণ 7 দেখ।]

অনেক স্থলে ইহার দ্বারা অভেদও সহজে প্রমাণিত হয়।

উদাহরণ 1. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

প্রদত্ত রাশিমালাটি a, b, c এর একটি মূলদ অখণ্ড রাশিমালা; ইহাতে bএর স্থলে c বসাইলে

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=a^2(c-c)+c^2(c-a)+c^2(a-c)$$
$$=a^2.0+c^3-c^2a+c^2a-c^3=0.$$

অতএব $b-c$ প্রদত্ত রাশিমালার একটি গুণনীয়ক। এইরূপ $(c-a)$ এবং $(a-b)$ও ইহার গুণনীয়ক, কিন্তু রাশিমালাটি তিনমাত্রা-বিশিষ্ট এবং সমমাত্র; অতএব ইহার একমাত্রা-বিশিষ্ট এই তিনটি গুণনীয়কই থাকিতে পারে এবং এইগুলি ব্যতীত কোন সংখ্যাত্মক গুণনীয়কও থাকিতে পারে।

মনে কর, $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=k(b-c)(c-a)(a-b)\cdots(1)$

[এস্থলে k কোন সংখ্যা সূচিত করিতেছে]

যেহেতু (1) একটি অভেদ এবং kএ a, b এবং c-যুক্ত কোন পদ নাই; কাজেই a, b, cএর স্থলে যে-কোন মান বসাইলে উভয় পক্ষের সমতা অক্ষুণ্ণ থাকিবে এবং kএরও কোন পরিবর্ত্তন হইবে না।

এখন (1)এ $a=0,\ b=1$ এবং $c=2$ বসাইলে
$0.(1-2)+1^2(2-0)+2^2(0-1)=k(1-2)(2-0)(0-1)$;
অথবা $\qquad 0+2-2^2=k(-1)(2)(-1)$.
অথবা $-2=2k$; $\qquad \therefore\ k=-1$.
অতএব (1) হইতে $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b).$$

উদাহরণ 2. দেখাও যে, $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$
$$=5(y+z)(z+x)(x+y)(x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy).$$

$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$ একটি x, y এবং zএর মূলদ এবং অখণ্ড রাশিমালা ; ইহাতে yর স্থলে $-z$ লিখিলে
$$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5=(x-z+z)^5-x^5-(-z)^5-z^5$$
$$=x^5-x^5+z^5-z^5=0.$$

অতএব $y-(-z)$ অর্থাৎ $y+z$ বামপক্ষের একটি গুণনীয়ক। এইরূপ $(z+x)$ এবং $(x+y)$ও বামপক্ষের গুণনীয়ক। এখন বামপক্ষ একটি পঞ্চম মানের সমমাত্র রাশি ; অতএব $y+z$, $z+x$ এবং $x+y$ ছাড়া ইহার দ্বিতীয় মানবিশিষ্ট একটি সমমাত্র গুণনীয়কও থাকিবে। আবার, যেহেতু বামপক্ষে x, y এবং z চক্র-ক্রমে সাজান আছে, অতএব ইহাতে x, y, zএর স্থলে যথাক্রমে y, z, x, কিংবা y, z, xএর স্থলে z, x, y লিখিলে বামপক্ষের, কাজেই দক্ষিণপক্ষেরও কোন পরিবর্তন হইবে না ; অতএব p এবং q সংখ্যাত্মক রাশি হইলে বাকী গুণনীয়কটির আকার
$$p(x^2+y^2+z^2)+q(yz+zx+xy),\ \text{এইরূপ হইবে।}$$

মনে কর, $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$
$$=(y+z)(z+x)(x+y)\{p(x^2+y^2+z^2)+q(yz+zx+xy)\}. \quad \dots (1)$$

(1) একটি অভেদ এবং p ও q সংখ্যাত্মক বলিয়া উহাদের মধ্যে x, y, z-যুক্ত পদ নাই। অতএব (1)এ x, y, zএর স্থলে যে-কোন মান বসাইলে উভয় পক্ষের সমতা অক্ষুণ্ণ থাকিবে, p এবং qএরও পরিবর্তন হইবে না।

এখন (1)এ $x=0,\ y=1,\ z=1$ ধরিলে
$(0+1+1)^5-0-1-1$
$=(1+1)(1+0)(0+1)\{p(0+1+1)+q(1+0+0)\}$;
অথবা $30=2(2p+q)$ $\qquad \therefore\ 2p+q=15. \qquad \dots (2)$

আবার (1)এর মধ্যে $x=0,\ y=1,\ z=2$ বসাইলে

$$(0+1+2)^5-0-1-2^5$$
$$=(1+2)(2+0)(0+1)\{p(0+1+4)+q(2+0+0)\}$$

অথবা $210=6(5p+2q)$; $\therefore\ 5p+2q=35.$ ... (3)

(2) এবং (3) সহ-সমীকরণ দুইটি সমাধান করিলে দেখা যাইবে যে,

$$p=5,\quad q=5.$$

অতএব (1) হইতে $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$

$$=(y+z)(z+x)(x+y)\{5(x^2+y^2+z^2)+5(yz+zx+xy)\}.$$
$$=5(y+z)(z+x)(x+y)(x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy).$$

প্রশ্নমালা 42

n একটি অখণ্ড ধন-সংখ্যা হইলে দেখাও যে,

1. 10^n-3^n 7 দ্বারা বিভাজ্য।
2. $17^{2n+1}+3^{2n+1}$ 20 দ্বারা বিভাজ্য।
3. $7^{2n}-1$ 48 দ্বারা বিভাজ্য।
4. $13.169^n+2.4^n$এর ডানদিকের অঙ্ক 5।
5. $\dfrac{991^{2n}}{991}+\dfrac{81^n}{9}$এর ডানদিকের তিনটি অঙ্ক 0 (শূন্য) হইবে।
6. $(x+2y)^{2n-1}+x^{2n-1}$ $(x+y)$ দ্বারা বিভাজ্য।
7. $a^{2n}(b-c)+b^{2n}(c-a)+c^{2n}(a-b)$ $(b-c)(c-a)(a-b)$ দ্বারা বিভাজ্য।
8. $a^{2n+1}(b-c)+b^{2n+1}(c-a)+c^{2n+1}(a-b)$ $(b-c)(c-a)(a-b)$ দ্বারা বিভাজ্য।

m এবং n অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে দেখাও যে,

9. $x^{m+n}+a^{m+n}-x^m a^n-x^n a^m$ $(x-a)^2$ দ্বারা বিভাজ্য।
10. $x^{m+n}+a^m b^n-x^m b^n-x^n a^m$ $x^2-(a+b)x+ab$ দ্বারা বিভাজ্য।
11. $a^m(b^n-c^n)+b^m(c^n-a^n)+c^m(a^n-b^n)$ $(b-c)(c-a)(a-b)$ দ্বারা বিভাজ্য।
12. $\dfrac{x^n+y^n}{x-y}=x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1}+\dfrac{2y^n}{x-y}$

13. $\frac{x^{2n+1}-y^{2n+1}}{x+y}=x^{2n}-x^{2n-1}y+\cdots-xy^{2n-1}+y^{2n}-\frac{2y^{2n+1}}{x+y}$

14. $5^n=4(5^{n-1}+5^{n-2}+\cdots\cdots+1)+1$

$$\left[\text{সঙ্কেত : } \frac{5^n-1^n}{5-1}=5^{n-1}+5^{n-2}+\cdots+1\right]$$

নিম্নলিখিত রাশিগুলিকে গুণনীয়ক-উপপাদ্যের সাহায্যে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর :

15. $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

16. $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$

17. $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$

18. $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$

গুণনীয়ক-উপপাদ্য দ্বারা দেখাও যে,

19. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(b+c)(c+a)(a+b)$

20. $(a+b+c)(bc+ca+ab)-(b+c)(c+a)(a+b)=abc$

21. $(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3=24abc.$

22. $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3=3(b-c)(c-a)(a-b).$

দশম অধ্যায়

অনুপাত ও সমানুপাত

(Ratio and Proportion)

অনুপাত (Ratio)

78. একটি রাশি সমজাতীয় অপর একটি রাশির কত গুণ বা কত অংশ, ইহা য সংখ্যা দ্বারা প্রকাশ পায়, তাহাকে রাশিদ্বয়ের **অনুপাত** (Ratio) বলে।

অতএব দুইটি রাশির অনুপাত নির্ণয় করিতে হইলে প্রথম রাশিকে দ্বিতীয় রাশি রা ভাগ করিতে হয়। যথা—

4 টাকা এবং 5 টাকার অনুপাত $=4$ টাকা $\div 5$ টাকা $=\frac{4}{5}$. এইরূপ দুইটি সমজাতীয় শি a এবং b একই এককে প্রকাশিত থাকিলে a এবং bএর অনুপাত $=\frac{a}{b}$.

a এবং bএর অনুপাত '$a : b$'রূপে লিখিত হয়* এবং 'a অনুপাত b'রূপে পঠিত হয়।

স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, অনুপাত শুদ্ধসংখ্যা (abstract number) হইবে; কারণ একটি রাশি সমজাতীয় অপর একটি রাশির কতগুণ, অনুপাত দ্বারা ইহাই সূচিত হয়। যেমন 5 টাকা : 10 টাকা, 5 মণ : 10 মণ, 5 গজ : 10 গজ, ইহারা প্রত্যেকেই $\frac{5}{10}$ অর্থাৎ শুদ্ধরাশি।

অনুপাতের রাশি-দুইটিকে অনুপাতের **পদ** (terms) কহে; ইহাদের মধ্যে প্রথম রাশিকে অনুপাতের **পূর্ব্বরাশি** (antecedent) এবং দ্বিতীয় রাশিটিকে অনুপাতের **উত্তররাশি** (consequent) বলা হয়।

যথা, a $a : b$এর পূর্ব্বরাশি এবং b ইহার উত্তররাশি।

79. কোন অনুপাতের পূর্ব্বরাশি উত্তররাশি অপেক্ষা বৃহত্তর বা উত্তররাশির সমান বা উত্তররাশি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে ঐ অনুপাতকে যথাক্রমে **গুরু অনুপাত** (ratio of greater inequality), **সাম্যানুপাত** (ratio of equality) এবং **লঘু অনুপাত** (ratio of less inequality) বলা হয়।

যথা, 4 : 3, একটি গুরু অনুপাত;

5 : 5, একটি সাম্যানুপাত;

এবং 5 : 6, একটি লঘু অনুপাত।

অনুপাতের সংজ্ঞা হইতে স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, গুরু অনুপাত 1 হইতে বৃহত্তর; সাম্যানুপাত $=1$; লঘু অনুপাত 1 হইতে ক্ষুদ্রতর।

80. যদি কোন অনুপাতের পূর্ব্ব এবং উত্তররাশি যথাক্রমে অপর এক অনুপাতের উত্তর এবং পূর্ব্বরাশির সমান হয়, তাহা হইলে অনুপাত দুইটির প্রত্যেকটিকে অপরটির **ব্যস্ত অনুপাত** (inverse ratio) বলে। যেমন 3 : 4 এবং 4 : 3 ইহারা পরস্পর ব্যস্ত অনুপাত।

81. একাধিক অনুপাতের পূর্ব্বরাশিগুলির গুণফলকে পূর্ব্বরাশি এবং উত্তর-রাশিগুলির গুণফলকে উত্তররাশি ধরিলে যে অনুপাত পাওয়া যায়, উহাকে প্রথমোক্ত অনুপাতগুলির **সম্মিলিত অনুপাত** (compound ratio) বলে।

---

*ভাগচিহ্ন '÷' হইতে বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্ত্তী রেখাটি বাদ দিলেই অনুপাতের চিহ্ন (:) পাওয়া যায়। প্রকৃতপক্ষে $a : b = a \div b = \frac{a}{b}$; অনুপাত, ভাগফল এবং ভগ্নাংশ মূলতঃ একই।

যথা, $2:3$ এবং $5:7$এর সম্মিলিত অনুপাত
$=2\times 5:3\times 7$ বা $10:21$.
$a:b, c:d$ ও $e:f$এর সম্মিলিত অনুপাত
$=a\times c\times e:b\times d\times f$ বা $ace:bdf$.
$a:b$ এবং $a:b$এর সম্মিলিত অনুপাত$=a\times a:b\times b$ বা $a^2:b^2$;
$a^2:b^2$কে $\frac{a}{b}$ এর **দ্বিগুণানুপাত** (duplicate ratio) বলে।
$a:b, a:b$ এবং $a:b$এর সম্মিলিত অনুপাত$=a^3:b^3$;
$a^3:b^3$কে $a:b$এর **ত্রিগুণানুপাত** (triplicate ratio) বলে।
$\sqrt{a}:\sqrt{b}$কে $a:b$এর **দ্বিভাজিত অনুপাত** (Sub-duplicate ratio) বলে।
$\sqrt[3]{a}:\sqrt[3]{b}$কে $a:b$এর **ত্রিভাজিত অনুপাত** (Sub-triplicate ratio) বলে।

82. প্রমাণ করা যায় যে, (i) $a:b=ma:mb$;
এবং (ii) $a:b=a\div m:b\div m$.

অর্থাৎ কোন অনুপাতের পদগুলিকে একই রাশি দ্বারা গুণ বা একই রাশির দ্বারা ভাগ করিলে ঐ অনুপাতের মানের পরিবর্তন হয় না।

প্রমাণ। সংজ্ঞানুসারে $a:b=\frac{a}{b}$ এবং $ma:mb=\frac{ma}{mb}$.

কিন্তু $\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}$, $\therefore a:b=ma:mb$.

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, $a:b=a\div m:b\div m$.

83. দুই বা ততোধিক অনুপাতের তুলনা করিতে হইলে উহাদিগের তুল্যমান ভগ্নাংশগুলিকে প্রথম খণ্ডের 134 অণুচ্ছেদোক্ত নিয়মে লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট করিয়া উহাদিগের মানের তুলনা করিতে হয়।

উদাহরণ। $2:3, 3:4$ এবং $4:5$এর মানের তুলনা কর।

সংজ্ঞানুসারে $2:3=\frac{2}{3}$; $3:4=\frac{3}{4}$ এবং $4:5=\frac{4}{5}$; এখন $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$কে (134 অণুচ্ছেদোক্ত নিয়মে) লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট করিলে দেখা যাইবে যে উহারা যথাক্রমে $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$; অতএব ভগ্নাংশগুলির মধ্যে $\frac{4}{5}$ বৃহত্তম এবং $\frac{2}{3}$ ক্ষুদ্রতম।
$\therefore$ $4:5$ বৃহত্তম এবং $2:3$ ক্ষুদ্রতম।

84. পূর্ব্বরাশি এবং উত্তররাশি এই উভয়ের সহিত কোন ধনরাশি যোগ করিলে গুরু অনুপাত কমে, কিন্তু লঘু অনুপাত বাড়ে।

মনে কর, $a : b$ অর্থাৎ $\frac{a}{b}$ একটি অনুপাত এবং x যে-কোন একটি ধনরাশি। a এবং b, উভয়ের সহিত x যোগ করিলে অনুপাতটি $a+x : b+x$ বা $\frac{a+x}{b+x}$ হইবে।

$$\frac{a}{b}-\frac{a+x}{b+x}=\frac{a(b+x)-b(a+x)}{b(b+x)}=\frac{(ax-bx)}{b(b+x)}=\frac{x(a-b)}{b(b+x)}.$$

অতএব $\frac{a}{b} >$ অথবা $< \frac{a+x}{b+x}$ হইবে, অর্থাৎ $\frac{a}{b}$ কমিবে অথবা বাড়িবে,

যদি $\frac{x(a-b)}{b(b+x)}$ ধনরাশি অথবা ঋণরাশি হয় ;

অর্থাৎ যদি $a-b$ ধনরাশি অথবা ঋণরাশি হয় ;

অর্থাৎ যদি $a>$অথবা $<b$ হয় ;

অর্থাৎ যদি $a : b$ গুরু অনুপাত অথবা লঘু অনুপাত হয়।

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, **পূর্ব্বরাশি এবং উত্তররাশি এই উভয় হইতে একই ধনরাশি বিয়োগ করিলে গুরু অনুপাত বাড়ে এবং লঘু অনুপাত কমে।**

মন্তব্য। এইস্থলে অনুপাতের পদগুলি ধনরাশি হওয়া আবশ্যক।

উদাহরণ 1. $a+x : b+x$ $a : b$এর দ্বিগুণানুপাতের (Duplicate ratioএর) সমান হইলে xএর মান নির্ণয় কর। [পা.প্র., 1896]

$a+x : b+x=a^2 : b^2$;

অতএব $\frac{a+x}{b+x}=\frac{a^2}{b^2}$ $\therefore$ $b^2(a+x)=a^2(b+x)$;

পক্ষান্তর করিয়া $(b^2-a^2)x=a^2b-ab^2=ab(a-b)$;

$$\therefore \quad x=\frac{ab(a-b)}{b^2-a^2}=\frac{-ab}{a+b}.$$

উদাহরণ 2. দুইটি সংখ্যার অনুপাত $2 : 3$ এবং উহাদের বৃহত্তরটি ক্ষুদ্রতরটি অপেক্ষা 16 অধিক। সংখ্যাদ্বয় নির্ণয় কর।

স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, অনুপাতের পূর্ব্বরাশি উত্তররাশি হইতে ক্ষুদ্রতর ;

মনে কর, ক্ষুদ্রতর সংখ্যা $=x$;

অতএব বৃহত্তর সংখ্যা $= x+16$;

প্রশ্নানুসারে $\frac{x}{x+16}=\frac{2}{3}$;

$\therefore \quad 3x=2(x+16)=2x+32$;

পক্ষান্তর করিয়া $x=32$.

অতএব ক্ষুদ্রতর সংখ্যা $=32$ এবং বৃহত্তর সংখ্যা $=32+16=48$.

উদাহরণ 3. $x:y=2:3$ হইলে $\frac{2x^2+3xy+y^2}{x^2+2xy-3y^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

$$\frac{2x^2+3xy+y^2}{x^2+2xy-3y^2}=\frac{2\left(\frac{x}{y}\right)^2+3\frac{x}{y}+1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+2\frac{x}{y}-3}$$ [লব এবং হর উভয়কে y^2 দ্বারা ভাগ করিয়া]

$$=\frac{2(\frac{2}{3})^2+3.\frac{2}{3}+1}{(\frac{2}{3})^2+2.\frac{2}{3}-3},$$ [যেহেতু $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$]

$$=\frac{\frac{8}{9}+2+1}{\frac{4}{9}+\frac{4}{3}-3}=-\frac{\frac{35}{9}}{\frac{11}{9}}=-\frac{35}{11}=-3\tfrac{2}{11}.$$

উদাহরণ 4. $5x+3y=2x+7y$ হইলে $x:y$ অনুপাতটি নির্ণয় কর।

$5x+3y=2x+7y$;

পক্ষান্তর করিয়া $3x=4y$;

উভয় পক্ষকে $3y$ দ্বারা ভাগ করিয়া $\frac{x}{y}=\frac{4}{3}$;

অতএব $x:y=4:3$.

উদাহরণ 5. $x:y=2:3$; $y:z=5:4$ হইলে $x:z=$ কত ?

$\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$ এবং $\frac{y}{z}=\frac{5}{4}$,

গুণ দ্বারা $\frac{x}{y}\times\frac{y}{z}=\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}$;

অর্থাৎ $\frac{x}{z}=\frac{5}{6}$, $\therefore \quad x:z=5:6$.

উদাহরণ 6. দেখাও যে, $2xy : x^2+y^2$ গুরু অনুপাত হইতে পারে না।

[বো. প্র., 1924]

উত্তররাশি − পূর্ব্বরাশি $=(x^2+y^2)-2xy=(x-y)^2$.

স্পষ্টতঃ পূর্ব্ব-রাশি উত্তর-রাশি হইতে বৃহত্তর হইলে $(x-y)^2$ ঋণরাশি হইবে ; কিন্তু বর্গরাশি বলিয়া $(x-y)^2$ কখনও ঋণরাশি হইতে পারে না। অতএব পূর্ব্বরাশি উত্তররাশি হইতে কখনও বৃহত্তর হইতে পারে না ; অর্থাৎ প্রদত্ত অনুপাত কখনও গুরু অনুপাত হইতে পারে না।

প্রশ্নমালা 43

নিম্নলিখিত অনুপাতগুলির মানের তুলনা কর :

1. $1:2$; $3:5$; $9:12$ 2. $7:9$; $3:4$; $5:3$

3. $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$; $\frac{1}{8}:\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}:\frac{1}{5}$ 4. $x+y:2x+y$; $2x+y:3x+y$

নিম্নলিখিত অনুপাতগুলির সম্মিলিত অনুপাত নির্ণয় কর :

5. $2:3$; $3:4$; $4:2$ 6. $3a:2b$; $4b:9c$; $18c:6a$

7. $bc:a^2$; $ca:b^2$; $ab:c^2$

8. Aএর আয় 1500 টাকা এবং Bএর আয় 2000 টাকা ; প্রত্যেকের আয় x টাকা বৃদ্ধি পাইলে দেখাও যে, A এবং Bএর আয়ের অনুপাত পূর্ব্বাপেক্ষা বাড়িবে ; কিন্তু প্রত্যেকের আয় x টাকা কমিলে আয়ের অনুপাত পূর্ব্বাপেক্ষা কমিবে।

[সঙ্কেত : 84 অনুচ্ছেদ দেখ।]

9. $a-x:b-x$ $\frac{a}{b}$এর দ্বিগুণানুপাতের সমান হইলে xএর মান কত ?

10. $a+x:b+x$ $\frac{a}{b}$ এর ত্রিগুণানুপাতের সমান হইলে xএর মান কত ?

11. দুইটি সংখ্যার অনুপাত $=2:3$; ক্ষুদ্রতরটি 12 হইলে বৃহত্তরটি কত ?

12. দুইটি সংখ্যার অনুপাত $=7:12$; বৃহত্তরটি 60 হইলে ক্ষুদ্রতরটি কত ?

13. দুইটি সংখ্যার অনুপাত $3:4$; সংখ্যাদ্বয়ের সমষ্টি 28 হইলে রাশিদ্বয় নির্ণয় কর।

14. দুইটি সংখ্যার ব্যস্ত অনুপাত $3:2$; উহাদিগের অন্তর 20 হইলে সংখ্যাদ্বয় নির্ণয় কর।

15. $2x+3y=8$, $4x+y=6$ হইলে $x:y$ কত হইবে ?

16. $3x-2y=7$, $2x+7y=13$ হইলে $3x+4y:4x-3y$ কত হইবে ?

17. $x:y=4:5$ হইলে $\frac{3x+2y}{5x-2y}$এর মান নির্ণয় কর।

18. $4x+3y=3x+5y$ হইলে $x:y$ কত হইবে ?

19. $2x+7y : 5x-3y=3 : 2$ হইলে $x : y$এর মান নির্ণয় কর।

20. $2x : 3y=5 : 6$ হইলে $\frac{3x^2+y^2}{2x^2+3y^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

21. $x : y=5 : 6$ এবং $y : z=3 : 2$ হইলে $x : z$ কত হইবে?

22. $y : z=2 : 3$ এবং $z : x=3 : 4$ হইলে $x : y$ কত হইবে? এবং $x=20$ হইলে yএর মান নির্ণয় কর।

23. দেখাও যে, $a^2+b^2 : 2ab$ কখনও লঘু অনুপাত হইতে পারে না।

24. যদি $a : b$ একটি গুরু অনুপাত হয়, দেখাও যে, $a^2+b^2 : 2ab$ হইতে $a : b$ বৃহত্তর।

25. যদি $a : b$ লঘু অনুপাত হয় এবং a, b এবং x ধনরাশি হয়, তবে দেখাও যে, $a+x : b+x$ অনুপাতটি $a : b$ হইতে বৃহত্তর। [বো. প্র. 1914]

26. a, b, c এবং d ধনরাশি হইলে এবং $a : b > c : d$ হইলে দেখাও যে, $ad > bc$.

সমানুপাত (Proportion)

85. দুইটি অনুপাতের সমতাকে **সমানুপাত (Proportion)** বলে।

$2 : 4=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$; এবং $6 : 12=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$;

অতএব $2 : 4=6 : 12$; ইহা একটি সমানুপাত।

সমানুপাতটিকে নিম্নলিখিতরূপে লিখিতে হয় :

$$2 : 4 : : 6 : 12.$$

এবং ইহাকে '2 অনুপাত 4 সমান 6 অনুপাত 12' এইরূপে পড়িতে হয়।

যদি চারিটি রাশির প্রথম ও দ্বিতীয়টির অনুপাত তৃতীয় এবং চতুর্থটির অনুপাতের সমান হয়, তাহা হইলে এই রাশি চারিটিকে **সমানুপাতী** (Proportional) বলা হয়। যথা, 2, 4, 6, 12 ইহারা সমানুপাতী।

86. চারিটি রাশি সমানুপাতী হইলে উহাদের প্রথম ও চতুর্থটিকে **অন্ত্যরাশি** (Extremes) এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয়টিকে **মধ্যরাশি** (Means) বলা হয়; চতুর্থ রাশিটিকে প্রথম, দ্বিতীয় এবং তৃতীয় রাশির **চতুর্থ সমানুপাতী** (Fourth proportional) বলে।

যথা, $a : b : : c : d$ হইলে a ও d এই দুইটি অন্ত্যরাশি এবং b ও c এই দুইটি মধ্যরাশি ; আর d হইবে a, b এবং cএর চতুর্থ সমানুপাতী।

দ্রষ্টব্য। সমানুপাতের চারিটি রাশি সমজাতীয় হওয়া আবশ্যক নহে, কিন্তু প্রথম দুইটি রাশি সমজাতীয় এবং শেষ দুইটি রাশিও সমজাতীয় হওয়া চাই।

87. যদি সমজাতীয় তিন বা তদধিক রাশি এইরূপ হয় যে, প্রথম রাশি : দ্বিতীয় রাশি, দ্বিতীয় রাশি : তৃতীয় রাশি, তৃতীয় রাশি : চতুর্থ রাশি প্রভৃতি অনুপাতগুলি পরস্পর সমান হয়, তাহা হইলে ঐ রাশিগুলিকে **ক্রমিক সমানুপাতী (in continued proportion)** বলা হয়। যথা,

$a:b=b:c=c:d$ হইলে a, b, c এবং d ক্রমিক সমানুপাতী হইবে।

তিনটি রাশি a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হইলে অর্থাৎ $a:b=b:c$ হইলে bকে a ও cএর **মধ্যসমানুপাতী (mean proportional)** এবং cকে a ও bএর **তৃতীয় সমানুপাতী (third proportional)** বলা হয়।

88. উপপাদ্য। $\boldsymbol{a:b::c:d}$ **হইলে** $\boldsymbol{ad=bc}$ **হইবে।**

অর্থাৎ **চারিটি রাশি সমানুপাতী হইলে**

অন্ত্যরাশিদ্বয়ের গুণফল = মধ্যরাশিদ্বয়ের গুণফল।

প্রমাণ। যেহেতু $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; অতএব উভয়পক্ষকে bd দ্বারা গুণ করিলে

$$ad=bc.$$

বিপরীতক্রমে যদি $ad=bc$ হয়, তাহা হইলে $a:b::c:d.$

কারণ $ad=bc$এর উভয় পক্ষকে bd দ্বারা ভাগ করিলে $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$

অর্থাৎ $a:b=c:d.$

সমানুপাতের চারিটি রাশির মধ্যে যে-কোন তিনটি জানা থাকিলে এই সিদ্ধান্তের সাহায্যে চতুর্থটি নির্ণয় করা যায়।

অনুসিদ্ধান্ত। $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ **এবং** $\boldsymbol{c}$ **ক্রমিক সমানুপাতী হইলে** $\boldsymbol{ac=b^2}$ **হইবে।**

কারণ $a:b::b:c$; $\therefore\ a\times c=b\times b$ বা b^2

অতএব **তিনটি রাশি ক্রমিক সমানুপাতী হইলে অন্ত্যরাশিদ্বয়ের গুণফল মধ্যরাশির বর্গের সমান।**

উদাহরণ 1. 2, 6 এবং 8 এর চতুর্থ সমানুপাতী কত ?

মনে কর, চতুর্থ সমানুপাতী $=x$; তাহা হইলে $2, 6, 8, x$ ইহারা সমানুপাতী ; অতএব $2\times x=6\times 8$; অর্থাৎ $x=\frac{6\times 8}{2}=24.$

উদাহরণ 2. 3 এবং 75এর মধ্যসমানুপাতী নির্ণয় কর।

মনে কর, মধ্যরাশি $= x$.

$\therefore\ x^2 = 3 \times 75 = 225. \qquad \therefore\ x = \sqrt{225} = 15.$

উদাহরণ 3. 4 এবং 10এর তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় কর।

মনে কর, তৃতীয় সমানুপাতী $= x$;

$\therefore\ 4x = 10^2$; অতএব $x = \dfrac{10^2}{4} = \dfrac{100}{4} = 25.$

উদাহরণ 4. 1, 2, 3 ও 5 ইহাদের প্রত্যেকের সহিত কোন্ সংখ্যা যোগ করিলে উহারা সমানুপাতী হইবে ?

মনে কর, নির্ণেয় সংখ্যা $= x$,

$\therefore\ 1+x,\ 2+x,\ 3+x$ ও $5+x$, ইহারা সমানুপাতী।

অতএব $(1+x)(5+x) = (2+x)(3+x)$;

অতএব $5 + 6x + x^2 = 6 + 5x + x^2$,

অথবা $5 + 6x = 6 + 5x$;

পক্ষান্তর করিয়া $x = 1.$

উদাহরণ 5. 45 মণ জলমিশ্রিত দুধে দুধ ও জলের অনুপাত $4 : 1$; উহাতে কত মণ দুধ আছে ?

মনে কর, নির্ণেয় দুধের পরিমাণ $= x$ মণ ;

তাহা হইলে জলের পরিমাণ $= (45 - x)$ মণ।

অতএব $x : (45 - x) :: 4 : 1$;

$\therefore\ x \times 1 = (45 - x) \times 4$; অর্থাৎ $x = 180 - 4x$;

পক্ষান্তর করিয়া $5x = 180$; $\therefore\ x = \frac{180}{5} = 36.$

অতএব দুধের পরিমাণ $= 36$ মণ।

প্রশ্নমালা 44

নিম্নলিখিত স্থলে চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় কর :

1. 2, 4, 6 **2.** 5, 7, 35 **3.** $2a, 3b, 7c$ **4.** bc, ca, ab

5. $\dfrac{b+c}{c+a}, \dfrac{c+a}{a+b}, \dfrac{a+b}{b+c}.$

নিম্নলিখিত স্থলে মধ্যসমানুপাতী নির্ণয় কর :

6. 2, 8 **7.** 3, 12 **8.** a^3b, ab^3 **9.** $\frac{a^3}{bc}, \frac{b^3}{ca}$.

নিম্নলিখিত স্থলে তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় কর :

10. 5, 10 **11.** 4, 6 **12.** a^2b^2c, abc

13. 3, 5, 7 এবং 10 ইহাদের প্রত্যেকের সহিত কত যোগ করিলে চারিটি যোগফল সমানুপাতী হইবে? [ক. প্র., 1893]

14. 2, 4, 8 এবং 14 ইহাদের প্রত্যেকের সহিত কোন্ সংখ্যা যোগ করিলে চারিটি যোগফল সমানুপাতী হইবে? [পা. প্র., 1921]

15. 3, 5, 8 ইহাদের প্রত্যেকের সহিত কত যোগ করিলে যোগফলগুলি ক্রমিক সমানুপাতী হইবে?

16. a, b, c ইহাদের প্রত্যেকটি হইতে কত বিয়োগ করিলে বিয়োগফলগুলি ক্রমিক সমানুপাতী হইবে?

17. 35 মণ দুধের সহিত কত জল মিশাইলে দুধ ও জলের অনুপাত 7 : 2 হইবে?

18. 30 মণ জল-মিশ্রিত দুধে দুধ ও জলের অনুপাত 3 : 2; উহাতে কত দুধ আছে?

19. 64 গ্যালন জল-মিশ্রিত দুধে জল ও দুধের অনুপাত 5 : 3; উহাতে আর কত দুধ মিশাইলে জল ও দুধের অনুপাত 8 : 7 হইবে?

20. দেখাও যে, দুইটি ধনসংখ্যার সমষ্টি উহাদের মধ্যরাশির দ্বিগুণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইতে পারে না।

21. $a : b : : c : d$ হইলে দেখাও যে,

$$(a^2+c^2)(b^2+d^2)=(ab+cd)^2.$$

89. **$a : b : : c : d$ হইলে $b : a : : d : c$ হইবে।**

অর্থাৎ চারিটি রাশি সমানুপাতী হইলে উহাদিগকে **ব্যস্তভাবে** (**inversely**) লইলেও উহারা সমানুপাতী হইবে।

প্রমাণ। $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; $\therefore$ $1 \div \frac{a}{b}=1 \div \frac{c}{d}$;

অর্থাৎ $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$; $\therefore$ $b : a : : d : c$.

এই প্রক্রিয়াকে **ব্যস্ত-প্রক্রিয়া** (**Invertendo**) বলে।

90. $a:b::c:d$ হইলে $a:c::b:d$ হইবে।

অর্থাৎ একজাতীয় চারিটি রাশি সমানুপাতী হইলে উহাদিগকে **একান্তরভাবে** (**alternately**) লইলেও উহারা সমানুপাতী হইবে।

এই প্রক্রিয়াটিকে **একান্তর-প্রক্রিয়া** (**alternando**) বলে।

প্রমাণ। যেহেতু $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; উভয় পক্ষকে $\frac{b}{c}$ দ্বারা গুণ করিলে

$$\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{c}{d}\times\frac{b}{c};$$

অর্থাৎ $$\frac{a}{c}=\frac{b}{d};\quad \therefore\ a:c::b:d.$$

91. $a:b::c:d$ হইলে $a+b:b::c+d:d$ হইবে।

অর্থাৎ চারিটি রাশি সমানুপাতী হইলে প্রথম ও দ্বিতীয়ের সমষ্টি এবং দ্বিতীয়ের অনুপাত তৃতীয় ও চতুর্থের সমষ্টি এবং চতুর্থের অনুপাতের সমান।

এই প্রক্রিয়াকে **যোগ-প্রক্রিয়া** (**componendo**) বলে।

প্রমাণ। যেহেতু $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; $\therefore\ \frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$; অর্থাৎ $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$;

$$\therefore\ a+b:b::c+d:d.$$

92. $a:b::c:d$ হইলে $a-b:b::c-d:d$ হইবে।

অর্থাৎ চারিটি রাশি সমানুপাতী হইলে প্রথম ও দ্বিতীয়ের বিয়োগফল এবং দ্বিতীয়ের অনুপাত তৃতীয় ও চতুর্থের বিয়োগফল এবং চতুর্থের অনুপাতের সমান।

এই প্রক্রিয়াকে **ভাগ-প্রক্রিয়া** (**dividendo**) বলে।

প্রমাণ। যেহেতু $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; $\therefore\ \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$;

অর্থাৎ $$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d};\ \therefore\ a-b:b::c-d:d.$$

93. $a:b::c:d$ হইলে $a+b:a-b::c+d:c-d$ হইবে।

অর্থাৎ চারিটি রাশি সমানুপাতী হইলে প্রথম ও দ্বিতীয়ের যোগফল এবং বিয়োগফলের অনুপাত তৃতীয় ও চতুর্থের যোগফল এবং বিয়োগফলের অনুপাতের সমান।

এই প্রক্রিয়াকে **যোগ এবং ভাগ-প্রক্রিয়া** (**componendo and dividendo**) বলে।

প্রমাণ। 91 অণুচ্ছেদ হইতে $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$;

এবং 92 অণুচ্ছেদ হইতে $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$;

ভাগ দ্বারা $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$; অতএব $a+b : a-b :: c+d : c-d$.

94. $a : b :: c : d$ হইলে $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$.

অর্থাৎ দুইটি ভগ্নাংশ সমান হইলে

উহাদের প্রত্যেকটি = $\frac{\text{লবের যোগফল}}{\text{হরের যোগফল}}=\frac{\text{লবের বিয়োগফল}}{\text{হরের বিয়োগফল}}$।

প্রমাণ। $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ (ধর); অতএব $a=bk$; $c=dk$.

$\therefore \quad \frac{a+c}{b+d}=\frac{bk+dk}{b+d}=\frac{(b+d)k}{b+d}=k$;

এইরূপে $\frac{a-c}{b-d}=\frac{bk-dk}{b-d}=\frac{(b-d)k}{b-d}=k$.

অতএব $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$, [$\because$ প্রত্যেকটি $=k$].

উদাহরণ 1. $a : b :: c : d$ হইলে দেখাও যে, $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{c^2+d^2}{c^2-d^2}$.

যেহেতু $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; অতএব $\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}$;

অতএব যোগ এবং ভাগ-প্রক্রিয়া দ্বারা $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{c^2+d^2}{c^2-d^2}$.

[অন্য প্রকার প্রমাণ]

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ (ধর); $\therefore$ $a=bk$ এবং $c=dk$.

$\therefore \quad \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{b^2k^2+b^2}{b^2k^2-b^2}=\frac{(k^2+1)b^2}{(k^2-1)b^2}=\frac{k^2+1}{k^2-1}$;

এইরূপে $\frac{c^2+d^2}{c^2-d^2}=\frac{k^2+1}{k^2-1}$; অতএব $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{c^2+d^2}{c^2-d^2}$.

উদাহরণ 2. $a : b :: c : d$ হইলে দেখাও যে, $\frac{ma+nb}{mc+nd}=\frac{ma-nb}{mc-nd}$.

[বো. প্র., 1897]

যেহেতু $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; $\therefore \frac{a}{b}\times\frac{m}{n}=\frac{c}{d}\times\frac{m}{n}$; অর্থাৎ $\frac{ma}{nb}=\frac{mc}{nd}$.

$\therefore \frac{ma+nb}{ma-nb}=\frac{mc+nd}{mc-nd}$ [যোগ এবং ভাগ-প্রক্রিয়া]

$\therefore \frac{ma+nb}{mc+nd}=\frac{ma-nb}{mc-nd}$. [একান্তর-প্রক্রিয়া]

[অন্য প্রকার প্রমাণ]

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ (ধর); $\therefore$ $a=bk$, $c=dk$.

অতএব $\frac{ma+nb}{mc+nd}=\frac{(mk+n)b}{(mk+n)d}=\frac{b}{d}$,

এইরূপ $\frac{ma-nb}{mc-nd}=\frac{b}{d}$. অতএব $\frac{ma+nb}{mc+nd}=\frac{ma-nb}{mc-nd}$.

উদাহরণ 3. $a+2b+c+2d : a+2b-c-2d$

$:: a-2b+c-2d : a-2b-c+2d$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$a : b :: c : d.$

যেহেতু $\frac{a+2b+c+2d}{a+2b-c-2d}=\frac{a-2b+c-2d}{a-2b-c+2d}$.

যোগ এবং ভাগ-প্রক্রিয়া দ্বারা $\frac{2(a+2b)}{2(c+2d)}=\frac{2(a-2b)}{2(c-2d)}$;

অথবা $\frac{a+2b}{c+2d}=\frac{a-2b}{c-2d}$;

একান্তর-প্রক্রিয়া দ্বারা $\frac{a+2b}{a-2b}=\frac{c+2d}{c-2d}$;

$\therefore$ যোগ এবং ভাগ-প্রক্রিয়া দ্বারা $\frac{2a}{4b}=\frac{2c}{4d}$;

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ অর্থাৎ $a : b :: c : d$.

উদাহরণ 4. $x=\frac{4ab}{a+b}$ হইলে $\frac{x+2a}{x-2a}+\frac{x+2b}{x-2b}$ এর মান নির্ণয় কর।

[পা. প্র., 1922]

যেহেতু $x=\frac{4ab}{a+b}$ অতএব $\frac{x}{2a}=\frac{2b}{a+b}$, [$2a$ দ্বারা ভাগ করিয়া]

যোগ এবং ভাগ-প্রক্রিয়া দ্বারা $\frac{x+2a}{x-2a}=\frac{a+3b}{b-a}$.

$x=\frac{4ab}{a+b}$কে দ্বারা ভাগ করিয়া এইরূপে $\frac{x+2b}{x-2b}=\frac{3a+b}{a-b}$,

যোগ দ্বারা $\frac{x+2a}{x-2a}+\frac{x+2b}{x-2b}=\frac{a+3b}{b-a}+\frac{3a+b}{a-b}=\frac{a+3b-3a-b}{b-a}$

$$=\frac{2(b-a)}{b-a}=2.$$

উদাহরণ 5. সমাধান কর : $\frac{\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x}}{\sqrt{2x+5}-\sqrt{2x}}=5.$

যেহেতু $\frac{\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x}}{\sqrt{2x+5}-\sqrt{2x}}=\frac{5}{1}$;

যোগ এবং ভাগ-প্রক্রিয়া দ্বারা $\frac{2\sqrt{2x+5}}{2\sqrt{2x}}=\frac{6}{4}$;

সরল করিয়া $\frac{\sqrt{2x+5}}{\sqrt{2x}}=\frac{3}{2}$;

উভয় পক্ষের বর্গ লইয়া $\frac{2x+5}{2x}=\frac{9}{4}$;

$$\therefore\ 4(2x+5)=9.2x=18x\ ;$$

পক্ষান্তর করিয়া $-10x=-20$; $\therefore\ x=2$.

[বিশুদ্ধি-পরীক্ষা : প্রদত্ত সমীকরণে $x=2$ ধরিলে

বামপক্ষ $=\frac{\sqrt{9}+\sqrt{4}}{\sqrt{9}-\sqrt{4}}=\frac{3+2}{3-2}=5=$ ডানপক্ষ ।]

উদাহরণ 6. সমাধান কর : $\left(\frac{x-5}{x-4}\right)^2=\frac{(x-3)(x-7)}{(x-2)(x-6)}$.

সমীকরণের উভয় পক্ষকে সরল করিয়া

$\frac{x^2-10x+25}{x^2-8x+16}=\frac{x^2-10x+21}{x^2-8x+12}$

$=\frac{\text{লবের বিয়োগফল}}{\text{হরের বিয়োগফল}}=\frac{4}{4}=1.$ [94 অনু.]

$\therefore \quad x^2-10x+25=x^2-8x+16$

পক্ষান্তর এবং সরল করিয়া $-2x=-9$; $\therefore \quad x=4\frac{1}{2}$.

প্রশ্নমালা 45

$a:b::c:d$ হইলে (197 পৃষ্ঠার উদাহরণ 1এর উভয় প্রণালীতে) দেখাও যে,

1. $\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}=\frac{c^3+d^3}{c^3-d^3}$ 2. $\frac{a^n+b^n}{a^n-b^n}=\frac{c^n+d^n}{c^n-d^n}$ 3. $\frac{a^n+c^n}{a^n-c^n}=\frac{b^n+d^n}{b^n-d^n}$

4. $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{ac+bd}{ac-bd}$ 5. $\frac{a^n+b^n}{a^n-b^n}=\frac{a^mc^{n-m}+b^md^{n-m}}{a^mc^{n-m}-b^md^{n-m}}$

$a:b::c:d$ হইলে (197 পৃষ্ঠার উদাহরণ 1এর শেষোক্ত প্রণালীতে) দেখাও যে,

6. $\frac{ab}{cd}=\frac{a^2+b^2}{c^3+d^2}$ 7. $a^2d-bc^2=ac(b-d)$ [ক. প্র., 1890]

8. $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}=\frac{c^2+cd+d^2}{c^2-cd+d^2}$ 9. $(a^2+c^2)(b^2+d^2)=(ab+cd)^2$

10. $\frac{pa^2+qc^2}{pb^2+qd^2}=\frac{ma^2-nc^2}{mb^2-nd^2}$ 11. $\frac{pa^n+qc^n}{pb^n+qd^n}=\frac{ma^n-nc^n}{mb^n-nd^n}$

12. $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{d}\right)-\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{(a-b)(a-c)}{abc}$ [ঢা. প্র., 1925]

13. $\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{c^2+d^2}{c+d}=\frac{(a+c)^2+(b+d)^2}{(a+c)+(b+d)}$

14–17 প্রশ্নে দেখাও যে, $a:b::c:d$,

14. $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ হইলে 15. $\frac{ma+nb}{ma-nb}=\frac{mc+nd}{mc-nd}$ হইলে

16. $\frac{a+b+c+d}{a+b-c-d}=\frac{a-b+c-d}{a-b-c+d}$ হইলে

17. $\frac{ma+nb+mc+nd}{ma+nb-mc-nd}=\frac{ma-nb+mc-nd}{ma-nb-mc+nd}$ হইলে।

18. $x=\frac{2ab}{a+b}$ হইলে $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}$ এর মান নির্ণয় কর।

19. $x=\frac{2nab}{a+b}$ হইলে $\frac{x+na}{x-na}+\frac{x+nb}{x-nb}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান কর :

20. $\dfrac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x}}=3$ 21. $\dfrac{\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}}=5$

22. $\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{3x+2}-\sqrt[3]{x-1}}=3$ 23. $\dfrac{\sqrt[3]{ax+b}+\sqrt[3]{cx+d}}{\sqrt[3]{ax+b}-\sqrt[3]{cx+d}}=\dfrac{\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n}}$.

(199 পৃষ্ঠার উদাহরণ 6এর প্রণালীতে) সমাধান কর :

24. $\dfrac{x}{a}=\dfrac{x-c}{d}$ 25. $\dfrac{x-a}{b}=\dfrac{x-c}{d}$

26. $\dfrac{x^2+12x+5}{x^2+11x+7}=\dfrac{x^2+12x+4}{x^2+11x+6}$ 27. $\dfrac{2x^2-5x-9}{2x^2-5x-11}=\dfrac{2x^2-3x-4}{2x^2-3x-6}$

28. $\left(\dfrac{x-3}{x-4}\right)^2=\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-3)(x-5)}$ 29. $\left(\dfrac{x-6}{x-7}\right)^2=\dfrac{(x-4)(x-8)}{(x-5)(x-9)}$

30. $\left(\dfrac{x-9}{x-7}\right)^3=\dfrac{x-11}{x-5}$.

[সঙ্কেত : সমীকরণটিকে '$\left(\dfrac{x-9}{x-7}\right)^2=\dfrac{(x-11)(x-7)}{(x-5)(x-9)}$' আকারে লিখা যায়।

31. $\left(\dfrac{x-6}{x-4}\right)^3=\dfrac{x-8}{x-2}$.

95. দুই বা তদধিক অনুপাত পরস্পর সমান দেওয়া থাকিলে উহাদের প্রত্যেকটিকে kএর সমান ধরিয়া সমানুপাত-ঘটিত প্রশ্নের সমাধান করা যায়। পূর্ব্বে 93 অণুচ্ছেদে এই নিয়ম প্রয়োগ করা হইয়াছে। নিম্নে কয়েকটি উদাহরণ প্রদত্ত হইল।

উদাহরণ 1. $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ হইলে দেখাও যে,

$$\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}.$$ [ক. প্র., 1900]

$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=k$ (ধর) ; $\therefore\ x=ak\,;\ y=bk\,;\ z=ck.$

$$\therefore\ \frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}=\frac{a^3k^3}{a^2}+\frac{b^3k^3}{b^2}+\frac{c^3k^3}{c^2}$$
$$=ak^3+bk^3+ck^3=(a+b+c)k^3$$
$$=\frac{(a+b+c)^3k^3}{(a+b+c)^2}=\frac{(ak+bk+ck)^3}{(a+b+c)^2}$$
$$=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}.$$

উদাহরণ 2. $\dfrac{x}{b-c}=\dfrac{y}{c-a}=\dfrac{z}{a-b}$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$$ax+by+cz=0.$$

$$\frac{x}{b-c}=\frac{y}{c-a}=\frac{z}{a-b}=k \text{ (মনে কর) ;}$$

$\therefore\ x=k(b-c)$; $y=k(c-a)$; $z=k(a-b)$.

$\therefore\ ax+by+cz=k\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}=k\times 0=0.$

উদাহরণ 3. $\dfrac{y+z-x}{b+c-a}=\dfrac{z+x-y}{c+a-b}=\dfrac{x+y-z}{a+b-c}$ হইলে দেখাও যে,

$$x:a=y:b=z:c.$$

$$\frac{y+z-x}{b+c-a}=\frac{z+x-y}{c+a-b}=\frac{x+y-z}{a+b-c}=k \text{ (মনে কর) ;}$$

$$\therefore\ y+z-x=k(b+c-a) \quad \cdots \quad \text{(i)}$$
$$z+x-y=k(c+a-b) \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$
$$x+y-z=k(a+b-c). \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

এখন (i), (ii) এবং (iii) হইতে x, y, zএর মান নির্ণয় করিলেই উত্তর পাওয়া যাইবে।

(ii) এবং (iii) হইতে যোগ দ্বারা $2x=2ka$; $\therefore\ \dfrac{x}{a}=k$;

এইরূপে (iii) এবং (i) হইতে $\dfrac{y}{b}=k$; আর (i) এবং (ii) হইতে $\dfrac{z}{c}=k$.

অতএব $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$; অর্থাৎ $x:a=y:b=z:c$.

উদাহরণ 4. a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হইলে দেখাও যে, a^2+b^2, $ab+bc$, b^2+c^2ও ক্রমিক সমানুপাতী হইবে।

ক্রমিক সমানুপাতের সংজ্ঞা-অনুসারে প্রশ্নটি এইরূপ দাঁড়ায়ঃ

যদি $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}$ হয়, দেখাও যে, $\dfrac{a^2+b^2}{ab+bc}=\dfrac{ab+bc}{b^2+c^2}$.

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=k \text{ (ধর) ;}$$

$$\therefore\ b=ck \text{ ;}$$
$$a=bk=ck\times k=ck^2 \text{ ;}$$

অতএব $\frac{a^2+b^2}{ab+bc}=\frac{c^2k^4+c^2k^2}{c^2k^3+c^2k}=\frac{c^2k^2(k^2+1)}{c^2k(k^2+1)}=k$; ... (i)

আবার $\frac{ab+bc}{b^2+c^2}=\frac{c^2k^3+c^2k}{c^2k^2+c^2}=\frac{c^2k(k^2+1)}{c^2(k^2+1)}=k.$ ... (ii)

$\therefore$ (i) এবং (ii) হইতে $\frac{a^2+b^2}{ab+bc}=\frac{ab+bc}{b^2+c^2}$.

উদাহরণ 5. a, b, c এবং d ক্রমিক সমানুপাতী হইলে দেখাও যে,

$$\sqrt{(a+b+c)(b+c+d)}=\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{cd}.$$

ক্রমিক সমানুপাতের সংজ্ঞানুসারে $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=k$ (মনে কর);

$\therefore\ c=dk$; $b=ck=dk.k=dk^2$; $a=bk=dk^2.k=dk^3$.

অতএব $\sqrt{(a+b+c)(b+c+d)}$

$$=\sqrt{(dk^3+dk^2+dk)(dk^2+dk+d)}$$
$$=\sqrt{dk(k^2+k+1)d(k^2+k+1)}$$
$$=d(k^2+k+1)\sqrt{k}. \quad \cdots \text{(i)}$$

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{cd}=\sqrt{dk^3.dk^2}+\sqrt{dk^2.dk}+\sqrt{dk.d}$$
$$=dk^2\sqrt{k}+dk\sqrt{k}+d\sqrt{k} \quad \cdots \text{(ii)}$$
$$=d(k^2+k+1)\sqrt{k}.$$

$\therefore$ (i) এবং (ii) হইতে $\sqrt{(a+b+c)(b+c+d)}=\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{cd}$.

প্রশ্নমালা 46

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ হইলে প্রশ্ন 1-6এ দেখাও যে,

1. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}$

2. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a-c}{b-d}=\frac{c-e}{d-f}=\frac{a-e}{b-f}$

3. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{2a-3c+5e}{2b-3d+5f}$

4. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\left(\frac{a^3+c^3+e^3}{b^3+d^3+f^3}\right)^{\frac{1}{3}}$

5. $\dfrac{a^2+c^2+e^2}{b^2+d^2+f^2}=\dfrac{ce}{df}$ [ক. প্র., 1876]

6. $\left(\dfrac{a+2c+3e}{b+2d+3f}\right)^2=\dfrac{ac+ce}{bd+df}$ [বো. প্র., 1881]

7. $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ হইলে দেখাও যে,

(i) $\left(\dfrac{x}{a}\right)^3+\left(\dfrac{y}{b}\right)^3+\left(\dfrac{z}{c}\right)^3=3\left(\dfrac{x+y+z}{a+b+c}\right)^3$

(ii) $\dfrac{x^3+y^3+z^3}{a^3+b^3+c^3}=\dfrac{xyz}{abc}$;

এবং (iii) $\left(\dfrac{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2}{a^3x+b^3y+c^3z}\right)^{\frac{3}{2}}=\sqrt{\dfrac{xyz}{abc}}$

8. $\dfrac{x}{b-c}=\dfrac{y}{c-a}=\dfrac{z}{a-b}$ হইলে দেখাও যে,

(i) $x+y+z=0$

এবং (ii) $(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=0$

9. $\dfrac{a}{y^2+yz+z^2}=\dfrac{b}{z^2+zx+x^2}=\dfrac{c}{x^2+xy+y^2}$ হইলে দেখাও যে,

$$a(y-z)+b(z-x)+c(x-y)=0$$

10. $\dfrac{x}{b+c}=\dfrac{y}{c+a}=\dfrac{z}{a+b}$ হইলে দেখাও যে,

$$\frac{a}{y+z-x}=\frac{b}{z+x-y}=\frac{c}{x+y-z}$$ [ক. প্র., 1903]

11. $\dfrac{y+z}{b+c}=\dfrac{z+x}{c+a}=\dfrac{x+y}{a+b}$ হইলে দেখাও যে, $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$

12. $\dfrac{y+z-x}{a}=\dfrac{z+x-y}{b}=\dfrac{x+y-z}{c}$ হইলে দেখাও যে,

(i) $\dfrac{x}{b+c}=\dfrac{y}{c+a}=\dfrac{z}{a+b}$ এবং (ii) $\dfrac{a+b+c}{x+y+z}=\dfrac{ay+bz+cx}{x^2+y^2+z^2}$

13. $\dfrac{y+z-mx}{a}=\dfrac{z+x-my}{b}=\dfrac{x+y-mz}{c}$ হইলে দেখাও যে,

$$\frac{x}{b+c-(1-m)a}=\frac{y}{c+a-(1-m)b}=\frac{z}{a+b-(1-m)c}$$

14. $\frac{x+y}{3a-b}=\frac{y+z}{3b-c}=\frac{z+x}{3c-a}$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2}$$ [বো. প্র., 1904]

15. $\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}$ হইলে দেখাও যে,

$$(a+b+c)(yz+zx+xy)=(x+y+z)(ax+by+cz)$$ [ক. প্র., 1910]

16. $ab=cd=ef$ হইলে দেখাও যে,

$$\frac{ac+ce+ea}{bdf(b+d+f)}=\frac{a^2+c^2+e^2}{d^2f^2+f^2b^2+b^2d^2}$$

[সঙ্কেত : $ab=cd=ef=k$ (ধর) ; $\therefore\ a=\frac{k}{b},\ c=\frac{k}{d},\ e=\frac{k}{f}$ ইত্যাদি ।]

17. $ap=bq=cr$ হইলে দেখাও যে,

$$\frac{p^2}{qr}+\frac{q^2}{rp}+\frac{r^2}{pq}=\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}$$ [পাট. প্র., 1926]

18. $(a+b+c)x=(b+c-a)y=(c+a-b)z=(a+b-c)w$ হইলে

দেখাও যে, $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}=\frac{1}{x}$ [ক. প্র., 1905]

a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হইলে প্রশ্ন 19-22এ দেখাও যে,

19. $\frac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}=\frac{a}{c}$ [এ. প্র., 1895]

20. $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)(a-b+c)$

21. $\frac{abc(a+b+c)^3}{(bc+ca+ab)^3}=1$

22. $a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=a^3+b^3+c^3$

a, b, c, d ক্রমিক সমানুপাতী হইলে প্রশ্ন 23-26এ দেখাও যে,

23. $(b+c)(b+d)=(c+a)(c+d).$ [ক. প্র., 1924]

24. $(a+b)(c+d)=(b+c)^2$ [বো. প্র., 1924]

25. $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$

26. $(d-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=(d-a)^2$

27. a, b, c, d, e ক্রমিক সমানুপাতী হইলে দেখাও যে,

$$(ab+bc+cd+de)^2 =(a^2+b^2+c^2+d^2)(b^2+c^2+d^2+e^2).$$

96. উপপাদ্য। $n, p, q, r,\cdots$ যে-কোন সংখ্যাই হউক না কেন, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots$ হইলে প্রমাণ করা যায় যে, ভগ্নাংশগুলির প্রত্যেকটি

$$\left\{\frac{pa^n+qc^n+re^n+\cdots}{pb^n+qd^n+rf^n+\cdots}\right\}^{\frac{1}{n}}$$ এর সমান।

প্রমাণ। $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots=k$ (মনে কর) ;

$\therefore\ a=bk\ ;\ c=dk\ ;\ e=fk\cdots$

$\therefore\ pa^n=p(bk)^n=pb^nk^n$;

$qc^n=q(dk)^n=qd^nk^n$;

$re^n=r(fk)^n=rf^nk^n$; ইত্যাদি।

যোগ দ্বারা $pa^n+qc^n+re^n+\cdots=(pb^n+qd^n+rf^n+\cdots)k^n$.

$$\therefore \left(\frac{pa^n+qc^n+re^n+\cdots}{pb^n+qd^n+rf^n+\cdots}\right)^{\frac{1}{n}}=(k^n)^{\frac{1}{n}}=k=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots$$

অতএব উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

অনুসিদ্ধান্ত 1. $n, p, q, r\cdots$এর প্রত্যেকটিকে 1 ধরিলে

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots=\frac{a+c+e+\cdots}{b+d+f+\cdots}.$$

অর্থাৎ প্রত্যেক ভগ্নাংশ $=\dfrac{\text{লবগুলির যোগফল}}{\text{হরগুলির যোগফল}}$.

অনুসিদ্ধান্ত 2. $n=1$ ধরিলে $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots=\frac{pa+qc+re+\cdots}{pb+qd+rf+\cdots}$.

উদাহরণ 1. $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}$ হইলে প্রমাণ কর যে, প্রত্যেক ভগ্নাংশ হয় $\frac{1}{2}$ না হয় -1.

প্রত্যেক ভগ্নাংশ $=\dfrac{\text{লবগুলির যোগফল}}{\text{হরগুলির যোগফল}}$

$=\frac{a+b+c}{2(a+b+c)}=\frac{1}{2}$, [যদি $a+b+c$ শূন্য না হয়] ; $\cdots$(i)

(ii) যদি $a+b+c=0$ হয়, তাহা হইলে $b+c=-a$;

$\therefore$ প্রত্যেক ভগ্নাংশ $=\frac{a}{b+c}=\frac{a}{-a}=-1$.

অতএব, প্রত্যেক ভগ্নাংশ $=\frac{1}{2}$ অথবা -1.

উদাহরণ 2. $\frac{bz-cy}{a}=\frac{cx-az}{b}=\frac{ay-bx}{c}$ হইলে দেখাও যে,

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$$

প্রথম ভগ্নাংশের লব এবং হর উভয়কে bc দ্বারা, দ্বিতীয় ভগ্নাংশের লব এবং হর উভয়কে ca দ্বারা, তৃতীয় ভগ্নাংশের লব এবং হর উভয়কে ab দ্বারা ভাগ করিলে

$$\frac{\frac{z}{c}-\frac{y}{b}}{\frac{a}{bc}}=\frac{\frac{x}{a}-\frac{z}{c}}{\frac{b}{ca}}=\frac{\frac{y}{b}-\frac{x}{a}}{\frac{c}{ab}}=\frac{\text{লবগুলির যোগফল}}{\text{হরগুলির যোগফল}}=\frac{0}{\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}}=0.$$

অতএব $\frac{z}{c}-\frac{y}{b}=0$; $\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0$; $\frac{y}{b}-\frac{x}{a}=0$;

অর্থাৎ $\frac{z}{c}=\frac{y}{b}$; $\frac{x}{a}=\frac{z}{c}$; $\frac{y}{b}=\frac{x}{a}$; $\therefore\ \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

উদাহরণ 3. $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}$ হইলে এবং $a+b+c$ শূন্য না হইলে দেখাও যে, $a=b=c$.

প্রমাণ। যেহেতু $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}$

অতএব $\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=\frac{a+b}{c}$.

$\therefore\ \frac{b+c}{a}+1=\frac{c+a}{b}+1=\frac{a+b}{c}+1,$

অথবা $\frac{a+b+c}{a}=\frac{a+b+c}{b}=\frac{a+b+c}{c}$;

$a+b+c$ দ্বারা ভাগ করিয়া $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$.

অতএব $a=b=c$.

উদাহরণ 4. $x(b-c)+y(c-a)+z(a-b)=0$ হইলে দেখাও যে,

$$\frac{b-c}{y-z}=\frac{c-a}{z-x}=\frac{a-b}{x-y}.$$

প্রমাণ। $x(b-c)+y(c-a)+z(a-b)=0$;
এবং $(b-c)+(c-a)+(a-b)=0$;

অতএব বজ্রগুণন দ্বারা $\frac{b-c}{y-z}=\frac{c-a}{z-x}=\frac{a-b}{x-y}$.

উদাহরণ 5. $\frac{b-c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a-b}{c}=1$ হইলে এবং $a-b+c$ শূন্য না হইলে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. [ক. প্র., 1875]

প্রমাণ। যেহেতু $\frac{b-c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a-b}{c}=1$;

অতএব $\frac{b-c}{a}-1+\frac{c+a}{b}-1+\frac{a-b}{c}+1=0$

অথবা $\frac{b-c-a}{a}+\frac{c+a-b}{b}+\frac{a-b+c}{c}=0$;

অথবা $-\frac{a-b+c}{a}+\frac{a-b+c}{b}+\frac{a-b+c}{c}=0$;

অথবা $(a-b+c)\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=0$;

$\therefore$ হয় $a-b+c=0$;

না হয় $-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$;

কিন্তু দেওয়া আছে যে, $a-b+c=0$ নহে; $\therefore -\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$;

অর্থাৎ $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

উদাহরণ 6. $x=cy+bz$, $y=az+cx$, $z=bx+ay$ হইলে

প্রমাণ কর যে, $\frac{x^2}{1-a^2}=\frac{y^2}{1-b^2}=\frac{z^2}{1-c^2}$.

প্রমাণ।
$$x=cy+bz \qquad \cdots(1)$$
$$y=az+cx \qquad \cdots(2)$$
$$z=bx+ay \qquad \cdots(3)$$

(3)এ প্রদত্ত zএর মান (1)এ বসাইয়া $x=cy+b(bx+ay)$
$=(c+ab)y+b^2x$;

পক্ষান্তর দ্বারা $x(1-b^2)=(c+ab)y$. $\cdots(4)$

এইরূপে zএর মান (2)এ বসাইয়া $y(1-a^2)=(c+ab)x$. $\cdots(5)$

(4) এবং (5) হইতে ভাগ দ্বারা $\frac{x(1-b^2)}{y(1-a^2)}=\frac{y}{x}$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{1-a^2}=\frac{y^2}{1-b^2}.$$

এইরূপে (2) হইতে yএর মান (3) এবং (1)এ বসাইয়া দেখান যায় যে,

$$\frac{x^2}{1-a^2}=\frac{z^2}{1-c^2};\quad \therefore\ \frac{x^2}{1-a^2}=\frac{y^2}{1-b^2}=\frac{z^2}{1-c^2}.$$

উদাহরণ 7. $(pa+qb+rc+sd)(pa-qb-rc+sd)$
$=(pa-qb+rc-sd)(pa+qb-rc-sd)$ হইলে
দেখাও যে, bc, ad, ps, qr সমানুপাতী। [বো. প্র., 1890]

প্রদত্ত সমীকরণটিকে ভগ্নাংশের আকারে লিখিয়া

$$\frac{pa+qb+rc+sd}{pa+qb-rc-sd}=\frac{pa-qb+rc-sd}{pa-qb-rc+sd}.$$

যোগ এবং ভাগ-প্রক্রিয়া দ্বারা $\dfrac{pa+qb}{rc+sd}=\dfrac{pa-qb}{rc-sd}$;

একান্তর-প্রক্রিয়া দ্বারা $\dfrac{pa+qb}{pa-qb}=\dfrac{rc+sd}{rc-sd}.$

যোগ এবং ভাগ-প্রক্রিয়া দ্বারা $\dfrac{pa}{qb}=\dfrac{rc}{sd}.$

উভয় পক্ষকে $qb.sd$ দ্বারা গুণ করিয়া $adps=bcqr$;
অথবা $bcqr=adps.$

উভয় পক্ষকে $qr.ad$ দ্বারা ভাগ করিয়া $\dfrac{bc}{ad}=\dfrac{ps}{qr}.$

উদাহরণ 8. $\dfrac{y+z}{b+c}=\dfrac{z+x}{c+a}=\dfrac{x+y}{a+b}$ হইলে প্রমাণ কর যে,
p, q, r, p', q', r', যে-কোন সংখ্যাই হউক না কেন,

$$\frac{px+qy+rz}{pa+qb+rc}=\frac{p'x+q'y+r'z}{p'a+q'b+r'c}.$$

প্রমাণ। $\dfrac{y+z}{b+c}=\dfrac{z+x}{c+a}=\dfrac{x+y}{a+b}=k$ (ধর)

$\therefore\ y+z=k(b+c)$ …(1)

$\therefore\ z+x=k(c+a)$ …(2)

$\therefore\ x+y=k(a+b).$ …(3)

(1), (2) এবং (3) হইতে যোগদ্বারা $2(x+y+z)=2k(a+b+c)$;
অর্থাৎ $x+y+z=k(a+b+c)$ …(4)

(4) হইতে (1) বিয়োগ করিলে $x=ka$; $\therefore\ \dfrac{x}{a}=k.$

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, $\frac{y}{b}=k$; এবং $\frac{z}{c}=k.$

$$\therefore \quad \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{px+qy+rz}{pa+qb+rc}=\frac{p'x+q'y+r'z}{p'a+q'b+r'c}.$$

[অনুসিদ্ধান্ত 2, অণু. 96]

উদাহরণ 9. $x=\frac{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b}-\sqrt{2a-3b}}$ হইলে দেখাও যে,

$$3bx^2-4ax+3b=0$$

প্রশ্ন হইতে $\frac{x}{1}=\frac{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b}-\sqrt{2a-3b}}$;

যোগ এবং ভাগ-প্রক্রিয়া দ্বারা $\frac{x+1}{x-1}=\frac{\sqrt{2a+3b}}{\sqrt{2a-3b}}$;

উভয় পক্ষের বর্গ লইলে $\frac{x^2+1+2x}{x^2+1-2x}=\frac{2a+3b}{2a-3b}$;

যোগ এবং ভাগ-প্রক্রিয়া দ্বারা $\frac{x^2+1}{2x}=\frac{2a}{3b}$;

$$\therefore \quad 3b(x^2+1)=4ax ;$$

অতএব $3bx^2-4ax+3b=0.$

প্রশ্নমালা 47

96 অণুচ্ছেদের অনুসিদ্ধান্তগুলির দ্বারা প্রমাণ কর যে,

1. $\frac{y-z}{a^2}=\frac{z-x}{b^2}=\frac{x-y}{c^2}$ হইলে প্রত্যেক ভগ্নাংশ $=0$; এবং দেখাও যে,

$$x=y=z.$$

2. $\frac{b+c-a}{b+c}=\frac{c+a-b}{c+a}=\frac{a+b-c}{a+b}$ হইলে প্রত্যেক ভগ্নাংশ $=2$ অথবা $\frac{1}{2}$.

3. $\frac{bz-cy}{x}=\frac{cx-az}{y}=\frac{ay-bx}{z}$ হইলে প্রত্যেক ভগ্নাংশ $=0.$

4. $\frac{2x-3y}{x+3y}=\frac{6y-x}{x-3y}=\frac{2y+x}{2(x-1)}$ হইলে প্রত্যেক ভগ্নাংশ $=\frac{y}{2}$

5. $\frac{a}{ax+by+cz}=\frac{b}{bx+cy+az}=\frac{c}{cx+ay+bz}$ হইলে এবং

$a+b+c$ শূন্য না হইলে প্রত্যেক ভগ্নাংশ $=\frac{1}{x+y+z}.$

6. $\frac{bx-ay}{cy-az}=\frac{cx-az}{by-ax}=\frac{z+y}{z+x}$ হইলে এবং $b+c$ শূন্য না হইলে প্রত্যেক অনুপাত $=\frac{x}{y}$. [বো. প্র., 1926]

7. $\frac{b+c-a}{a}=\frac{c+a-b}{b}=\frac{a+b-c}{c}$ হইলে এবং $a+b+c$ শূন্য না হইলে দেখাও যে, $a=b=c$.

8. $\frac{p(b+c)-qa}{ra}=\frac{p(c+a)-qb}{rb}=\frac{p(a+b)-qc}{rc}$ হইলে এবং $a+b+c$ শূন্য না হইলে দেখাও যে, $a=b=c$.

9. $\frac{b+c-a}{b+c}=\frac{c+a-b}{c+a}=\frac{a+b-c}{a+b}$ হইলে এবং $a+b+c$ শূন্য না হইলে দেখাও যে, $a=b=c$.

10. $\frac{p(b+c)-qa}{b+c}=\frac{p(c+a)-qb}{c+a}=\frac{p(a+b)-qc}{a+b}$ হইলে এবং $a+b+c$ শূন্য না হইলে দেখাও যে, $a=b=c$.

11. $x(b-c)+y(c-a)+z(a-b)=0$ হইলে দেখাও যে,

$$\frac{b-c}{cy-bz}=\frac{c-a}{az-cx}=\frac{a-b}{bx-ay}.$$

12. $(a+b+c+d)(a-b-c+d)=(a-b+c-d)(a+b-c-d)$ হইলে প্রমাণ কর যে, a, b, c, d সমানুপাতী হইবে। [পা. প্র., 1910]

13. $(ma+nb+mc+nd)(ma-nb-mc+nd)$
$=(ma-nb+mc-nd)(ma+nb-mc-nd)$ হইলে দেখাও যে, a, b, c, d সমানুপাতী হইবে।

14. $\frac{a}{y+z}=\frac{b}{z+x}=\frac{c}{x+y}$ হইলে দেখাও যে,

$$\frac{a(b-c)}{y^2-z^2}=\frac{b(c-a)}{z^2-x^2}=\frac{c(a-b)}{x^2-y^2}.$$ [ক. প্র., 1908]

15. $x(b+c)=y(c+a)=z(a+b)$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{b^2-c^2}{y-z}=\frac{c^2-a^2}{z-x}=\frac{a^2-b^2}{x-y}.$$

16. $\frac{a+b}{c}+\frac{a-c}{b}+\frac{c-b}{a}=1$ হইলে এবং $a+b-c$ শূন্য না হইলে

দেখাও যে, $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a}$.

17. $\frac{b+c}{a}-\frac{3(c+a)}{b}+\frac{a+b}{c}=1$ হইলে এবং $a+b+c$ শূন্য না হইলে

দেখাও যে, $\frac{1}{c}+\frac{1}{a}=\frac{3}{b}$.

18. $\frac{2x-y}{2a-b}=\frac{2y-z}{2b-c}=\frac{2z-x}{2c-a}$ হইলে দেখাও যে,

$$\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{px+qy+rz}{pa+qb+rc}.$$

19. $\frac{2y+z}{2b+c}=\frac{2z+x}{2c+a}=\frac{2x+y}{2a+b}$ হইলে দেখাও যে,

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{a^3+b^3+c^3}=\left(\frac{x+y+z}{a+b+c}\right)^3.$$

20. $x(b-c)+x^2=y(c-a)+y^2=z(a-b)+z^2$ হইলে দেখাও যে, প্রত্যেক রাশিমালা $=\frac{x+y+z}{x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}}$.

[সঙ্কেত : প্রত্যেক রাশিমালাকে k ধর। 215 পৃষ্ঠার (2) দেখ।]

21. $a^m(y-z)+a^n=b^m(z-x)+b^n=c^m(x-y)+c^n$ হইলে দেখাও যে, প্রত্যেক রাশিমালা $=\frac{a^{n-m}+b^{n-m}+c^{n-m}}{a^{-m}+b^{-m}+c^{-m}}$.

22. $a-b,\ 1+ab,\ c-d,\ 1+cd$ সমানুপাতী হইলে দেখাও যে,

$$\frac{a+d}{1-ad}=\frac{b+c}{1-bc}.$$

23. $a+b : b+c=c+d : d+a$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$a=c$, অথবা $a+b+c+d=0$ [ক. প্র., 1918]

24. $\frac{px+qy}{pa+qb}=\frac{mx+ny}{ma+nb}$ হইলে দেখাও যে, $x : a=y : b$.

25. $\frac{a^2+c^2}{ab+cd}=\frac{ab+cd}{b^2+d^2}$ হইলে প্রমাণ কর যে, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. [পা. প্র., 1925]

26. $\dfrac{x}{1-x^2}=\dfrac{y+z}{1+yz}$, $\dfrac{y}{1-y^2}=\dfrac{z+x}{1+zx}$ হইলে এবং x ও y অসমান হইলে দেখাও যে, $\dfrac{z}{1-z^2}=\dfrac{x+y}{1+xy}$.

27. $\dfrac{x-\dfrac{yz}{x}}{1-yz}=\dfrac{y-\dfrac{zx}{y}}{1-zx}$ হইলে এবং x ও y অসমান হইলে দেখাও যে, অনুপাত-দ্বয়ের প্রত্যেকটি $x+y+z$ অথবা $x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}$ হইবে। [বো. প্র., 1892]

28. যদি $a+\dfrac{y^2-z^2}{b-c}=b+\dfrac{z^2-x^2}{c-a}$ হয়, প্রমাণ কর যে, ইহাদের প্রত্যেকটি $=c+\dfrac{x^2-y^2}{a-b}$.

29. $\dfrac{x}{y+z}=a$, $\dfrac{y}{z+x}=b$, $\dfrac{z}{x+y}=c$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{x^2}{a(1-bc)}=\frac{y^2}{b(1-ca)}=\frac{z^2}{c(1-ab)}.$$

30. $\dfrac{x+2y}{r+2q}=\dfrac{y+2z}{p+2r}=\dfrac{z+2x}{q+2p}$ হইলে দেখাও যে,

$x:y:z=2p+2q-r:\ 2q+2r-p:2r+2p-q.$ [বো. প্র., 1922]

31. $\dfrac{py+qz}{b+c}=\dfrac{pz+qx}{c+a}=\dfrac{px+qy}{a+b}$ হইলে দেখাও যে,

$$(x+y+z)\{(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z\}$$
$$=2(a+b+c)(yz+zx+xy)$$ [ক. প্র., 1906]

32. $x=\dfrac{\sqrt{m+2n}+\sqrt{m-2n}}{\sqrt{m+2n}-\sqrt{m-2n}}$ হইলে দেখাও যে, $nx^2-mx+n=0$.

33. $x=\dfrac{\sqrt[3]{2a+b}+\sqrt[3]{2a-b}}{\sqrt[3]{2a+b}-\sqrt[3]{2a-b}}$ হইলে দেখাও যে,

$$bx^3-6ax^2+3bx-2a=0.$$

34. যদি $alx+bmy+cn$
$=apx+bqy+cr$
$=ax^2+by^2+c$
$=0$ হয়,

তবে দেখাও যে, $x(mr-nq)+y(np-lr)+(lq-mp)=0$.

35. $ax+hy+g=0,$
$hx+by+f=0,$
$gx+fy+c=0$ হইলে
দেখাও যে, $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0.$ [পা. প্র., 1887]

একাদশ অধ্যায়

সূচক-নিয়মাবলী

(Laws of Indices)

97. n অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে '$a \times a \times \cdots n$ বার' এই গুণফলটি সংক্ষেপে a^n লিখিত হয়। a^nকে aর **n-তম ঘাত** (n^{th}-power), nকে ঘাতের **সূচক** (index) এবং aকে a^nএর **n-তম মূল** (n^{th} root) বলা হয়। এই সংজ্ঞা হইতে প্রথম খণ্ডে পূর্ব্বে নিম্নলিখিত সূচক-নিয়মগুলি প্রমাণ করা হইয়াছে :

m এবং n অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে

(i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$;

(ii) $a^m \div a^n = a^{m-n}$, [যদি $m>n$ হয়]

এবং (iii) $(a^m)^n = a^{mn}$.

n অখণ্ড ধনসংখ্যা না হইলে উল্লিখিত সংজ্ঞানুসারে a^n এর কোন অর্থ হয় না। যথা, $a^{-2} = a \times a \times \cdots (-2)$ বার লিখা অর্থহীন ; অতএব পূর্ব্বোক্ত সূচক-নিয়মগুলিরও কোন অর্থ হয় না। এইহেতু বীজগণিতে সূচকের নিম্নলিখিত সাধারণ সংজ্ঞা ব্যবহৃত হয় :

98. সংজ্ঞা। **m এবং n যে-কোন রাশিই হউক না কেন,**

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

ইহা একাধারে **সূচকের সংজ্ঞা** এবং **গুণনের সূচক নিয়ম।**

ইহা হইতে নিম্নলিখিত সূচক-নিয়মাবলী প্রমাণ করা যায় :

(1) $m, n, p\cdots$ যে-কোন রাশিই হউক না কেন,

$$a^m \times a^n \times a^p \cdots = a^{m+n+p+\cdots}$$

ইহা গুণনের সাধারণ সূচক-নিয়ম।

(2) m এবং n যে-কোন রাশি হইলে

$$a^m \div a^n = a^{m-n}.$$

ইহাই ভাগের সূচক-নিয়ম।

অতএব $a^0 = 1$

এবং $a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$

(3) $\sqrt[2]{a}$ (অর্থাৎ aএর বর্গমূল) $= a^{\frac{1}{2}}.$

$\sqrt[3]{a}$ (অর্থাৎ aএর ঘনমূল) $= a^{\frac{1}{3}}.$

n যে-কোন অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে

$\sqrt[n]{a}$ (অর্থাৎ aএর n-তমমূল) $= a^{\frac{1}{n}}.$

এবং $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$

ইহাই মূল নির্ণয় করিবার সূচক-নিয়ম।

(4) m এবং n যে-কোন রাশি হউক না কেন,

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

ইহাই ঘাত-নির্ণয়ের সূচক-নিয়ম।

অতএব m, n, p যে-কোন রাশি হউক না কেন,

$$\{(a^m)^n\}^p = a^{mnp}.$$ ইত্যাদি।

(5) m, n, p, x যে-কোন রাশিই হউক না কেন,

$$(a^m b^n c^p \cdots)^x = a^{mx} b^{nx} c^{px} \cdots.$$

(1)এর প্রমাণ। সংজ্ঞানুসারে $a^m \times a^n = a^{m+n}$;

$\therefore\ a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n} \times a^p = a^{m+n+p}$

এইরূপে $a^m \times a^n \times a^p \times \cdots = a^{m+n+p+\cdots}.$

(2)এর প্রমাণ। সংজ্ঞানুসারে $a^{m-n} \times a^n = a^{m-n+n} = a^m$;

অতএব ভাগের সংজ্ঞানুসারে $a^m \div a^n = a^{m-n}.$

m এবং n যে-কোন দুইটি রাশি হইলে $a^{m-n}=a^m \div a^n$;
$m=n$ ধরিলে $a^{n-n}=a^n \div a^n=1$; $\therefore$ $a^0=1$.

এবং $m=0$ ধরিলে $a^{0-n}=a^0 \div a^n$; অর্থাৎ $a^{-n}=1 \div a^n=\frac{1}{a^n}$.$[\because a^0=1]$
অর্থাৎ a^{-n} a^nএর বিপরীত (reciprocal).

(3)এর প্রমাণ। সূচকের সংজ্ঞানুসারে $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=a^1=a$.
অতএব মূলের সংজ্ঞানুসারে $\sqrt[2]{a}=a^{\frac{1}{2}}$.

আবার $a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=a^1=a$.

অতএব মূলের সংজ্ঞানুসারে $\sqrt[3]{a}=a^{\frac{1}{3}}$.

এইরূপে n যে-কোন অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে

$$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$$

এবং $$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}.$$

(4) এবং (5)এর প্রমাণ উচ্চতর বীজগণিতের পুস্তকে প্রদত্ত হইবে।

উদাহরণ 1. $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=a^{\frac{5}{6}}$.

2. $a^{\frac{1}{3}} \div a^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}=a^{\frac{1}{12}}$.

3. $x^{\frac{1}{2}} \div x^{\frac{1}{3}} \times x^{\frac{1}{4}}=x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} \times x^{\frac{1}{4}}=x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}=x^{\frac{6-4+3}{12}}=x^{\frac{5}{12}}$.

4. $2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}} \times 3a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{6}}=6a^{\frac{2}{3}+(-\frac{1}{3})}b^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=6a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$.

উদাহরণ 5. সরল কর :

$$(x^{-2})^3 \div (x^4)^{-2} \times (x^{-3})^{-5}.$$

প্রদত্ত রাশি $=x^{-2\times 3} \div x^{4\times(-2)} \times x^{-3\times(-5)}$

$$=x^{-6} \div x^{-8} \times x^{15}=x^{-6-(-8)} \times x^{15}=x^2 \times x^{15}=x^{2+15}$$
$$=x^{17}.$$

উদাহরণ 6. $2x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$কে $-2y^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা গুণ কর।
উভয় রাশিমালাকে x-এর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া গুণ করা হইল।

$$\begin{array}{l} \text{গুণ্য} = 2x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{2}{3}} \\ \text{গুণক} = x^{\frac{1}{3}} - 2y^{\frac{1}{3}} \\ \hline \quad 2x + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} \\ \qquad -4x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} + 2y \\ \hline \text{গুণফল} = 2x - x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} - 7x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} + 2y. \end{array}$$

উদাহরণ 7. $x+y$কে $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা ভাগ কর।

$$\begin{array}{l} x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})\,x \qquad\qquad +y\,(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}} \\ \qquad x+x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} \\ \hline \qquad -x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} \qquad +y \\ \qquad -x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} \\ \hline \qquad\qquad x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}+y \\ \qquad\qquad \underline{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}+y} \end{array}$$

অতএব, নির্ণেয় ভাগফল $= x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$.

অথবা $x^{\frac{1}{3}}$এর স্থলে a, $y^{\frac{1}{3}}$এর স্থলে b লিখিলে

$$a^3=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3=x^{\frac{1}{3}\cdot 3}=x^1=x;\quad \text{এইরূপে } b^3=y.$$

অতএব নির্ণেয় ভাগফল $=(x+y)\div(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})$

$=(a^3+b^3)\div(a+b)$

$=a^2-ab+b^2$

$=(x^{\frac{1}{3}})^2-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+(y^{\frac{1}{3}})^2=x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$.

উদাহরণ 8. সরল কর : $\left(\dfrac{x^b}{x^c}\right)^a\left(\dfrac{x^c}{x^a}\right)^b\left(\dfrac{x^a}{x^b}\right)^c$.

প্রদত্ত রাশি $=(x^{b-c})^a(x^{c-a})^b(x^{a-b})^c$

$=x^{(b-c)a}x^{(c-a)b}x^{(a-b)c}$

$=x^{(b-c)a+(c-a)b+(a-b)c}=x^0=1.$

প্রশ্নমালা 48

গুণফল নির্ণয় কর :

1. $x^{\frac{1}{2}}\times x^{\frac{1}{2}}$
2. $x^{\frac{1}{2}}\times x^{\frac{1}{6}}$
3. $a^{\frac{3}{4}}\times a^{-\frac{5}{12}}$
4. $a^{-2}\times a^{-3}$
5. $(a^{\frac{3}{4}})^{\frac{4}{5}}$
6. $(y^{-3})^{6}$
7. $(x^{-5})^{-2}$
8. $x^{\frac{1}{3}}\times x^{\frac{1}{3}}\times x^{\frac{1}{3}}$
9. $a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{3}{4}}\times a^{\frac{5}{12}}$
10. $x^{\frac{1}{4}}\times x^{\frac{1}{4}}\times x^{\frac{1}{4}}\times x^{\frac{1}{4}}$
11. $b^{-\frac{1}{2}}\times b^{-\frac{1}{6}}\times b^{\frac{2}{3}}\times b^{\frac{1}{6}}$
12. $(x^{-2})^{3}.(x^{-3})^{-3}.(x^{7})^{-2}$
13. $(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})$
14. $(2x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})\times(x^{\frac{1}{3}}+2y^{\frac{1}{3}})$
15. $(3a^{\frac{1}{4}}-2b^{\frac{1}{4}})\times(2a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})$
16. $(x^{\frac{1}{5}}+y^{\frac{1}{5}})\times(x^{\frac{1}{5}}-y^{\frac{1}{5}})$
17. $(x^{n}+a^{-n})(x^{n}-a^{-n})$
18. $(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}})\times(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})$
19. $(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}})$
20. $(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}})(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}})$

ভাগফল নির্ণয় কর :

21. $x^{\frac{1}{3}}\div x^{\frac{1}{4}}$
22. $x^{-\frac{1}{3}}\div x^{-\frac{1}{4}}$
23. $a^{2}\div a^{5}$
24. $c\div c^{11}$
25. $1\div d^{5}$
26. $y^{2m}\div y^{3m}$
27. $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}\div x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{5}{18}}$
28. $15x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}\div 5x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$
29. $6a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{3}{4}}c^{\frac{7}{11}}\div 2a^{-\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{4}}c^{-\frac{4}{11}}$
30. $10\div 20a^{2}b^{2}c^{2}$
31. $8a^{2}b^{3}c^{4}\div 4a^{3}b^{4}c^{5}$
32. $(2x-y)\div(2^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})$
33. $(x+y-2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}})\div(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})$
34. $(x-y)\div(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}})$
35. $(x+y+z-3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}})\div(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}})$

সরল কর :

36. $(x^{-2})^{4}\times(x^{-3})^{2}\times(x^{-4})^{3}$
37. $(a^{-1})^{-4}\times(a^{-3})^{4}\times(a^{4})^{-3}$

38. $(x^{-2})^{-4} \div (x^{-1})^5 \times (x^2)^{-3}$

39. $(x^{-3})^2 \div (x^2)^{-4} \div (x^{-3})^{-5}$

40. $(y^{\frac{1}{2}} - z^{\frac{1}{2}})(y^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{1}{2}}) + (z^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}})(z^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}) + (x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})$

41. $(y^{\frac{1}{3}} - z^{\frac{1}{3}})(y^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}} + z^{\frac{2}{3}}) + (z^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}})(z^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}})$
$+ (x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}})$

42. $x^{b-c} \times x^{c-a} \times x^{a-b}$

43. $(x^{b-c})^a \times (x^{c-a})^b \times (x^{a-b})^c$

44. $(x^{b-c})^{b+c} \times (x^{c-a})^{c+a} \times (x^{a-b})^{a+b}$

45. $x^{b+c-a}.\, x^{c+a-b}.\, x^{a+b-c} - x^{\frac{b+c}{2}}.x^{\frac{c+a}{2}}.x^{\frac{a+b}{2}}$

46. $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} + z^{\frac{1}{3}} = 0$ হইলে দেখাও যে,
$(x+y+z)^3 = 27xyz$

47. $(y+z)^{\frac{1}{3}} + (z+x)^{\frac{1}{3}} + (x+y)^{\frac{1}{3}} = 0$ হইলে দেখাও যে,
$(x+y+z)^3 = 9(x^3+y^3+z^3)$.

99. সূচক-বিষয়ক বিবিধ প্রশ্ন।

উদাহরণ 1. (i) $16^{\frac{1}{2}} = (4^2)^{\frac{1}{2}} = 4^{2 \cdot \frac{1}{2}} = 4^1 = 4.$

(ii) $(\frac{1}{8})^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{2^3}\right)^{-\frac{2}{3}} = (2^{-3})^{-\frac{2}{3}} = 2^{-3 \cdot (-\frac{2}{3})} = 2^2 = 4.$

উদাহরণ 2. দেখাও যে, $\left(a^{m^{n-1}}\right)^m = a^{m^n}$.

m^{n-1}কে x ধরিলে বামপক্ষ $= (a^x)^m = a^{xm}$;

কিন্তু $xm = m^{n-1} \times m = m^{n-1+1} = m^n$;

অতএব বামপক্ষ $= a^{xm} = a^{m^n}$.

উদাহরণ 3. সরল কর : $\sqrt[6]{\dfrac{64a^8b^{16}c^5}{a^2b^{-2}c^{-7}}}$.

প্রদত্ত রাশি $= \left(\dfrac{64a^8b^{16}c^5}{a^2b^{-2}c^{-7}}\right)^{\frac{1}{6}} = \left\{2^6a^{8-2}b^{16-(-2)}c^{5-(-7)}\right\}^{\frac{1}{6}}$

$= (2^6a^6b^{18}c^{12})^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{6}{6}}a^{\frac{6}{6}}b^{\frac{18}{6}}c^{\frac{12}{6}} = 2ab^3c^2.$

উদাহরণ 4. সরল কর : $\dfrac{6^n \times 2^{2n} \times 3^{3n}}{30^n \times 3^{2n} \times 2^{3n}}$. [পা. প্র., 1917]

লব $=(2\times3)^n \times 2^{2n} \times 3^{3n} = (2^n \times 2^{2n}) \times (3^n \times 3^{3n}) = 2^{3n} \times 3^{4n}$;

হর $=(2\times3\times5)^n \times 3^{2n} \times 2^{3n} = (2^n \times 2^{3n}) \times (3^n \times 3^{2n}) \times 5^n$

$= 2^{4n} \times 3^{3n} \times 5^n$.

অতএব প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{2^{3n} \times 3^{4n}}{2^{4n} \times 3^{3n} \times 5^n} = 2^{3n-4n} \times 3^{4n-3n} \times 5^{-n}$

$= 2^{-n} \times 3^n \times 5^{-n} = \dfrac{3^n}{2^n \times 5^n} = \left(\dfrac{3}{2\times5}\right)^n = \left(\dfrac{3}{10}\right)^n$.

উদাহরণ 5. সরল কর :

$$\frac{1}{1+x^{p-q}+x^{p-r}} + \frac{1}{1+x^{q-r}+x^{q-p}} + \frac{1}{1+x^{r-p}+x^{r-q}}.$$

প্রথম রাশি $= \dfrac{1}{1+x^{p-q}+x^{p-r}} = \dfrac{x^{-p}}{(1+x^{p-q}+x^{p-r})x^{-p}} = \dfrac{x^{-p}}{x^{-p}+x^{-q}+x^{-r}}$.

এইরূপে দ্বিতীয় পদ $= \dfrac{x^{-q}}{x^{-p}+x^{-q}+x^{-r}}$. এবং তৃতীয় পদ $= \dfrac{x^{-r}}{x^{-p}+x^{-q}+x^{-r}}$.

প্রদত্ত রাশি

$= \dfrac{x^{-p}}{x^{-p}+x^{-q}+x^{-r}} + \dfrac{x^{-q}}{x^{-p}+x^{-q}+x^{-r}} + \dfrac{x^{-r}}{x^{-p}+x^{-q}+x^{-r}}$

$= \dfrac{x^{-p}+x^{-q}+x^{-r}}{x^{-p}+x^{-q}+x^{-r}} = 1$.

উদাহরণ 6. সরল কর : $\sqrt[bc]{\dfrac{x^b}{x^c}} \times \sqrt[ca]{\dfrac{x^c}{x^a}} \times \sqrt[ab]{\dfrac{x^a}{x^b}}$. [ক. প্র., 1923]

প্রদত্ত রাশি $= \sqrt[bc]{x^{b-c}} \times \sqrt[ca]{x^{c-a}} \times \sqrt[ab]{x^{a-b}}$

$= x^{\frac{b-c}{bc}} \times x^{\frac{c-a}{ca}} \times x^{\frac{a-b}{ab}} = x^{\frac{b-c}{bc}+\frac{c-a}{ca}+\frac{a-b}{ab}}$

$= x^{\frac{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)}{abc}}$

$= x^{\frac{0}{abc}} = x^0 = 1$.

উদাহরণ 7. যদি $y^x = x^y$ হয়, দেখাও যে, $\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{y}{x}} = y^{\frac{y}{x}-1}$

$y^x = x^y$; উভয় পক্ষের x-তম মূল গ্রহণ করিলে $y = x^{\frac{y}{x}}$.

অতএব $\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{y}{x}} = \dfrac{y^{\frac{y}{x}}}{x^{\frac{y}{x}}} = \dfrac{y^{\frac{y}{x}}}{y} = y^{\frac{y}{x}-1}$

উদাহরণ 8. সমাধান কর : $16^{x+1} = 8^{6-x}$.

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে $(2^4)^{x+1} = (2^3)^{6-x}$;

অথবা, $2^{4x+4} = 2^{18-3x}$;

$\therefore$ সূচকগুলির সমতা হইতে $4x + 4 = 18 - 3x$;

পক্ষান্তর করিয়া $7x = 14$;

$\therefore \quad x = 2.$

[সমাধানের বিশুদ্ধি পরীক্ষা কর।]

উদাহরণ 9. সমাধান কর : $2^x 2^y = 16$; ... (i)

$\dfrac{3^x}{3^y} = 9.$ ... (ii)

(i) হইতে $2^{x+y} = 2^4$; $\quad \therefore\ x + y = 4,$ ... (iii)

(ii) হইতে $3^{x-y} = 3^2$; $\quad \therefore\ x - y = 2$; ... (iv)

(iii) এবং (iv) হইতে যোগ দ্বারা $2x = 6$; $\quad \therefore\ x = 3.$

এবং বিয়োগ দ্বারা $2y = 2.$ $\quad \therefore\ y = 1.$

100. উদাহরণ 8 এবং 9এ প্রদত্ত সমীকরণগুলিকে **সূচকীয় সমীকরণ** (Exponential Equation) বলে।

প্রশ্নমালা 49

সরল কর :

1. $9^{\frac{1}{2}}$ **2.** $27^{\frac{1}{3}}$ **3.** $8^{\frac{2}{3}}$ **4.** $16^{\frac{3}{4}}$ **5.** $32^{-\frac{3}{5}}$

6. $81^{-\frac{3}{4}}$ **7.** $(\frac{4}{9})^{-\frac{1}{2}}$ **8.** $(\frac{64}{125})^{-\frac{2}{3}}$

9. $\dfrac{x^{-3}}{y^{-2}} \times \dfrac{y^{-3}}{x^{-2}}$. **10.** $\left(x^{2^{x-1}}\right)^2$ **11.** $\left(a^{3^{n+1}}\right)^3$.

12. $\left\{\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{y^4}} \cdot \sqrt{\dfrac{y^3}{x^5}}\right\}^{\frac{1}{2}} . x^2$

13. $\sqrt{xy}.x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}$ **14.** $(ab^{-2}c^2)^{\frac{1}{2}} \times (a^3b^2c^{-3})^{\frac{1}{3}}$

15. $\left\{\sqrt[3]{4}\times\frac{1}{\sqrt[6]{8}}\times\sqrt[12]{2^{-1}}\right\}^{\frac{1}{4}}$

16. $\left(\frac{x^p}{x^q}\right)^{p+q}\div\left(\frac{x^{p+q}}{x^{p-q}}\right)^{\frac{p^2}{q}}$

17. $\sqrt{x^{-2}yz}.\ \sqrt{y^{-2}zx}.\ \sqrt{z^{-2}xy}$

18. $\frac{8^{3m}.\,9^{3n}.\,125^{2p}}{16^{2m}.\,27^{2n}.\,25^{3p}}$

19. $\frac{2^{m+1}.\,3^{2m-n}.\,5^{m+n}.\,6^n}{6^m.\,10^{n+2}.\,15^m}$ [পা. প্র., 1918]

20. $\left(\frac{x^b}{x^c}\right)^a\left(\frac{x^c}{x^a}\right)^b\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^c$

21. $\left(\frac{x^l}{x^m}\right)^{l+m}\times\left(\frac{x^m}{x^n}\right)^{m+n}\times\left(\frac{x^n}{x^l}\right)^{n+l}$ [ক. প্র., 1921]

22. $\sqrt[b+c]{\frac{x^{b^2}}{x^{c^2}}}\times\sqrt[c+a]{\frac{x^{c^2}}{x^{a^2}}}\times\sqrt[a+b]{\frac{x^{a^2}}{x^{b^2}}}$

23. $\left(\frac{x^m}{x^n}\right)^{m^2+mn+n^2}\times\left(\frac{x^n}{x^l}\right)^{n^2+nl+l^2}\times\left(\frac{x^l}{x^m}\right)^{l^2+lm+m^2}$

24. $\left(\frac{x^l}{x^m}\right)^l\times\left(\frac{x^m}{x^l}\right)^m\div\left\{(x^l)^l\times(x^m)^m\right\}\times\left\{(x^m)^l\times(x^l)^m\right\}$
[ক. প্র., 1903

25. $\frac{\left(a+\frac{1}{b}\right)^m\left(a-\frac{1}{b}\right)^n}{\left(b+\frac{1}{a}\right)^m\left(b-\frac{1}{a}\right)^n}$

26. $\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^{-m}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)^{-n}}{\left(\frac{a}{b}+1\right)^{-m}\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^{-n}}$

27. $\frac{\left(p^2-\frac{1}{q^2}\right)^p\left(p-\frac{1}{q}\right)^{q-p}}{\left(q^2-\frac{1}{p^2}\right)^q\left(q+\frac{1}{p}\right)^{p-q}}$

28. $\frac{1}{1+x^{b-a}+x^{c-a}}+\frac{1}{x^{a-b}+1+x^{c-b}}+\frac{1}{x^{a-c}+x^{b-c}+1}$, [ক. প্র., 1926]

29. দেখাও যে, (i) $\left(x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}}\right)\left(x^{2^{n-1}}-y^{2^{n-1}}\right)=x^{2^n}-y^{2^n}$.

এবং (ii) $(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)\cdots\left(x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}}\right)$

$$=\frac{x^{2^n}-y^{2^n}}{x-y}.$$

30. যদি $x^y=y^x$ হয়, দেখাও যে, $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}=x^{\frac{x}{y}-1}$

31. $p=a^x, q=a^y$ এবং $(p^yq^x)^z=a^2$ হইলে দেখাও যে, $xyz=1.$

[ক. প্র., 1902]

সমাধান কর :

32. $8^x=2\times 4^x$ **33.** $9^x=\frac{9}{3^x}$ **34.** $9^{5x+1}=27^{3x+2}$

35. $16^{2x+1}=32^{x+2}$ **36.** $125.5^x=5^{2x}$

37. $(\surd 3)^{2x+3}=9.3^{2x-1}$ **38.** $5^{x+y}=125$, $3^{2x-y}=1$

39. $3^x.9^y=27$, $4^x.8^y=32$ **40.** $5^{x-1}.125^y=1$, $8^x=16^y$

41. $5^{x-1}.125^y=1$, $8^x.16^y=\frac{1}{4}.$

দ্বাদশ অধ্যায়

বর্গমূল (Square Root)

101. অবঘাতন (Evolution) ; বর্গমূল (Square Root) ; ঘনমূল (Cube Root) ইত্যাদি। কোন রাশি দুইটি সমান গুণনীয়কের গুণফল হইলে গুণনীয়কদ্বয়ের যে-কোন একটিকে রাশিটির **বর্গমূল (Square Root)** বলে।

এইরূপ কোন রাশি তিনটি সমান গুণনীয়কের গুণফল হইলে গুণনীয়ক-তিনটির যে-কোন একটিকে রাশির **ঘনমূল (Cube Root)** বলে।

$\surd a$ বা $\sqrt[2]{a}$ দ্বারা aএর বর্গমূল বুঝায় ; $\sqrt[3]{a}$ দ্বারা aএর ঘনমূল বুঝায় ; $\sqrt[n]{a}$এ বুঝায় aএর nতম মূল।

সাধারণতঃ কোন রাশি n-সংখ্যক সমান গুণনীয়কের গুণফল হইলে গুণনীয়কগুলির যে-কোন একটিকে রাশিটির n-**তমমূল** (n^{th} Root) বলে।

মূল-নির্ণয়ের প্রণালীকে **অবঘাতন** (**Evolution**) বলে।

102. প্রত্যেক রাশির তুইটি বর্গমূল আছে।

যথা, $(+a)\times(+a)=a^2$;

এইরূপ $(-a)\times(-a)=a^2$;

অতএব $+a$ এবং $-a$, এই উভয়ই a^2এর বর্গমূল।

এস্থলে শুধু **ধনাত্মক মূলটিই** প্রদত্ত হইবে।

টীকা। প্রকৃতপক্ষে কোন রাশির n-তম মূলের সংখ্যা $=n$; এই বিষয়ের আলোচনা উচ্চতর বীজগণিতের অন্তর্ভূ‍ত বলিয়া উহা এস্থলে পরিত্যক্ত হইল।

103. সূচক-নিয়ম দ্বারা সরল রাশির (Monomialsএর) মূল-নির্ণয়।

পূর্ব্বেই প্রমাণিত হইয়াছে যে, $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$.

অতএব এই নিয়ম দ্বারা যে-কোন সরল রাশির মূল নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ 1. $9x^4y^2z^6$এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$$\sqrt{9x^4y^2z^6}=(9x^4y^2z^6)^{\frac{1}{2}}$$
$$=(3^2x^4y^2z^6)^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{2}{2}}x^{\frac{4}{2}}y^{\frac{2}{2}}z^{\frac{6}{2}}$$
$$=3x^2yz^3.$$

উদাহরণ 2. $64\frac{x^6}{y^3z^9}$এর ঘনমূল নির্ণয় কর।

$$\sqrt[3]{64\frac{x^6}{y^3z^9}}=\left(64\frac{x^6}{y^3z^9}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(4^3x^6y^{-3}z^{-9}\right)^{\frac{1}{3}},\quad \left[\because \frac{1}{y^3}=y^{-3}, \text{ইত্যাদি।}\right]$$
$$=4^{\frac{3}{3}}x^{\frac{6}{3}}y^{-\frac{3}{3}}z^{-\frac{9}{3}}=4x^2y^{-1}z^{-3}=\frac{4x^2}{yz^3}.$$

উদাহরণ 3. $-32a^5b^{10}c^{15}$এর পঞ্চম মূল নির্ণয় কর।

$$\sqrt[5]{-32a^5b^{10}c^{15}}=(-32a^5b^{10}c^{15})^{\frac{1}{5}}$$
$$=\{(-2)^5a^5b^{10}c^{15}\}^{\frac{1}{5}},\quad [\because -32=(-2)^5]$$
$$=(-2)^{\frac{5}{5}}a^{\frac{5}{5}}b^{\frac{10}{5}}c^{\frac{15}{5}}=-2ab^2c^3.$$

প্রশ্নমালা 50

নিম্নলিখিত রাশিগুলির বর্গমূল নির্ণয় কর :

1. $4a^4b^2c^2$ 2. $9x^2y^4z^6$ 3. $64a^{10}b^6c^4$ 4. $\frac{4}{25}a^2b^4c^6$

5. $\dfrac{81x^4}{625y^2z^4}$.

নিম্নলিখিত রাশিগুলির ঘনমূল নির্ণয় কর :

6. $8x^3y^6$ 7. $27\dfrac{x^9z^3}{y^6}$ 8. $\dfrac{-8}{125}x^6y^9z^3$ 9. $\dfrac{-64a^3b^3c^6}{343x^3y^6z^9}$

সরল কর :

10. $\sqrt[4]{16a^4b^8c^{12}}$ 11. $\sqrt[4]{\frac{1}{81}x^8y^{12}z^{-4}}$

12. $\sqrt[5]{32a^{15}b^{10}c^5}$ 13. $\sqrt[8]{256x^8y^{16}z^{-8}}$

14. $\sqrt[p]{2^px^{2p}y^{3p}z^{-4p}}$ 15. $\sqrt[n]{\dfrac{3^nx^ny^{3n}z^{4n}}{5^na^2b^n}}$

104. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ দ্বারা মিশ্ররাশিমালার (Compound Expressionএর) বর্গমূল।

উদাহরণ 1. $4x^2+12xy+9y^2$এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশি $=(2x)^2+2.2x.3y+(3y)^2=(2x+3y)^2$.

অতএব $\sqrt{\{4x^2+12xy+9y^2\}}=\pm(2x+3y)$.

দ্রষ্টব্য। সাধারণতঃ ধনাত্মক বর্গমূলটিই প্রদর্শিত হয়।

যথা, $\sqrt{\{4x^2+12xy+9y^2\}}=2x+3y$.

উদাহরণ 2. $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2-4\left(a-\dfrac{1}{a}\right)$এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

[ক. প্র., 1914]

যেহেতু, $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2=\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2+4$,

অতএব প্রদত্ত রাশি $=\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2-4\left(a-\dfrac{1}{a}\right)+4=\left\{\left(a-\dfrac{1}{a}\right)-2\right\}^2$

অতএব নির্ণেয় বর্গমূল $=a-\dfrac{1}{a}-2$.

উদাহরণ 3. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+16$এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=\{(x+1)(x+7)\}\{(x+3)(x+5)\}+16$

$=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+16$

$=(a+7)(a+15)+16$, [x^2+8xকে a লিখিলে]

$=a^2+22a+105+\ 6$

$=a^2+22a+121=(a+11)^2=(x^2+8x+11)^2$.

অতএব নির্ণেয় বর্গমূল $=x^2+8x+11$.

দ্রষ্টব্য। লক্ষ্য কর যে, এস্থলে গুণনীয়কগুলিকে এরূপভাবে সজ্ঘবদ্ধ করিয়া গুণ করা হইল, যেন লব্ধ গুণফল দুইটিতে প্রথম দুইটি পদের সমষ্টি একইরূপ হয়।

প্রশ্নমালা 51

গুণনীয়ক দ্বারা নিম্নলিখিত রাশিমালাগুলির বর্গমূল নির্ণয় কর :

1. $x^2+8x+16$ **2.** $a^2x^2+2abx+b^2$

3. $(ax+by)^2+2(ax+by)c+c^2$

4. $(a+b)^2+(c+d)^2+2(a+b)(c+d)$

5. $x^4-4x^3+6x^2-4x+1$ [মা. প্র., 1880]

6. $x^{\frac{2}{m}}+x^{-\frac{2}{m}}-2$ **7.** $9^m+25^n-(5-3)3^m.5^n$

8. $4^m+9^n-2^{m+1}.3^n$

9. $a^2+\frac{1}{a^2}-2\left(a+\frac{1}{a}\right)+3$ [এ. প্র., 1904]

10. $4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-12\left(x-\frac{1}{x}\right)+1$

11. $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-6\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)+7$ [ক. প্র., 1911]

12. $x^4+\frac{1}{x^4}+4\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)+2$ [বো. প্র., 1918]

13. $\frac{a^4}{b^4}+\frac{b^4}{a^4}-4\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)+6$

14. $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+12$

15. $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+3+\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a}$

16. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{2x}{a}+3-\frac{2a}{x}+\frac{a^2}{x^2}$ [বো. প্র., 1890]

17. $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1\frac{3}{4}$

18. $(bc+ca+ab)^2-4abc(c+a)$

19. $x^{-8}+2x^{-7}+x^{-6}+2x^{-4}+2x^{-3}+1$

20. $x^4+\frac{1}{x^4}-2\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+4$

21. $(x^2+3x+2)(x^2+5x+6)(x^2+4x+3)$

22. $(2x^2-7x+6)(4x^2-8x+3)(2x^2-5x+2)$

3. $x(x+1)(x+2)(x+3)+1$ [ক. প্র., 1924]

4. $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+16$ [ক. প্র., 1930]

25. $(2x-1)(2x+1)(2x+3)(2x+5)+16.$

105. মিশ্ররাশিমালার বর্গমূল-নির্ণয়ের সাধারণ নিয়ম। ইহা পাটীগণিতের প্রণালীর মত। মনে কর, '$a^2+2ab+b^2$' রাশিমালাটির বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইবে। যেহেতু $a^2+2ab+b^2$এর বর্গমূল $=a+b$, স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, যদি প্রদত্ত রাশিমালাটিকে aএর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া লওয়া যায়, তাহা হইলে

(1) বর্গমূলের প্রথম পদ $a=$প্রদত্ত রাশিমালার প্রথম পদ a^2এর বর্গমূল ;

(2) এখন প্রদত্ত রাশিমালা হইতে a^2 বাদ দিলে $2ab+b^2$ অবশিষ্ট থাকে ; ইহার প্রথম পদ $2ab$কে (মূলের পূর্ব্বলব্ধ অংশ aএর দ্বিগুণ অর্থাৎ) $2a$ দ্বারা ভাগ করিলে বর্গমূলের দ্বিতীয় পদ b পাওয়া যাইবে। ইহাকে $2a$এর সহিত যোগ করিয়া যোগফল $2a+b$ দ্বারা পূর্ব্বোক্ত অবশিষ্ট $2ab+b^2$কে ভাগ করিলে আর কিছুই অবশিষ্ট থাকিবে না ; সম্পূর্ণ প্রণালীটি এইরূপ ভাবে প্রদর্শিত হইতে পারে :

$$
\begin{array}{l}
\qquad\quad a^2+\ 2ab+b^2(a+b \\
\qquad\quad \underline{a^2\qquad\qquad\qquad} \\
2a+b\,)\,2ab+b^2 \\
\qquad\quad\ \ \underline{2ab+b^2}
\end{array}
$$

বর্গমূলে পদের সংখ্যা দুইএর অধিক হইলে প্রথম দুইটি পদের সমষ্টিকে একটি পদ মনে করিয়া উল্লিখিত প্রণালীর পুনঃ প্রয়োগ দ্বারা মূলের পরবর্ত্তী পদ পাওয়া যাইতে পারে।

অতএব বর্গমূল-নির্ণয়ের সাধারণ নিয়ম এইরূপ হইবে :

নিয়ম। (i) প্রদত্ত রাশিমালাকে উহার অন্তর্গত কোন অক্ষরের ঘাতসমূহের একই ক্রম (হয় অধঃক্রম, না হয় উর্দ্ধক্রম)-অনুসারে সাজাও।

(ii) প্রথম পদের বর্গমূল নির্ণয় করিয়া উহাকে প্রদত্ত রাশিমালার ডান-দিকে ভাগফলের মত রাখ ; ইহাই নির্ণেয় বর্গমূলের প্রথম পদ।

(iii) মূলের প্রথম পদের বর্গকে প্রদত্ত রাশিমালা হইতে বিয়োগ কর এবং অবশিষ্টের প্রথম পদকে মূলের প্রথম পদটির দ্বিগুণ দ্বারা মনে-মনে ভাগ কর ; লব্ধফলটি হইবে নির্ণেয় বর্গমূলের দ্বিতীয় পদ। এখন মূলের প্রথম পদের দ্বিগুণের সহিত এই দ্বিতীয় পদটি যোগ করিয়া যোগফলকে পূর্ব্বোক্ত অবশিষ্টের বামদিকে ভাজকের মত রাখ এবং উহাকে বর্গমূলের দ্বিতীয় পদ দ্বারা গুণ করিয়া গুণফল পূর্ব্বোক্ত অবশিষ্ট হইতে বিয়োগ কর।

(iv) বর্গমূলের প্রথম দুইটি পদকে একটি পদ ধরিয়া উল্লিখিত প্রণালী পুনঃ প্রয়োগ কর এবং যে পর্য্যন্ত কোন অবশিষ্ট না থাকে, সে পর্য্যন্ত প্রণালীটি পুনঃ-পুনঃ প্রয়োগ কর।

উদাহরণ 1. $4x^2-12xy+9y^2$এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

রাশিমালাটি xএর ঘাতের অধঃক্রমে সাজান আছে।

$$\begin{array}{r|l}
 & 4x^2-12xy+9y^2\,(2x-3y \\
 & 4x^2 \\ \hline
4x-3y & \quad -12xy+9y^2 \\
 & \quad -12xy+9y^2 \\ \hline
\end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=2x-3y$.

উদাহরণ 2. $4x^4-12x^3y+25x^2y^2-24xy^3+16y^4$এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

রাশিমালাটি xএর ঘাতের অধঃক্রমে সজ্জিত আছে।

$$\begin{array}{r|l}
 & 4x^4-12x^3y+25x^2y^2-24xy^3+16y^4\,(2x^2-3xy+4y^2 \\
 & 4x^4 \\ \hline
4x^2-3xy & -12x^3y+25x^2y^2-24xy^3+16y^4 \\
 & -12x^3y+\ \ 9x^2y^2 \\ \hline
4x^2-6xy+4y^2 & 16x^2y^2-24xy^3+16y^4 \\
 & 16x^2y^2-24xy^3+16y^4 \\ \hline
\end{array}$$

অতএব নির্ণেয় বর্গমূল $=2x^2-3xy+4y^2$.

উদাহরণ 3. $\frac{64}{x^4}+\frac{128}{x^2}+96+32x^2+4x^4$এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

রাশিমালাটি x-এর ঘাতের ঊর্দ্ধক্রম-অনুসারে সজ্জিত আছে।

$$\frac{64}{x^4}+\frac{128}{x^2}+96+32x^2+4x^4\ \Big(\frac{8}{x^2}+8+2x^2$$
$$\frac{64}{x^4}$$
$$\frac{16}{x^2}+8\Big)\ \frac{128}{x^2}+96+32x^2+4x^4$$
$$\frac{128}{x^2}+64$$
$$\frac{16}{x^2}+16+2x^2\Big)\ 32+32x^2+4x^4$$
$$32+32x^2+4x^4$$

অতএব নির্ণেয় বর্গমূল $=\frac{8}{x^2}+8+2x^2$ অথবা, $2x^2+8+\frac{8}{x^2}.$

দ্রষ্টব্য। এস্থলে রাশিমালাটিকে xএর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়াও বর্গমূল নির্ণয় করা যাইবে এবং উত্তর একই হইবে।

উদাহরণ 4. $x^{\frac{6}{5}}+4x^{\frac{1}{5}}+4+2x^{\frac{4}{5}}+4x^{\frac{3}{5}}+x^{\frac{2}{5}}$এর বর্গমূল নির্ণয় কর। রাশিমালাটিকে x-এর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া বর্গমূল নির্ণয় করা হইল।

$$x^{\frac{6}{5}}+2x^{\frac{4}{5}}+4x^{\frac{3}{5}}+x^{\frac{2}{5}}+4x^{\frac{1}{5}}+4\ \big(x^{\frac{3}{5}}+x^{\frac{1}{5}}+2$$
$$x^{\frac{6}{5}}$$
$$2x^{\frac{3}{5}}+x^{\frac{1}{5}}\Big)\ 2x^{\frac{4}{5}}+4x^{\frac{3}{5}}+x^{\frac{2}{5}}+4x^{\frac{1}{5}}+4$$
$$2x^{\frac{4}{5}}\qquad +x^{\frac{2}{5}}$$
$$2x^{\frac{3}{5}}+2x^{\frac{1}{5}}+2\Big)\ 4x^{\frac{3}{5}}\qquad +4x^{\frac{1}{5}}+4$$
$$4x^{\frac{3}{5}}\qquad +4x^{\frac{1}{5}}+4$$

অতএব নির্ণেয় বর্গমূল $=x^{\frac{3}{5}}+x^{\frac{1}{5}}+2.$

106. অসম্পূর্ণ বর্গ। যে রাশিমালার বর্গমূল সম্পূর্ণ নির্ণয় করা যায় না, উহাকে অসম্পূর্ণ বর্গ বলে। নিম্নে কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হইল।

উদাহরণ 1. $x^4-6x^3+13x^2-12x+1$এর সহিত কোন্ সংখ্যা যোগ করিলে যোগফল একটি পূর্ণবর্গ হইবে ?

$$\begin{array}{r|l}
 & x^4-6x^3+13x^2-12x+1\;(x^2-3x+2 \\
 & x^4 \\ \hline
2x^2-3x & -6x^3+13x^2-12x+1 \\
 & -6x^3+\;\;9x^2 \\ \hline
2x^2-6x+2 & 4x^2-12x+1 \\
 & 4x^2-12x+4 \\ \hline
 & \qquad\qquad -3
\end{array}$$

সাধারণ নিয়মে বর্গমূল নির্ণয় করিতে গিয়া দেখা গেল যে, -3 অবশিষ্ট থাকে ; যদি অবশিষ্ট 0 হইত, তাহা হইলে রাশিমালাটি একটি সম্পূর্ণ বর্গ হইত। রাশিমালাটির সহিত 3 যোগ করিলে অবশিষ্ট ($-3+3$ বা) 0 হয়। অতএব 3 যোগ করিতে হইবে।

উদাহরণ 2. m কত হইলে $x^4+6x^3+7x^2-6x+m$ একটি পূর্ণবর্গ হইবে ? [পা. প্র., 1920]

$$\begin{array}{r|l}
 & x^4+6x^3+7x^2-6x+m\;(x^2+3x-1 \\
 & x^4 \\ \hline
2x^2+3x & 6x^3+7x^2-6x+m \\
 & 6x^3+9x^2 \\ \hline
2x^2+6x-1 & -2x^2-6x+m \\
 & -2x^2-6x+1 \\ \hline
 & \qquad\qquad m-1
\end{array}$$

সাধারণ নিয়মে বর্গমূল নির্ণয় করিতে গিয়া দেখা গেল যে, $m-1$ অবশিষ্ট থাকে অবশিষ্ট 0 হইলে রাশিমালাটি পূর্ণবর্গ হইবে।

$\therefore\ m-1=0$; অর্থাৎ $m=1$.

প্রশ্নমালা 52

105 অণুচ্ছেদে প্রদত্ত নিয়মে নিম্নলিখিত রাশিমালাগুলির বর্গমূল নির্ণয় কর :

1. $a^2+4ab+4b^2$
2. $4a^2+20ab+25b^2$
3. $144x^2+168xy+49y^2$
4. $x^4+4x^3+10x^2+12x+9$
5. $9x^4+24x^3+10x^2-8x+1$
6. $49x^4+36y^4+109x^2y^2-70x^3y-60xy^3$ [ক. প্র., 1918]
7. $1+2a+2a^2+a^3+\frac{a^4}{4}$
8. $4x^4+2x^3-\frac{31}{4}x^2-$

9. $\frac{x^4}{4}+4x^2+\frac{ax^2}{3}+\frac{a^2}{9}-2x^3-\frac{4ax}{3}$

10. $x^2-6x+5+\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}$ 11. $4x^4+20x^2-3-\frac{70}{x^2}+\frac{49}{x^4}$

12. $x^4+4x+2+4x^{-2}+4x^{-3}+x^{-4}$

13. $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{6x}{y}-\frac{6y}{x}+7$

14. $9x^2+6x^{\frac{4}{3}}-4-11x^{\frac{2}{3}}+4x^{-\frac{2}{3}}$

15. $9a-12a^{\frac{1}{2}}-2+4a^{-\frac{1}{2}}+a^{-1}$

16. $4a^4+9\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)+12a^2\left(a+\frac{1}{a}\right)+18$

17. $x^2(x^2+y^2+z^2)+2x(y+z)(yz-x^2)+y^2z^2$. [মা. প্র., 1890]

18. $3(3a^2-2ab+b^2)(a^2+3b^2)+b^2(a+4b)^2$. [মা. প্র., 1898]

19. $\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{x^4}-2\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3}\right)+3\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)-4\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+5$

[মা. প্র., 1882]

20. $4a^4-12a^3-7a^2+23a+14$এর সহিত কত যোগ করিলে যোগফল পূর্ণবর্গ হইবে? [ক. প্র., 1921]

21. m কত হইলে $x^4-6x^3+7x^2+6x+m$ রাশিমালাটি পূর্ণবর্গ হইবে?

22. n কত হইলে $16x^4-24x^3+41x^2-nx+16$ পূর্ণবর্গ হইবে?

23. যদি $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+c$ পূর্ণবর্গ হয়, cএর মান কত?

[পাট. প্র., 1930]

24. xএর মান কত হইলে $9x^4-12x^3+22x^2-13x+12$ পূর্ণবর্গ হইবে?

[ঢা. প্র., 1930]

25. xএর মান কত হইলে $x^4+6x^3+11x^2+3x+31$ পূর্ণবর্গ হইবে?

[ক. প্র., 1927]

26. যদি x^2+px+q পূর্ণবর্গ হয়, তবে দেখাও যে, $p^2=4q$

27. যদি ax^2+bx+c পূর্ণবর্গ হয়, তবে দেখাও যে, $b^2=4ac$.

চতুর্থ পদ পর্য্যন্ত নিম্নলিখিত রাশিগুলির বর্গমূল নির্ণয় কর :

28. $1+x$ 29. $1-x$ 30. $1+x+x^2$.

ত্রয়োদশ অধ্যায়

লেখাবলীর ব্যবহার

(Application of Graphs)

107. সহ-সমীকরণের লৈখিক সমাধান (Graphical Solution of Simultaneous Equations)। পূর্ব্বে প্রদর্শিত হইয়াছে যে, কোন সমীকরণের লেখ (Graph)-এর যে-কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। মনে কর, P দুইটি সহ-সমীকরণের লেখ-এর সাধারণ বিন্দু, অর্থাৎ ছেদবিন্দু ; অতএব P-এর স্থানাঙ্কদ্বয় দ্বারা উভয় সমীকরণই সিদ্ধ হইবে ; কাজেই Pএর স্থানাঙ্কগুলি এই সহ-সমীকরণদ্বয়ের বীজ। ছক-কাগজের সাহায্যে Pএর স্থানাঙ্কগুলি সহজে নির্ণয় করা চলে ; অতএব লেখ-সাহায্যে অতি সহজে দুইটি সহ-সমীকরণের বীজ নির্ণয় করা যায় ; তবে সাধারণতঃ ছক-কাগজের সাহায্যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্কের মান স্থূলভাবেই (approximately) নির্ণয় করা চলে ; এইহেতু লৈখিক উপায়ে লব্ধ বীজ বীজ-গণিতীয় প্রণালীতে লব্ধ বীজের মত সাধারণতঃ নির্ভুল (accurate) হইবে না।

উদাহরণ 1. লেখ-সাহায্যে সমাধান কর :

$$3x+4y=24 \; ; \qquad \cdots \qquad (i)$$
$$2x-3y+1=0 \qquad \cdots \qquad (ii)$$

দেখা যাইতেছে যে,

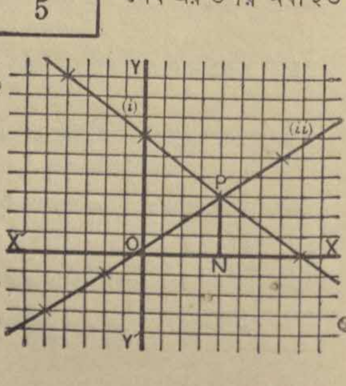
(*i*) যখন	$x=$	-4	0	8
	$y=$	9	6	0
(*ii*) যখন	$x=$	-5	-2	7
	$y=$	-3	-1	5

এই বিন্দুগুলি (i)এর লেখ-এর উপর অবস্থিত।

এই বিন্দুগুলি (ii)এর লেখ-এর উপর অবস্থিত।

এখন ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 1 বাহুকে একক লইয়া অষ্টম অধ্যায়ে প্রদত্ত প্রণালীতে (i) এবং (ii) এর লেখ অঙ্কিত করা হইল (চিত্র)। স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, ইহাদের ছেদবিন্দু Pএর স্থানাঙ্ক (4, 3).

অতএব $x=4$. এবং $y=3$ই নির্ণেয় বীজ।



উদাহরণ 2. লেখ দ্বারা সমাধান কর : $2x+3y=7$; ...(i)

$6x-6y=1.$ ...(ii)

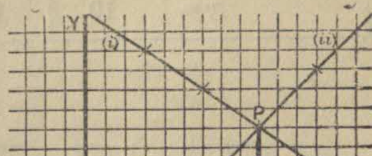
দেখা যাইতেছে যে,

(i) যখন	$x=$	$\frac{1}{2}$	1	2
	$y=$	2	$1\frac{2}{3}$	1
(ii) যখন	$x=$	$\frac{1}{6}$	1	2
	$y=$	0	$\frac{5}{6}$	$1\frac{5}{6}$

∴ এই বিন্দুগুলি (i)এর লেখ-এর উপর অবস্থিত।

এই বিন্দুগুলি হইতে (ii)এর লেখ পাওয়া যাইবে।

ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 6 বাহুকে একক ধরিয়া লেখদ্বয় অঙ্কিত করা হইল (চিত্র)।



দেখা যাইতেছে যে, ইহাদের ছেদবিন্দু Pএর x-স্থানাঙ্ক $=9$ বাহু $=\frac{9}{6}=1\frac{1}{2}$

[∵ 6 বাহু $=1$ একক];

y-স্থানাঙ্ক $=8$ বাহু $=\frac{8}{6}=1\frac{1}{3}$.

অতএব $x=1\frac{1}{2}$ এবং $y=1\frac{1}{3}$ই নির্ণেয় বীজ।

বিশেষ দ্রষ্টব্য। উভয় লেখ অঙ্কন করিতে **একই প্রকার** একক লইবে।

108. সরল সমীকরণের লৈখিক সমাধান।

উদাহরণ 1. লেখ দ্বারা সমাধান কর : $\frac{3x-2}{4}=8-\frac{2x}{3}$

প্রদত্ত সমীকরণের প্রত্যেক পক্ষকে yএর সমান ধরিলে $y=\frac{3x-2}{4}$ ...(i)

এবং $y8=-\frac{2x}{3}$. ...(ii)

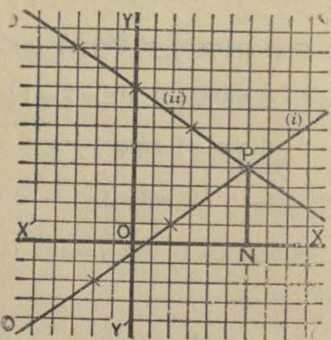
এই সমীকরণদ্বয় পাওয়া যাইবে। স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, ইহাদের লেখদ্বয়ের ছেদবিন্দুর x-স্থানাঙ্কই নির্ণেয় বীজ এবং y-স্থানাঙ্ক হইবে প্রদত্ত সমীকরণের যে-কোন পক্ষের মান।

অতএব (i) এবং (ii)এর লেখ অঙ্কিত করিয়া উহাদের ছেদবিন্দুর x-স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(i) যখন	$x=$	-2	2	6
	$y=$	-2	1	4
(ii) যখন	$x=$	-3	0	3
	$y=$	10	8	6

এই বিন্দুগুলি হইতে (i)এর লেখ পাওয়া যাইবে।

এই বিন্দুগুলি হইতে (ii)এর লেখ পাওয়া যাইবে।



ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 1 বাহুকে একক ধরিয়া লেখদ্বয় অঙ্কিত করা হইল। চিত্রে দেখা যাইতেছে যে, উহাদের ছেদবিন্দু Pএর x-স্থানাঙ্ক $=6$; অতএব $x=6$ই নির্ণেয় বীজ।

উদাহরণ 2. লেখ দ্বারা সমাধান কর : $x-3=2$.

প্রদত্ত সমীকরণের উভয় পক্ষকে yএর সমান ধরিয়া $y=x-3$ ...(i)

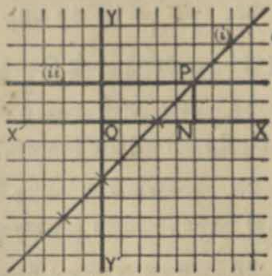
এবং $y=2$ ...(ii)

এর লেখ অঙ্কিত কর।

(i) যখন $x=$	-2	0	3
$y=x-3=$	-5	-3	0

স্পষ্টই দেখা যাইতেছে, যে, এই বিন্দুগুলি হইতে (i)এর লেখ পাওয়া যাইবে।

(ii)এর লেখ x-অক্ষের সমান্তরাল এবং মূলবিন্দু হইতে 2 একক দূরে অবস্থিত একটি সরলরেখা [68 অনু.]। ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 1 বাহুকে একক ধরিয়া লেখদ্বয় অঙ্কিত করা হইল (চিত্র)।



দেখা যাইতেছে যে, উহাদের ছেদবিন্দু Pএর x-স্থানাঙ্ক$=5$; অতএব $x=5$ই নির্ণেয় বীজ।

প্রশ্নমালা 53

লেখ-সাহায্যে সমাধান কর :

1. $3x+y=14$, $x-2y=0$
2. $x-3y=0$, $x+y=8$
3. $2x+3y=13$, $5x-2y=4$
4. $5x-3y=9$, $3x+5y=19$
5. $3y=2x+6$, $y=4x-8$
6. $2y=x+11$, $3y=2x+18$
7. $4x+3y=12$, $2x-y=16$
8. $3x+2y=6$, $y-3x=3$
9. $x-2y=4$, $2x+y=9$
10. $\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1$, $4x-3y=6$
11. $2x+3y=6$, $6x-5y=4$
12. $2x+3y=8$, $x+2y=5$
13. $5y+7x=6$, $5x+18=2y$
14. $2y=3x+15$, $3y=4x+12$
15. $3x+4y=12$, $4x+3y=12$
16. $x+5=2x+1$
17. $x-7=3$
18. $\frac{2x+3}{5}=\frac{3x+1}{4}$
19. $\frac{2x+5}{3}=\frac{3x+7}{5}$
20. $\frac{4-7x}{4}=\frac{2-5x}{3}$

21. $x+y=5$, $2x-y=1$ এবং $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$এর লেখ অঙ্কিত করিয়া দেখাও যে, উহারা প্রত্যেকে একই বিন্দু দিয়া যায়।

22. $2y=3(x-4)$ এবং $3y=1-5x$এর লেখ অঙ্কিত কর এবং উহাদের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

23. $\frac{x}{4}-\frac{y}{3}=1$, $4x+3y=41$ এবং $x+y=11$এর লেখগুলি অঙ্কিত করিয়া দেখাও যে, উহারা একই বিন্দুতে ছেদ করে।

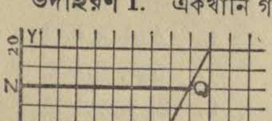
24. লেখ দ্বারা দেখাও যে, $3x+3y-2=0$, $4x+6y-1=0$ এবং $2x+4y-3=0$ এক বিন্দুগামী।

25. $y+x=0$, $5y=3x$ এবং $y=3x+12$এর লেখ অঙ্কিত কর এবং উহাদের দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজটির শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [এ. প্র., 1932]

26. লেখ দ্বারা $8x+5y=72$, $y=0$ এবং $y=2x$ দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক এবং ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

109. প্রশ্ন-সমাধানে লেখ-এর ব্যবহার।

উদাহরণ 1. একখানি গরুর গাড়ী ঘণ্টায় 2 মাইল বেগে চলে; এমন একটি লেখ অঙ্কিত কর, যাহার প্রত্যেক বিন্দুর ভুজ এবং কোটি দ্বারা যথাক্রমে গাড়ীটির গতির সময় এবং অতিক্রান্ত পথ সূচিত হয় এবং এই লেখ হইতে (i) গাড়ীটি 3 ঘণ্টায় কত পথ অতিক্রম করিবে এবং (ii) 18 মাইল যাইতে গাড়ীটির কত সময় লাগিবে, তাহা নির্ণয় কর।



মনে কর, গাড়ীটি x ঘণ্টায় y মাইল চলে; যেহেতু উহা 1 ঘণ্টায় 2 মাইল যায়, অতএব উহা x ঘণ্টায় $2x$ মাইল যাইবে। $\therefore$ $y=2x$; স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, ইহাই নির্ণেয় লেখটির সমীকরণ। x-অক্ষের উপরিস্থিত ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 1 বাহুকে 1 ঘণ্টা এবং y-অক্ষের উপরিস্থিত ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 1-বাহুকে 1 মাইল ধরিয়া একখানি ছক-কাগজের উপর $y=2x$এর লেখ OP অঙ্কিত করা হইল (চিত্র)। এই লেখটির যে-কোন বিন্দুর ভুজ এবং কোটি দ্বারা যথাক্রমে গাড়ীটির গতির সময়ে ঘণ্টার সংখ্যা এবং অতিক্রান্ত পথে মাইলের সংখ্যা সূচিত হইতেছে।

চিত্র হইতে দেখা যাইতেছে যে, (i) লেখটির যে-বিন্দুর ভুজ 3, উহার কোটি 6; অতএব গাড়ীটি 3 ঘণ্টায় 6 মাইল যায়;

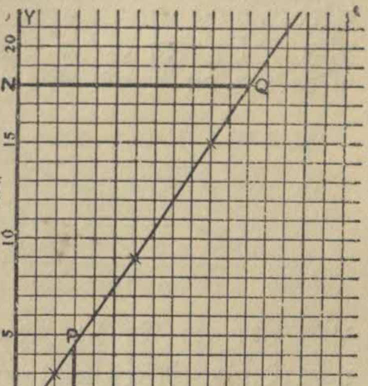
এবং (*ii*) যে বিন্দুর কোটি 18, উহার ভুজ 9 ; অতএব 18 মাইল যাইতে গাড়ীটির 9 ঘন্টা লাগিবে।

দ্রষ্টব্য। OP লেখটিকে গাড়ীটির গতি-লেখ (Motion Graph) বলে। দেখা যাইতেছে, সমবেগে গতিশীল কোন বস্তুর গতি-লেখ একটি সরলরেখা। কোন ব্যক্তি বা বস্তুর গতি-লেখ দেখিয়া বলা যায়, ব্যক্তি বা বস্তুটি কোন নিদ্দিষ্ট সময় পরে যথাস্থান হইতে কতদূরে থাকিবে, কিংবা কোন নির্দ্দিষ্ট স্থানে কত সময় পরে পৌঁছিবে।

উদাহরণ 2. 2টি আমের দাম 3 আনা ; এমন একটি লেখ অঙ্কিত কর, যাহার প্রত্যেক বিন্দুর ভুজ এবং কোটি দ্বারা যথাক্রমে আমের সংখ্যা এবং উহাদের মূল্যে আনার সংখ্যা সূচিত হয় এবং এই লেখ হইতে (*i*) 3টি আমের দাম কত এবং (*ii*) 1 টাকা 2 আনায় কয়টি আম পাওয়া যাইবে, তাহা নির্ণয় কর।

মনে কর, x আমের দাম $= y$ আনা ;
যেহেতু 2টি আমের দাম $= 3$ আনা ;
অতএব 1টি আমের দাম $= \frac{3}{2}$ আনা ;
$\therefore$ x আমের দাম $= \frac{3}{2}x$ আনা ;

অতএব $y = \frac{3x}{2}$ অর্থাৎ $2y = 3x$.



স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, ইহাই নির্ণেয় লেখটির সমীকরণ। x-অক্ষের উপরিস্থিত ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 1 বাহুকে 'একটি আম' এবং y-অক্ষের উপরিস্থিত ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 1 বাহুকে '1 আনা' ধরিয়া একখানি ছক-কাগজে $2y = 3x$-এর লেখ OP অঙ্কিত করা হইল (চিত্র)। এই লেখটির যে-কোন বিন্দুর ভুজ এবং কোটি দ্বারা যথাক্রমে আমের সংখ্যা এবং উহাদের মূল্যে আনার সংখ্যা সূচিত হইতেছে।

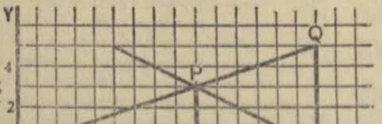
চিত্র হইতে দেখা যাইতেছে যে, (*i*) লেখটির যে বিন্দুর ভুজ $= 3$, উহার কোটি $= 4\frac{1}{2}$; অতএব 3টি আমের দাম $= 4\frac{1}{2}$ আনা।

(*ii*) 1 টাকা 2 আনা $= 18$ আনা। লেখটির যে-বিন্দুর কোটি 18, উহার ভুজ 12 ; অতএব 18 আনায় অর্থাৎ 1 টাকা 2 আনায় 12টি আম পাওয়া যাইবে।

দ্রষ্টব্য। OP লেখটিকে আমের **মূল্য-লেখ** (Price Graph) বলে।

উদাহরণ 3. 15 মাইল ব্যবধানে অবস্থিত দুইটি স্থান হইতে A এবং B একই সময়ে রওনা হইয়া যথাক্রমে ঘণ্টায় 3 মাইল এবং 2 মাইল বেগে পরস্পরের দিকে অগ্রসর হইতে লাগিল। কোথায় এবং কখন উহারা একত্র মিলিত হইবে, তাহা লেখ-সাহায্যে নির্ণয় কর।

একখানি ছক-কাগজের উপর x এবং y-অক্ষ অঙ্কিত কর। মনে কর, x-অক্ষের উপরিস্থিত ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের এক বাহু 1 মাইল এবং y-অক্ষের এক বাহু 1 ঘণ্টা সূচিত করে। x-অক্ষের উপর ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 15 বাহু ব্যবধানে অবস্থিত O এবং O′ বিন্দু লও। তাহা হইলে OO′ 15 মাইল সূচিত করিবে। মনে কর, A O হইতে ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে O′এর দিকে এবং B O′ হইতে ঘণ্টায় 2 মাইল বেগে Oএর দিকে চলিতেছে। স্পষ্টতঃ A-এর গতি-লেখ O-বিন্দুগামী একটি সরলরেখা হইবে এবং যেহেতু A 1 ঘণ্টায় 3 মাইল যায়; অতএব গতি-লেখটি (3, 1) বিন্দু দিয়াও যাইবে। কাজেই চিত্রে প্রদর্শিত OQ সরলরেখাই Aএর গতি-লেখ। এইরূপে দেখা যাইবে যে, O′P-ই Bএর গতি-লেখ। মনে কর, OQ এবং O′P P-বিন্দুতে ছেদ করিল; P-বিন্দু হইতে OO′এর উপর PN লম্ব অঙ্কিত কর। চিত্র হইতে দেখা যাইতেছে যে, PN তিন ঘণ্টা সূচিত করে।



অতএব রওনা হইবার 3 ঘণ্টা পরে A O হইতে ON দূরে এবং B O′ হইতে O′N দূরে থাকিবে, অর্থাৎ উহারা পরস্পর N-বিন্দু দ্বারা সূচিত স্থানে মিলিত হইবে; কিন্তু ON 9 মাইল সূচিত করে (চিত্র)। অতএব Aএর যাত্রাস্থান হইতে 9 মাইল দূরে এবং রওনা হইবার 3 ঘণ্টা পরে উহারা পরস্পর মিলিত হইবে।

প্রশ্নমালা 54

1. এক ব্যক্তি কোন নির্দ্দিষ্ট স্থান হইতে রওনা হইয়া ঘণ্টায় 5 মাইল বেগে চলিতে লাগিল। তাহার গতি-লেখ অঙ্কিত কর; রওনা হইবার 4 ঘণ্টা পরে সে কোথায় থাকিবে এবং $12\frac{1}{2}$ মাইল যাইতে তাহার কত সময় লাগিবে, তাহা গতি-লেখ দেখিয়া নির্ণয় কর।

2. 3 সের ময়দার দাম 7 আনা হইলে ময়দার মূল্য-লেখ অঙ্কিত কর এবং 5 সেরের মূল্য ও 15 আনায় কত সের ময়দা পাওয়া যাইবে, তাহা লেখ হইতে নির্ণয় কর।

3. 1 পাউণ্ড $13\frac{1}{3}$ টাকার সমান হইলে এমন একটি লেখ অঙ্কিত কর, যেন উহার যে-কোন বিন্দুর ভুজ দ্বারা শিলিং এবং কোটি দ্বারা টাকা সূচিত হয়। উক্ত লেখ হইতে 14 টাকায় কত শিলিং এবং 16 শিলিংএ কত টাকা তাহা নির্ণয় কর।

4. শতকরা বার্ষিক সুদের হার 5 টাকা ; এমন একটি লেখ অঙ্কিত কর, যেন উহার যে-কোন বিন্দুর ভুজ দ্বারা আসল এবং কোটি দ্বারা মোট সুদ সূচিত হয় ; 500 টাকার 1 বৎসরের সুদ এবং যে-আসলের বার্ষিক সুদ 15 টাকা, তাহা উক্ত লেখ হইতে নির্ণয় কর।

5. 54 গজ 50 মিটরের সমান। লেখ দ্বারা 70 মিটরের মান গজে নির্ণয় কর।

6. 1 মণ চাউলের দাম 8 টাকা হইলে 35 সেরের দাম লেখ দ্বারা নির্ণয় কর।

7. এক মজুর 30 দিন কাজ করিয়া 24 টাকা মজুরি পাইল। লেখ দ্বারা তাহার 20 দিনের মজুরি নির্ণয় কর।

8. কোন ব্যক্তি একটি স্থান হইতে ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে চলিতে আরম্ভ করিল। উহার 1 ঘণ্টা পরে অপর এক ব্যক্তি তাহাকে ধরিবার জন্য ঘণ্টায় 5 মাইল বেগে চলিতে লাগিল। লেখ দ্বারা নির্ণয় কর, উহারা কখন এবং কোথায় পরস্পর মিলিত হইবে।

9. দুই ব্যক্তি 21 মাইল দূরবর্ত্তী দুইটি স্থান হইতে একই সময়ে রওনা হইয়া যথাক্রমে ঘণ্টায় 4 এবং 3 মাইল বেগে পরস্পরের দিকে অগ্রসর হইতে লাগিল। কখন এবং কোথায় তাহারা পরস্পর একত্র হইবে, তাহা লেখ-সাহায্যে নির্ণয় কর।

10. একখানি ট্রেন A স্টেশন হইতে ঘণ্টায় 15 মাইল বেগে B স্টেশনের দিকে চলিতে আরম্ভ করিল। ইহার 1 ঘণ্টা পরে B স্টেশন হইতে একখানি মালগাড়ী ঘণ্টায় 8 মাইল বেগে A স্টেশনের দিকে রওনা হইল। যদি A এবং B স্টেশনের দূরত্ব 61 মাইল হয়, তবে কখন এবং কোথায় উহারা মিলিত হইবে, লেখ দ্বারা নির্ণয় কর।

11. কলিকাতা হইতে একখানি ট্রেন বেলা 12টার সময় ঘণ্টায় 30 মাইল বেগে এবং অপর একখানি ট্রেন বেলা 3টার সময় ঘণ্টায় 40 মাইল বেগে একই লাইনে রওনা হইল। কোথায় এবং কখন ইহারা মিলিত হইবে, তাহা লেখ দ্বারা নির্ণয় কর।

12. একখানি ট্রেন A স্টেশন হইতে রওনা হইয়া ঘণ্টায় 15 মাইল বেগে যাইতে লাগিল। যদি উহা প্রত্যেক স্টেশনে 20 মিনিট করিয়া থামে এবং যদি স্টেশনগুলির দূরত্ব পরস্পর 10 মাইল হয়, তাহা হইলে উহার গতি-লেখ অঙ্কিত কর। যদি একখানি মালগাড়ি কোথাও না থামিয়া ঘণ্টায় 10 মাইল বেগে একই লাইনে চলিতে থাকে এবং উহা পূর্ব্বোক্ত ট্রেনখানির সহিত A স্টেশন হইতে একই সময়ে রওনা হয়,

তাহা হইলে উহারও গতি-লেখ অঙ্কিত কর এবং লেখদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা দেখাও, কখন এবং কোন্ স্থানে উহারা আবার মিলিত হইবে।

13. কোন পরিবারের মাসিক খরচের এক অংশ ঠিক থাকে এবং অপর অংশ লোকসংখ্যার উপর নির্ভর করে। লোকসংখ্যা 15 হইতে 20 জন হওয়ায় খরচ 125 টাকা হইতে 150 টাকা হইল। প্রতিব্যক্তির জন্য কত খরচ হয় এবং মাসিক খরচের যে অংশ ঠিক থাকে, তাহার পরিমাণ লেখ-সাহায্যে নির্ণয় কর।

14. আয়ের একটি অংশের উপর আয়কর দিতে হয় না। একব্যক্তির আয় 3000 টাকা হইতে 5000 টাকা হওয়ায় তাহাকে 46 টা. 14 আনার পরিবর্তে 109 টা. 6 আনা আয়কর দিতে হইল। আয়করের হার এবং যে অংশের উপর আয়কর দিতে হয় না, তাহার পরিমাণ লেখ দ্বারা নির্ণয় কর।

বিবিধ প্রশ্নমালা (গ)

I

1. $a=8, b=3, x=4, y=1$ হইলে

$$\frac{(y+1)b^x a^y}{2x+\sqrt[b]{a-y(b+x)}}-a^2b+\sqrt[b]{3a+b}\; x^2$$এর মান নির্ণয় কর।

2. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : (i) $2x^2-13x+15$; (ii) $729x^6-64y^6$.

3. $6x^5-5x^4+7x^3-8x^2-19x+7$কে $2x^3-3x^2+5x-7$ দ্বারা ভাগ কর।

4. সরল কর : $\dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y^2}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{z^2}{(z-x)(z-y)}$.

5. সমাধান কর : $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5, \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=3.$

6. $2x^3+7x^2+2x-3$ এবং $3x^3+8x^2-2x+3$এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

7. দুইটি অঙ্কযুক্ত একটি সংখ্যা উহার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির চারি গুণ। সংখ্যাটির সহিত 18 যোগ করিলে উহার অঙ্ক দুইটি স্থান-বিনিময় করে ; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

8. 'সমীকরণের লেখ' কাহাকে বলে ? $y=2x+6$এর লেখ অঙ্কিত কর এবং ইহা অক্ষদ্বয়কে যে যে বিন্দুতে ছেদ করে, উহাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

II

1. সরল কর : $\dfrac{(ac+bd)^2-(ad+bc)^2}{(a+b)(c+d)}.$

2. সমাধান কর : $\frac{(4+x)(5-x)}{(2+x)(7-x)}=1$.

3. $a:b::c:d$ হইলে প্রমাণ কর যে, $(a^2+c^2)(b^2+d^2)=(ab+cd)^2$.

4. $a^4-6a^3b+13a^2b^2-12ab^3+4b^4$ এবং $a^4+2a^3b-3a^2b^2-4ab^3+4b^4$এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

5. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)$কে দুইটি বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর।

6. $x^4+5x^3+7x^2+cx-2c$, x^2+3x+2 দ্বারা বিভাজ্য হইলে cএর মান নির্ণয় কর।

7. লেখ-সাহায্যে সমাধান কর : $x=2y+5$,

$$3x-4y=22$$

8. $a^2(x^6+2x^3+1)+2ab(x^5+x^4+x^2+x)+b^2(x^4+2x^3+x^2)$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

III

1. (i) $a=1, b=2, c=3$ হইলে

$$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{c}{a+b}\right)\div\frac{ac}{(a+b)(b+c)}=\text{কত ?}$$

(ii) $x=\frac{a-b}{a+b}$ হইলে $\frac{1-x}{1+x}$এর মান নির্ণয় কর।

2. $2a^3-5a^2+3a+5$কে $3a^2-6a+4$ দ্বারা গুণ কর এবং $a=1$ ধরিয়া গুণফলের বিশুদ্ধতা পরীক্ষা কর।

3. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : (i) $6x^2+5x-6$.

(ii) $x^3+y^3+6xy-8$.

4. (i) সমাধান কর : $\frac{x-p}{q}+\frac{x-q}{p}=2$.

(ii) $ABCD$ একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ; ইহার A, B, C এবং D বিন্দুস্থ কোণগুলি যথাক্রমে $2x+13$, $2y-18$, $y+31$, $3x-29$ ডিগ্রী হইলে x এবং yএর মান নির্ণয় কর।

5. $6x^4-13x^3+6x^2$ এবং $8x^4-36x^3+54x^2-27x$এর গ. সা. গু. কত ?

6. $x:y::y:z$ হইলে দেখাও যে,

$$xyz(x+y+z)^3=(yz+zx+xy)^3.$$

7. $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+12$এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

8. (0, 4), (3, 0) এবং (3, 4) বিন্দুগুলি ছক-কাগজের উপর অঙ্কিত কর; উহাদিগকে যুক্ত করিলে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, উহার ক্ষেত্রফল ও বাহুগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

IV

1. (i) $v=u+ft$ হইলে দেখাও যে, $ut+\frac{1}{2}ft^2=\dfrac{v^2-u^2}{2f}$.

(ii) $\dfrac{1}{v}-\dfrac{1}{f}=\dfrac{1}{f}-\dfrac{1}{u}$ হইলে fএর মান u এবং vএর সাহায্যে প্রকাশ কর।

2. দেখাও যে, $x^3-x^2-30x+72$ $x-4$ দ্বারা বিভাজ্য; ইহার সাহায্যে প্রথমোক্ত রাশিমালাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

3. সমাধান কর:
$$y+z=27;$$
$$z+x=32;$$
$$x+y=25.$$

4. সরল কর: $\dfrac{x^3-a^3}{x^3+b^3}\times\dfrac{x^2+ax+bx+ab}{x^4+x^2a^2+a^4}\div\dfrac{x^2-a^2}{x^3+a^3}$.

5. $x:a=y:b=z:c$ হইলে প্রমাণ কর যে,

(i) $\dfrac{x^3}{a^2}+\dfrac{y^3}{b^2}+\dfrac{z^3}{c^2}=\dfrac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}$;

এবং (ii) $(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)=(ax+by+cz)^2$.

6. $x^4-x^3+2x^2+x+3$ এবং x^4+2x^3-x-2এর গ.সা. গু. নির্ণয় কর।

7. $2x+3y=12$ এবং $x-y=1$এর লেখ অঙ্কিত কর এবং উহাদের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

8. কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণের সমষ্টি তৃতীয় কোণের সমান; উহার বৃহত্তম কোণটি কত?

V

1. যদি $x=\dfrac{1+z}{1-z}$, $y=\dfrac{1-z}{1+z}$ হয়, দেখাও যে,
$$\frac{1+x}{1-y}+\frac{1-x}{1+y}=z+\frac{1}{z}+2.$$

2. সমাধান কর: (i) $x(x+1)=(x+1)(x+3)$

(ii) $x=2y+6$.
$y=2x-3$.

3. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : (i) $(7x+8)^2-2(7x+8)-15.$
(ii) $x(x-4)-y(y-4).$

4. সরল কর : $\dfrac{a^2+bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2+ca}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2+ab}{(c-a)(c-b)}.$

5. x^3+2x^2-x-2 এবং x^3+x^2-4x-4এর গ. সা. গু. এবং ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

6. $lx=my=nz$ হইলে দেখাও যে,

$$\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy}=\frac{mn}{l^2}+\frac{nl}{m^2}+\frac{lm}{n^2}.$$

7. একখানি ট্রেন কলিকাতা হইতে দুপুর 12টায় ছাড়ে এবং ঘণ্টায় 30 মাইল বেগে চলে ; অপর একখানি ট্রেন কলিকাতা হইতে বিকাল 3টায় ছাড়ে এবং পূর্ব্বোক্ত পথে ঘণ্টায় 40 মাইল বেগে চলে। লেখ-সাহায্যে নির্ণয় কর, কখন এবং কোথায় উহারা একত্র হইবে।

VI

1. $x=4\cdot9\dot{8}$, $y=5\cdot2\dot{8}$ এবং $z=7\cdot1\dot{8}$ হইলে
$x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$এর মান নির্ণয় কর।

2. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : (i) $(2x-3y)^3+(3y-z)^3+(z-2x)^3.$
(ii) $x^4+4.$

3. সমাধান কর : (i $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5,$
$\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}=12.$
(i $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+4}=0.$

4. সরল কর : $\dfrac{x}{1+\dfrac{x}{1-x+\dfrac{x}{1+x}}}\div\dfrac{1+x+x^2}{1+3x+3x^2+2x^3}.$

5. $x:(b-c)=y:(c-a)=z:(a-b)$ হইলে দেখাও যে,
(i) $ax+by+cz=0$;
এবং (ii) $x(b+c)+y(c+a)+z(a+b)=0.$

6. (i) প্রমাণ কর যে, দুইটি রাশির গুণফল উহাদের গ. সা. গু. এবং ল. সা. গু.র গুণফলের সমান।

(ii) x^3-3x+2 এবং $2x^3-4x^2+6x-4$এর গ. সা, গু. নির্ণয় কর।

7. $4x^4+8x^3+8x^2+4x+1$এর বর্গমূল নির্ণয় কর এবং ইহা হইতে 48841এর বর্গমূল লিখ।

VII

1. $x=\dfrac{a+b}{1-ab}$ এবং $y=\dfrac{a-b}{1+ab}$ হইলে $\dfrac{x+y}{1-xy}$ এর মান নির্ণয় কর।

2. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

(i) $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$.

(ii) $a^2b^2+1-a^2-b^2$.

3. দেখাও যে, $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)+1$ একটি পূর্ণবর্গ রাশি।

4. সরল কর :

$$\frac{b-c}{x^2-(b+c)x+bc}+\frac{c-a}{x^2-(c+a)x+ca}+\frac{a-b}{x^2-(a+b)x+ab}.$$

5. সমাধান কর : (i) $\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}=3$,

$$\frac{5}{x}+\frac{6}{y}=48.$$

(ii) $\dfrac{1}{x+5}+\dfrac{1}{x+10}=\dfrac{2}{x}$.

6. কোন ভগ্নাংশের হর লব অপেক্ষা 1 বেশী ; হরে 9 যোগ দ্বারা উৎপন্ন ভগ্নাংশ লব হইতে 6 বিয়োগ দ্বারা উৎপন্ন ভগ্নাংশের সমান হইলে প্রথমোক্ত ভগ্নাংশটি কত ?

7. $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=1$এর লেখ অঙ্কিত কর এবং উহার যে-অংশ অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী, তাহার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

VIII

1. সরল কর : $\dfrac{8(x+y+z)^3-(y+z)^3-(z+x)^3-(x+y)^3}{3(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)}$.

2. (i) সমাধান কর : $\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{2}{x-4}+\dfrac{1}{x-6}=0$.

(ii) $a^x=b$, $b^y=c$ এবং $c^z=a$ হইলে দেখাও যে, $xyz=1$.

3. $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2$ হইলে দেখাও যে,

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=1.$$

4. $3x^4+20x^3-3x^2+6x+1$ এবং $x^4+7x^3-x^2-14x-2$এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

5. $x:a=y:b=z:c$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$$(yz+zx+xy)(a^2+b^2+c^2)^2=(bc+ca+ab)(ax+by+cz)^2.$$

6. $x-d$, ax^3+bx+c এবং bx^2+cx+a রাশিমালাদ্বয়ের একটি সাধারণ উৎপাদক ; প্রমাণ কর যে,

$$\{a(a^2-b^2)+bc^2\}\{ac^2-b(a^2-b^2)\}=\{c(a^2+b^2)\}^2.$$

7. 10 এবং 100এর মধ্যবর্তী কোন সংখ্যাকে উল্টাইয়া লিখিলে উহার মান 45 বৃদ্ধি পায় এবং অঙ্কগুলির সমষ্টির সহিত 7 যোগ করিলে যোগফল 18 হয়। সংখ্যাটি কত ?

IX

1. $x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $y=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, $z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ হইলে দেখাও যে, $a(x+yz)=b(y+zx)=c(z+xy)$.

2. সমাধান কর : (i) $2.3^{x-1}=5.3^{x-2}+3$.

(ii) $\frac{x}{2x-a}+\frac{x}{2x-b}=1$.

3. c কত হইলে $x^4+2x^3+(2c+1)x^2+20x+c^2$ একটি পূর্ণবর্গ রাশি হইবে ?

4. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : (i) $x^3-6x^2+11x-6$.

(ii) $a^3-6ab^2+9b^3$.

5. সরল কর : (i) $\frac{z^2-(x-y)^2}{(y+z)^2-x^2}+\frac{x^2-(y-z)^2}{(z+x)^2-y^2}+\frac{y^2-(z-x)^2}{(x+y)^2-z^2}$.

(ii) $\frac{a^2-bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2-ca}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2-ab}{(c-a)(c-b)}$.

6. $6x^2-13xa+6a^2$, $6x^2+11xa-10a^2$, $6x^2+2xa-4a^2$ এবং $2x^2+7xa+5a^2$এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

7\. লেখ-সাহায্যে সমাধান কর : $2y=3x+15$
$3y=4x+12.$

X

1\. সরল কর :

$$\frac{x+3y}{4(x+y)(x+2y)}+\frac{x+2y}{(x+y)(x+3y)}-\frac{x+y}{4(x+2y)(x+3y)}.$$

2\. $\frac{1}{x}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ হইলে দেখাও যে,

$$\frac{bc}{(x-b)(x-c)}+\frac{ca}{(x-c)(x-a)}+\frac{ab}{(x-a)(x-b)}=0.$$

3\. সমাধান কর : (i) $\frac{x-b}{x-a}-\frac{x-a}{x-b}=\frac{2(a-b)}{x-(a+b)}$

(ii) $\frac{10}{x+y}+\frac{1}{x-y}=3.$

$\frac{5}{x+y}+\frac{3}{x-y}=4.$

4\. (i) $3(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2$ হইলে দেখাও যে, $a=b=c.$

(ii) $4(a^2+b^2+c^2+d^2)=(a+b+c+d)^2$ হইলে দেখাও যে,

$a=b=c=d.$

5, $a^4+b^4+c^4+d^4-2(a^2+c^2)(b^2+d^2)+2a^2c^2+2b^2d^2$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

6\. তিন অঙ্ক-বিশিষ্ট কোন সংখ্যাকে উল্টাইয়া লিখিলে উহার মানের পরিবর্ত্তন হয় না ; অঙ্কগুলির সমষ্টি 17 এবং উহাদের প্রথম দুইটির অন্তর 4 ; সংখ্যাটি কত ?

7\. $2s=a+b+c$ হইলে দেখাও যে,

$16s(s-a)(s-b)(s-c)$
$=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4.$

XI

1\. লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ কর : $\frac{3x^4+11x^3+13x^2+7x+2}{6x^4+25x^3+25x^2+13x+3}$

2\. $a+b+c=0$ হইলে দেখাও যে,

$$\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)=9.$$

3. $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$কে $a+b+c$ দ্বারা গুণ কর এবং $a=337, b=331, c=332$ হইলে গুণফলের মান নির্ণয় কর।

4. $(x+y+z)(yz+zx+xy)-xyz$কে $y+z$ দ্বারা ভাগ কর।

5. সমাধান কর : $a^x+b^y+c^z=a+b+c,$

$$a^{x+1}+b^{y+1}+c^{z+1}=a^2+b^2+c^2.$$
$$la^x+mb^y+nc^z=la+mb+nc.$$

6. $(2y+2z-x) : a=(2z+2x-y) : b=(2x+2y-z) : c$ হইলে দেখাও যে, $x : (2b+2c-a)=y : (2c+2a-b)=z : (2a+2b-c).$

7. (5, 2), (3, 7) এবং (9, 4) বিন্দুগুলি অঙ্কিত কর এবং উহাদিগকে সরলরেখা দ্বারা সংযুক্ত করিলে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, তাহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

XII

1. সরল কর :

(i) $\dfrac{1}{x(x-y)(x-z)}+\dfrac{1}{y(y-z)(y-x)}+\dfrac{1}{z(z-x)(z-y)}.$

(ii) $\dfrac{1}{abx}+\dfrac{1}{a(a-b)(x-a)}+\dfrac{1}{b(b-a)(x-b)}.$

2. লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ কর : $\dfrac{2x^4+5x^3-2x-5}{6x^4+13x^3-3x^2-x-15}.$

3. $1+4x+4x^2-16x^4$ এবং $1+2x-8x^3-16x^4$এর ল.সা.গু. নির্ণয় কর।

4. দেখাও যে,

$$\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)^2+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2=4+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right).$$

5. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : (i) $2a^3-5a^2b+ab^2+2b^3.$

(ii) $4a^2-4ab+b^2+14a-7b-30.$

6. সমাধান কর : $(x+7)(y-3)+7=(y+3)(x-1)+5,$

$$5x-11y+35=0.$$

7. $3x+y=13,\quad 3y-x=9$ এবং $x+7y=11$এর লেখ অঙ্কিত কর এবং উহাদের দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

XIII

1. সরল কর :

$$\left\{\frac{1}{\frac{4}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}}}\right\}^2-\left(\frac{3t-t^3}{1-3t^2}\right)^2+(1+t^2)^2-2t^2-2.$$

2. $x(1+y^2)(1+z^2)+y(1+z^2)(1+x^2)+z(1+x^2)(1+y^2)+4xyz$কে $1+xy+xz+yz$ দ্বারা ভাগ কর।

3. সমীকরণ কাহাকে বলে? প্রমাণ কর যে, কোন সরল সমীকরণের একটিমাত্র বীজ থাকে।

সমাধান কর :

$120x-4[5x-2\{6x+7(x-8)\}]=16-4[3x-2\{x-6(x-1)\}].$

4. (i) যদি $a:b::c:d$ হয়, প্রমাণ কর যে,

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2:(\sqrt{c}+\sqrt{d})^2::a-b:c-d.$$

(ii) যদি $(3a+4b):(5a+6b)=(3c+4d):(5c+6d)$ হয়, প্রমাণ কর যে, $a:b::c:d.$

5. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(bz-cy)^2-(cx-az)^2-(ay-bx)^2$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

6. $x=b+c-2a,\ y=c+a-2b,\ z=a+b-2c$ হইলে $x^3+y^3+z^3-3xyz$এর মান নির্ণয় কর।

7. এক ব্যক্তি প্রতিডজন 4 আনা-দরে কতকগুলি লেবু ক্রয় করিয়া দেখিতে পাইল যে, উহাদের মধ্যে 50টি নষ্ট হইয়াছে। অবশিষ্ট লেবুগুলি 9টি 4 আনা-দরে বিক্রয় করাতে তাহার মোট 6টা. 4 আনা লাভ হইল। সে কত লেবু ক্রয় করিয়াছিল?

XIV

1. সরল কর :

$(16x^5-20x^3+5x)^2+(1-x^2)\{16(1-x^2)^2-20(1-x^2)+5\}^2.$

2. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

(i) $(b+c-2a)^3+(c+a-2b)^3+(a+b-2c)^3.$

(ii) $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y).$

3. সমাধান কর :

(i) $$\frac{1+\frac{4bx}{a}}{bx}=\frac{\frac{4a}{bx}+1}{a}.$$

(ii) $x+7y+5z=0,$
$5x+2y+3z=0,$
$2x+3y+z=5.$

4. অভেদ কাহাকে বলে ?

দেখাও যে, $\frac{p}{q}+\frac{q}{r}+\frac{r}{p}-\left(\frac{p}{r}+\frac{q}{p}+\frac{r}{q}\right)=\frac{q-r}{p}\cdot\frac{r-p}{q}\cdot\frac{p-q}{r}.$

5. $x^4-8x^3+28x^2-53x+42$ এবং $x^4+6x^3-42x^2+129x-154$-এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

6. aএর মান কত হইলে $4x^4-12x^3+25x^2-24x+a$ একটি পূর্ণবর্গ রাশি হইবে ?

7. পিতা এবং পুত্রের বয়সের অন্তর 30 বৎসর। একবৎসর পূর্ব্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের চারিগুণ ছিল। পিতার বর্তমান বয়স কত ? কখন পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হইবে ?

XV

1. সরল কর : $1+\frac{a}{x-a}+\frac{bx}{(x-a)(x-b)}+\frac{cx^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}$

2. $2x^4-2x^3+x^2+3x-4$ এবং $4x^4-2x^3+3x-9$এর গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

3. $a+b+c+d=0$ হইলে দেখাও যে,
$(abc+bcd+cda+dab)^2=(bc-ad)(ca-bd)(ab-cd).$

4. (i) $a^4+a^2b^2+b^4$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

(ii) $(x+y+z)^4+\{(x+y)^2-z^2\}^2+(x+y-z)^4$কে $(x+y)^2+3z^2$ দ্বারা ভাগ কর।

5. যদি $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$ হয়, দেখাও যে,
$$x:y:z=a:b:c.$$

6. সমাধান কর :
$$a^3(b-c)(x-a)+b^3(c-a)(x-b)+c^3(a-b)(x-c)=0.$$

7. লেখ-সাহায্যে সমাধান কর : $2x+3y-8=0$
$x+2y-5=0.$

XVI

1. যদি $x^2(y+z)=a,\ y^2(z+x)=b,\ z^2(x+y)=c$ এবং $xyz=d$ হয়,
(i) $(x+y+z)(yz+zx+xy)$ এর মান নির্ণয় কর ;
এবং (ii) দেখাও যে, $abc=d^2(a+b+c)+2d^3$.

2. যদি $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3$ এবং n যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা হয়, দেখাও যে,

$$(a+b+c)^{2n+1}=a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}.$$

3. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : (i) $(1+xy)^2-x^2-y^2-2xy.$
(ii) $(ab+1)^4-4ab(ab+1)^2-(a^2-b^2)^2.$

4. $x:a=y:b=z:c$ হইলে দেখাও যে,

$$\frac{x^3+a^3}{x^2+a^2}+\frac{y^3+b^3}{y^2+b^2}+\frac{z^3+c^3}{z^2+c^2}=\frac{(x+y+z)^3+(a+b+c)^3}{(x+y+z)^2+(a+b+c)^2}.$$

5. (i) x^9-1কে $x-1$ দ্বারা ভাগ কর।
(ii) গুণফল নির্ণয় কর :

$$(x^8+x^7+\cdots+x+1)(x^8-x^7+\cdots-x+1).$$

6. সমাধান কর :

(i) $$\frac{x^2-a^2}{x+a}+\frac{x^2-b^2}{x+b}+\frac{x^2-c^2}{x+c}=\frac{b^2-c^2}{b-c}+\frac{c^2-a^2}{c-a}+\frac{a^2-b^2}{a-b}.$$

(ii) $$\frac{y+z-x}{b+c-a}=\frac{z+x-y}{c+a-b}=\frac{x+y-z}{a+b-c}=1.$$

7. এক ব্যবসায়ী একটি ঘড়ী 10% এবং অপর একটি 20% লাভে বিক্রয় করিয়া মোট 138 টাকা পাইল। উভয়কে 15% লাভে বিক্রয় করিলে মোট লাভের পরিমাণ পূর্ব্বের সমান থাকিত। ঘড়ী দুইটির বিক্রয়-মূল্য নির্ণয় কর।

XVII

1. সরল কর : $$\frac{a^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}{a\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}.$$

2. $a^3+b^3+c^3=3abc$ হইলে প্রমাণ কর যে,

হয় $a+b+c=0$, না হয় $a=b=c$.

3. যদি $x+y+z=a$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{b}$ এবং $(y+z)(z+x)(x+y)=c^3$ হয়, xyzএর মান a, b, c দ্বারা প্রকাশ কর।

4. লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত কর : $\frac{3x^4+17x^3+27x^2+7x-6}{6x^4+7x^3-27x^2-17x-3}$.

5. যদি $\frac{b-c}{1+bc}+\frac{c-a}{1+ca}+\frac{a-b}{1+ab}=0$ হয়, দেখাও যে, a, b এবং c এই রাশি তিনটির অন্ততঃ দুইটি পরস্পর সমান।

6. $(a+1)x^2+(2a+6)xy+(a+6)y^2$ একটি পূর্ণবর্গ রাশি হইলে aএর মান এবং রাশিমালাটির বর্গমূল নির্ণয় কর।

7. $2x-3y=6$ এবং $3x+2y=9$এর লেখ অঙ্কিত কর এবং উহাদের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক লিখ।

XVIII

1. যদি $x=(b-c)(a-l)$, $y=(c-a)(b-l)$, $z=(a-b)(c-l)$ হয়, $x^3+y^3+z^3-3xyz$র মান নির্ণয় কর।

2. দুইটি বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর :

(i) $(a^2+b^2)(x^2+y^2)$কে ;

(ii) $13x^2+16a^2+9b^2+24xa-12xb$কে।

3. $x+y+z=0$ হইলে দেখাও যে,

$$\frac{1}{y^2+z^2-x^2}+\frac{1}{z^2+x^2-y^2}+\frac{1}{x^2+y^2-z^2}=0.$$

4. গুণফল নির্ণয় কর :

$(1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots+x^{2n})(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{2n})$.

5. সমাধান কর :

$(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2=a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2$.

6. $ad=bc$ হইলে দেখাও যে, $(a+c)^n(b^n+d^n)=(b+d)^n(a^n+c^n)$.

7. দেখাও যে, তিনটি ক্রমিক অযুগ্ম সংখ্যার বর্গের সমষ্টির সহিত 1 যোগ করিলে লব্ধ যোগফল 12 দ্বারা বিভাজ্য হইবে, কিন্তু উহা 24 দ্বারা বিভাজ্য হইবে না।

XIX

1. $2s=a+b+c$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$$8(s-a)(s-b)(s-c)+2abc$$
$$=a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2).$$

2. সরল কর :

$$(1-b)(1-b-a)(1+2b-2a)+b(b-a)(3-2b-2a).$$

3. সমাধান কর : (i) $\dfrac{(x+1)(x+3)}{x+5}=\dfrac{(x+2)(x+4)}{x+7}$

(ii) $\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{3}{x+y}=1,$

$\dfrac{3}{x-y}-\dfrac{4}{x+y}=\dfrac{5}{6}.$

4. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $6x^2-3y^2+7xy+19x+y+10.$

5. $4x^6-12x^5+13x^4-22x^3+25x^2-8x+16$এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

6. $3x^3-5x^2+5x-2$ এবং $2x^4-2x^3+3x^2-x+1$এর গ. সা. গু. এবং ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

7. কোন্ সংখ্যা 3, 5, 7 এবং 10এর প্রত্যেকটির সহিত যোগ করিলে যোগফলগুলি সমানুপাতী হইবে।

XX

1. সরল কর :

$$\left\{\frac{b^3-c^3}{bc(b-c)}+\frac{c^3-a^3}{ca(c-a)}+\frac{a^3-b^3}{ab(a-b)}\right\}\div\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\div\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}\right).$$

2. $x=na,\ y=(n-1)b,\ z=(n-3)c$ এবং $n=\dfrac{1+b^2+3c^2}{a^2+b^2+c^2}$ হইলে $x^2+y^2+z^2$এর মান a, b এবং c দ্বারা প্রকাশ কর।

3. (i) m এবং n অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে প্রমাণ কর যে, $x^m\times x^n=x^{m+n}$;

(ii) সরল কর : $\left(\dfrac{x^m}{x^n}\right)^{m+n}\times\left(\dfrac{x^n}{x^l}\right)^{n+l}\times\left(\dfrac{x^l}{x^m}\right)^{l+m}.$

4. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : (i) $2(ab+cd)-a^2-b^2+c^2+d^2.$

(ii) $(1-yz-zx-xy)^2+(x+y+z-xyz)^2.$

5. সমাধান কর :

(i) $\dfrac{bc(ax-1)}{b+c}+\dfrac{ca(bx-1)}{c+a}+\dfrac{ab(cx-1)}{a+b}=a+b+c.$

(ii) $\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}-\dfrac{3}{z}=0,$

$\dfrac{5}{x}-\dfrac{6}{y}+\dfrac{2}{z}=0,$

$2x+3y+4z=3.$

6. (i) $a:b=c:d=e:f$ হইলে প্রমাণ কর যে,

প্রদত্ত প্রত্যেকটি অনুপাত $=\left(\dfrac{pa^n+qc^n+re^n}{pb^n+qd^n+rf^n}\right)^{\frac{1}{n}}.$

(ii) $(a+b):(b+c)::(c+d):(d+a)$ হইলে দেখাও যে,
হয় $a=c$, না হয় $a+b+c+d=0.$

7. কোন ব্যক্তি একটি জিনিষ ক্রয় করিয়া উহা 6% লাভে বিক্রয় করিল। যদি সে উহা 4% কম মূল্যে ক্রয় করিত এবং 1 টা. 3 আ. বেশী মূল্যে বিক্রয় করিত, তাহা হইলে তাহার 12% লাভ হইত। জিনিষটির ক্রয়-মূল্য কত?

XXI

1. গুণফল নির্ণয় কর : $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8).$

2. $(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)-(a+bc)(b+ca)(c+ab)$কে $1-a^2-b^2-c^2-2abc$ দ্বারা ভাগ কর।

3. $x^3-x^2-14x+24$, x^3-2x^2-5x+6 এবং x^2-4x+3এর ল.সা.গু. নির্ণয় কর।

4. $x=\dfrac{y}{y+1}$ এবং $y=\dfrac{a-2}{2}$ হইলে $x(y+2)+\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$ এর মান a দ্বারা প্রকাশ কর।

5. সমাধান কর : (i) $\dfrac{6}{7-\dfrac{6}{7-\dfrac{6}{7-x}}}=1.$

(ii) $2^x=8^{y+1},$

$9^y=3^{x-9}.$

6. $(2x+1)(2x+3)(2x+5)(2x+7)+16$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

7. 'সমীকরণের লেখ' কাহাকে বলে?

$x+2y=6$ এবং $x+y+1=0$এর লেখ অঙ্কিত কর ও তদ্দ্বারা সমীকরণদ্বয়ের সমাধান নির্ণয় কর।

XXII

1. যদি $x=\frac{a+1}{a-1}$, $y=\frac{b+1}{b-1}$, $z=\frac{c+1}{c-1}$ হয়, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}{(yz+1)(zx+1)(xy+1)}=\frac{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}{(bc+1)(ca+1)(ab+1)}.$$

2. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর: (i) $x^8+3x^6-8x^4+3x^2+1$;

(ii) $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$.

3. সরল কর:

(i) $$\frac{x^4-(x-1)^2}{(x^2+1)^2-x^2}+\frac{x^2-(x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2-1}+\frac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2}.$$

(ii) $$\frac{x}{x+\frac{1}{1+\frac{x+3}{2-x}}}.$$

4. সমাধান কর: $\frac{3x^2+4x+1}{6x^2+8x+5}=\frac{x^2+2x+5}{2x^2+4x+11}$.

5. $4x^5-209x^2+15$ এবং $15x^5-209x^3+4$এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

6. প্রমাণ কর যে,

$$\frac{(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5}{5}$$
$$=\frac{(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3}{3}\times\frac{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2}{2}.$$

7. কিছু অর্থ কতকগুলি ভিক্ষুককে দান করিতে গিয়া দেখা গেল যে, প্রত্যেককে 1 আ. 7 পাই দিতে গেলে 1 টা. 11 আনা ধার করিতে হয়; কিন্তু প্রত্যেককে 1 আ. 5 পাই-হিসাবে দিলে 8 আ. 6 পাই অবশিষ্ট থাকে। ভিক্ষুকের সংখ্যা কত?

XXIII

1. m এবং n অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে প্রমাণ কর যে, $(a^m)^n = a^{mn}$;

সরল কর : (i) $\left\{(a^m)^{m-\frac{1}{m}}\right\}^{\frac{1}{m+1}}$.

(ii) $\dfrac{a^{x(y-z)}}{a^{(x-z)y}} \div \left(\dfrac{a^y}{a^x}\right)^z$.

2. $2s = a+b+c$ হইলে দেখাও যে,

$$a(b-c)(s-a)^2 + b(c-a)(s-b)^2 + c(a-b)(s-c)^2 = 0.$$

3. সরল কর :

$$\frac{1}{\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(1-\frac{c}{a}\right)} + \frac{1}{\left(1-\frac{c}{b}\right)\left(1-\frac{a}{b}\right)} + \frac{1}{\left(1-\frac{a}{c}\right)\left(1-\frac{b}{c}\right)}.$$

4. সমাধান কর : (i) $\dfrac{x-1}{x-2} - \dfrac{x-2}{x-3} = \dfrac{x-3}{x-4} - \dfrac{x-4}{x-5}$

(ii) $(x+4)(y-3) = xy+11$;

$(x-3)(y-4) = xy+1$.

5. $2(a^2-b^2)$, $3(a^3-b^3)$, $4(a^4-b^4)$ এবং $6(a^4+a^3b+2a^2b^2+ab^3+b^4)$এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

6. (i) $x+y+z=9$ এবং $yz+zx+xy=11$ হইলে $x^3+y^3+z^3-3xyz$এর মান নির্ণয় কর।

(ii) $a : b :: b : c$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)(a-b+c).$$

7. $x+y+5=0$, $2x-y=11$ এবং $4x+y=1$এর লেখ অঙ্কিত করিয়া দেখাও যে, উহারা একই বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করে এবং এই বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

8. কোন ভগ্নাংশের লবের সহিত 5 যোগ করিলে উহার মান 1 হয়, কিন্তু হরের সহিত 5 যোগ করিলে উহার মান $\frac{1}{4}$ হয়। ভগ্নাংশটি কত ?

XXIV

1. (i) সরল কর : $\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{2x}{1+x^2} - \dfrac{4x^3}{1+x^4} - \dfrac{8x^7}{1+x^8}$.

(ii) লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্ত্তিত কর : $\dfrac{10x^3+19x^2-9}{25x^3-19x+6}$.

2. (i) $x+(p-1)y=a, x+(q-1)y=b, x+(r-1)y=c$ হইলে দেখাও যে,

$$(q-r)a+(r-p)b+(p-q)c=0\ ;$$

(ii) $b^2-c^2=c^2-a^2=a^2-b^2$ হইলে এবং a, b, c ধনরাশি হইলে দেখাও যে,

$$\frac{bc-a^2}{b+c}+\frac{ca-b^2}{c+a}+\frac{ab-c^2}{a+b}=0.$$

3. সমাধান কর : (i) $\frac{2x+11}{x+5}-\frac{9x-9}{3x-4}=\frac{4x+13}{x+3}-\frac{15x-47}{3x-10}$.

(ii) $(a+p)x+(b-p)y=c,$
$(b+q)x+(a-q)y=c.$

4. (i) $10x(x^4+y^4)+11(x^4-y^4)y-4(4x^2+y^2)y^3$কে $5x^2-2xy+3y^2$ দ্বারা ভাগ কর।

(ii) $(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3+(a^2-b^2)^3$কে $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$ দ্বারা ভাগ কর।

5. (i) $x^4+3x+20$ এবং $3x^5-2x^4+81x-85$এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর ;

(ii) $x^3+a^3,\ \ x^3-a^3,\ \ x^4+x^2a^2+a^4,\ \ x^4-x^2a^2+a^4$ এবং x^4-a^4এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

6. $x^6-12x^5+60x^4-160x^3+240x^2-192x+64$এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

7. একটি ঘরের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অন্তর 10 ফুট ; ইহাদের প্রত্যেকটি 4 ফুট বাড়াইলে ঘরের ক্ষেত্রফল 216 বর্গফুট বাড়িত। ঘরটির দৈর্ঘ্য কত ?

8. $2x+3y=12$ এবং $x+2y=7$এর লেখ অঙ্কিত কর এবং উহাদের ছেদ-বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

XXV

1. সরল কর :

(i) $\frac{x^3+3x^2+5x+15}{x^3+2x^2+5x+10}+\frac{x^4+x^3+3x^2+x-2}{x^4+2x^3+3x^2+4x-4}$.

(ii) $\frac{1}{n(n-1)}+\frac{1}{(n-1)(n-2)}+\frac{1}{(n-2)(n-3)}+\frac{1}{(n-3)(n-4)}$.

2. (i) $x=\frac{b-c}{n-a},\ y=\frac{c-a}{n-b},\ z=\frac{a-b}{n-c}$ হইলে দেখাও যে,

$$x+y+z+xyz=0.$$

(ii) $\frac{y-z}{y+z}=a, \quad \frac{z-x}{z+x}=b, \quad \frac{x-y}{x+y}=c$ হইলে দেখাও যে,

$$(1-a)(1-b)(1-c)=(1+a)(1+b)(1+c).$$

3. প্রমাণ কর যে, $a^0=1$.

যদি $x^m y^{p-n}=a,\ x^m y^{q-n}=b,\ x^m y^{r-n}=c$ হয়, দেখাও যে,

$$a^{q-r}.b^{r-p}.c^{p-q}=1.$$

4. সমাধান কর : (i) $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)^2}=\frac{x-3}{x-6}$;

(ii) $2y+z=11,$
$2z+x=12,$
$2x+y=13.$

5. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : (i) $(a+1)^3+(a-1)^3-3a^2+4$;

(ii) $2x^2+5xy+3y^2-5yz-5zx+2x-5z+3y$.

6. লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্ত্তিত কর :

$$\frac{4x^4-2x^3+10x^2+x+15}{4x^5+10x^4+8x^3+19x^2+8x+21}.$$

7. দশবৎসর পূর্ব্বে কোন ব্যক্তির বয়স তাঁহার পুত্রদ্বয়ের বয়সের সমষ্টির তিনগুণ ছিল ; পুত্রদ্বয়ের বয়সের অন্তর দুই বৎসর এবং উহাদের বর্ত্তমান বয়সের সমষ্টি পিতার বর্ত্তমান বয়স অপেক্ষা 14 বৎসর কম। প্রত্যেকের বর্ত্তমান বয়স নির্ণয় কর।

8. (i) $a:b=b:c=c:d$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$$(d-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=(d-a)^2.$$

(ii) লেখ-সাহায্যে '$\frac{2x-5}{3}=\frac{3x-9}{4}$' এর সমাধান নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

দ্বিতীয় খণ্ড

বিবিধ প্রশ্নমালা (ক) (পৃষ্ঠা 2-7)

I

1. 4, 10, 16, 22, 28, 34, 40 2. 0 3. 25
4. $3+2x+5x^2$ 5. $a+2$ 6. $x=2$
7. 36 বৎসর 8. BC = 3, CA = 4, AB = 5.

II

1. (i) $(x-y)$ বৎসর ; $(x+z)$ বৎসর ; (ii) xy বর্গফুট
2. 0 4. 0 6. $2x^2-3ax+3a^2$.
7. $(a+1)(a-2)(a+3)$.

III

1. 0 3. 0 4. 1 6. 0 7. $\frac{6}{7}$
8. A 36 টা. ; B 20 টা.

IV

1. 1 2. $8x^3$ 3. $a^3-4a^2+6a-12$
4. (i) $(a+b+x+y)(a-b+x-y)$; (ii) $(2x-3y)(x+5y)$
5. 1 6. $a^3+b^3+c^2-3abc$.
7. 1 8. 26 ; 6.

V

1. 0 2. $x+y+z$ 3. $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$
4. 7 6. 24 ফুট
7. $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$ 8. $(-6, 2)$.

VI

1. 1 2. 1 3. $2x+a$ 4. $2x+y+z$
6. $x=2\frac{9}{13}$ 7. 52 বৎসর ।

VII

1. 0 2. a^8-x^8 3. 1

4. (i) $(a-c)(a+2b+c)$; (ii) $(2x-3a)(x-2a)$

5. $2x^4+x^3y+x^2y^2-7xy^3+3y^4$ 8. 68 বৎসর ; 32 বৎসর।

VIII

1. 0 2. 1 3. 0 4. 1

5. $(x+y)^2-(y+x)^2$ 6. 0.

প্রশ্নমালা 1 (পৃষ্ঠা 10)

1. $x^3+10x^2+31x+30$. 2. $x^3+16x^2+79x+120$.

3. $8x^3+4x^2-82x-105$. 4. $27a^3+9a^2-132a+96$.

5. $8x^3-56x^2+122x-84$. 6. $27x^6-54x^4+9x^2+10$.

7. $x^3+2\frac{1}{12}x^2+1\frac{5}{12}x+\frac{5}{16}$. 8. $a^3+\frac{3}{8}a^2-a+\frac{15}{128}$.

9. $a^6+(2p+3q+4r)a^4+(6pq+8pr+12qr)a^2+24pqr$.

10. $8x^3+(4a+12c+20f)x^2+(6ac+10af+30cf)x+15acf$.

11. $x^3-7xy^2-6y^3$. 12. $8a^3-44a^2b+46ab^2+35b^3$.

13. $x^6-3a^2x^4-25a^4x^2-21a^6$.

14. $x^4+10x^3+35x^2+50x+24$.

15. $16x^4-128x^3+356x^2-388x+120$.

16. $x^4+3x^3-21x^2-43x+60$.

17. $16a^4+112a^3b+268a^2b^2+252ab^3+72b^4$.

18. $p^4-4p^3q-91p^2q^2+190pq^3+1200q^4$.

19. $x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4$.

20. $x^5+5ax^4+10a^2x^3+10a^3x^2+5a^4x+a^5$.

প্রশ্নমালা 2 (পৃষ্ঠা 13-14)

1. $8x^3+y^3+1-6xy$. 2. $x^3+8y^3+27-18xy$.

2. $8x^3+y^3+27z^3-18xyz$. 4. $a^3-b^3+c^3+3abc$.

5. $a^3-8b^3+27c^3+18abc$.

6. $8p^3-27q^3-125r^3-90pqr$. 7. x^6-4x^3-1

8. a^6-26a^3-27. 9. 15200. 10. $9(m+3)$.

11. 28656. 12. $2(a^3+b^3+c^3-3abc)$.

13. $4(a^3+b^3+c^3-3abc)$. **15.** (i) 0 ; (ii) 0. **16.** 0.
17. (i) 0 ; (ii) 0 ; (iii) 0 ; (iv) 0. **18.** 0. **19.** 0.
25. $3(b+c-2a)(c+a-2b)(a+b-2c)$.
26. $3(4x-3y-z)(4y-3z-x)(4z-3x-y)$.
27. $3(y+z)(z+x)(x+y)(y-z)(z-x)(x-y)$.
28. $3x^2y^2z^2(y+z)(z+x)(x+y)(y-z)(z-x)(x-y)$.

প্রশ্নমালা 3 (পৃষ্ঠা 17-18)

1. 0. **2.** 0. **3.** (i) 0 ; (ii) $-(y-z)(z-x)(x-y)$.
4. 0. **5.** 0. **6.** $-(a-b)(b-c)(c-a)$.

প্রশ্নমালা 4 (পৃষ্ঠা 20-21)

1. $9x^2y+18x^2z+2y^2z+3xy^2+12xz^2+4yz^2+12xyz$.
2. $9y^2z+3yz^2+2xz^2+4zx^2+12x^2y+18xy^2+12xyz$.
3. $3x^2y+9xy^2-45y^2z+75yz^2+25z^2x-5zx^2-30xyz$.
4. $12y^2z+18yz^2+9z^2x+3zx^2+2x^2y+4xy^2+18xyz$.
5. $2x^5y+7x^4y^2+18x^3y^3+21x^2y^4+18xy^5$.
6. $-12a^2b+16a^2c+36b^2c-18ab^2-32ac^2-48bc^2+72abc$.
7. $-9b^2c-3bc^2+4c^2a-16ca^2-48a^2b+36ab^2+36abc$.
8. 0. **9.** 0. **10.** $6xyz$. **11.** 0.

প্রশ্নমালা 5 (পৃষ্ঠা 22)

1. $8x^3$. **2.** $64a^3$. **8.** $3(2b+c-a)(2c+a-b)(2a+b-c)$
9. $3(b+3c)(c+3a)(a+3b)$.
10. $3(a+2b+3c)(3a+b+2c)(2a+3b+c)$.

প্রশ্নমালা 6 (পৃষ্ঠা 23)

1. $18y^2z^2+8z^2x^2+72x^2y^2-16x^4-81y^4-z^4$.
2. $450y^2z^2+200z^2x^2+72x^2y^2-16x^4-81y^4-625z^4$.
3. $2b^4c^4+2c^4a^4+2a^4b^4-a^8-b^8-c^8$.
4. $-a^8+2a^6b^2+a^4b^4+2a^2b^6-b^8$.
5. $2b^2c^2q^2r^2+2c^2a^2r^2p^2+2a^2b^2p^2q^2-a^4p^4-b^4q^4-c^4r^4$.

প্রশ্নমালা 7 (পৃষ্ঠা 26)

1. $a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$.
2. $x^7+7x^6y+21x^5y^2+35x^4y^3+35x^3y^4+21x^2y^5+7xy^6+y^7$.
3. $a^9+9a^8b+36a^7b^2+84a^6b^3+126a^5b^4+126a^4b^5+84a^3b^6+36a^2b^7+9ab^8+b^9$.
4. $x^6-6x^5y+15x^4y^2-20x^3y^3+15x^2y^4-6xy^5+y^6$.
5. $m^7-7m^6n+21m^5n^2-35m^4n^3+35m^3n^4-21m^2n^5+7mn^6-n^7$
6. $a^8-8a^7b+28a^6b^2-56a^5b^3+70a^4b^4-56a^3b^5+28a^2b^6-8ab^7+b^8$
7. $32x^5+80x^4y+80x^3y^2+40x^2y^3+10xy^4+y^5$.
8. $729x^6+2916x^5y+4860x^4y^2+4320x^3y^3+2160x^2y^4+576xy^5+64y^6$.
9. $x^7-14x^6y+84x^5y^2-280x^4y^3+560x^3y^4-672x^2y^5+448xy^6-128y^7$.
10. $128x^7-448x^6+672x^5-560x^4+280x^3-84x^2+14x-1$.
11. $a^8-24a^7+252a^6-1512a^5+5670a^4-13608a^3+20412a^2-17496a+6561$.

12. 64. 13. 256. 14. 0. 15. 1. 16. -1.
17. 9. 18. 25. 19. 14. 20. 1.

প্রশ্নমালা 8 (পৃষ্ঠা 29-30)

1. $(x+y+2z)(x^2+y^2+4z^2-2yz-2zx-xy)$.
2. $(a-b+c)(a^2+b^2+c^2+bc-ca+ab)$.
3. $(x-y-z)(x^2+y^2+z^2-yz+zx+xy)$.
4. $(2p+q-1)(4p^2+q^2+1-2pq+2p+q)$.
5. $(3p-2q-4)(9p^2+4q^2+16+6pq+12p-8q)$.
6. $(5x-6y+1)(25x^2+36y^2+1+30xy-5x+6y)$.
7. $(4a-3b-2c)(16a^2+9b^2+4c^2-6bc+8ca+12ab)$.
8. $2(p-r)(p^2+3q^2+r^2-3qr+rp-3pq)$.
9. $(a^2+a-1)(a^2-a^3+2a^2+a+1)$.
10. $(2m^2+m+3)(4m^4-2m^3-5m^2-3m+9)$.

11. $(x^2+3x-2)(x^4-3x^3+11x^2+6x+4)$.

12. $x=3\frac{1}{3}$. 13. $x=-1\frac{1}{3}$. 14. $x=\frac{1}{3}(a+b+c)$.

15. $4x^2+9y^2+z^2-3yz-2zx-6xy$.

16. $5x+4y+2z$. 17. $2x-y-6$.

প্রশ্নমালা 9 (পৃষ্ঠা 32)

1. $-(y-z)(z-x)(x-y)(y^2+yz+z^2)(z^2+zx+x^2)(x^2+xy+y^2)$.
2. $-(y-z)(z-x)(x-y)(y+z)(z+x)(x+y)$.
3. $(q-r)(r-p)(p-q)(q+r)(r+p)(p+q)$.
4. $-(b-c)(c-a)(a-b)$. 5. $q(b-c)(c-a)(a-b)$.
6. $-(b-c)(c-a)(a-b)$. 7. $-(b-c)(c-a)(a-b)$.
8. $-(b-c)(c-a)(a-b)(b+c)(c+a)(a+b)$.
9. $(b-c)(c-a)(a-b)$. 10. $2x(b-c)(c-a)(a-b)$.
11. $(b-c)(c-a)(a-b)(n-m)$
12. $-(b-c)(c-a)(a-b)(p+q+r)$.

প্রশ্নমালা 10 (পৃষ্ঠা 35)

1. (i) $-(y-z)(z-x)(x-y)(y+z)(z+x)(x+y)(x^2+y^2+z^2)$.
   (ii) $-(q-r)(r-p)(p-q)(q+r)(r+p)(p+q)(p^2+q^2+r^2)$.
   (iii) $(m-n)(n-l)(l-m)(m+n)(n+l)(l+m)(l^2+m^2+n^2)$.
   (iv) $-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.
   (v) $-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c+x)$.
   (vi) $-(m+n)(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.
   (vii) $-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)(x+y+z)$.
   (viii) $-(b-c)(c-a)(a-b)(3p+a+b+c)$.
   (ix) $-(b-c)(c-a)(a-b)(3p+a+b+c)$.
   (x) $(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.
   (xi) $(b-c)(c-a)(a-b)(3x+a+b+c)$.
2. (i) $-(y-z)(z-x)(x-y)(y+z)(z+x)(x+y)(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)$.
   (ii) $-(y-z)(z-x)(x-y)(y+z)(z+x)(x+y)(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)$.
   (iii) $(y-z)(z-x)(x-y)(y+z)(z+x)(x+y)(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)$.

(iv) $-(b-c)(c-a)(a-b)(bc+ca+ab)$.

(v) $-(b-c)(c-a)(a-b)(bc+ca+ab-3x^2)$.

(vi) $(b-c)(c-a)(a-b)(bc+ca+ab)$.

3. (i) $-(b-c)(c-a)(a-b)(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)$.

(ii) $-(b-c)(c-a)(a-b)(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)$.

(iii) $(b-c)(c-a)(a-b)(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)$.

4. (i) $-(b-c)(c-a)(a-b)\{a^3+b^3+c^3+a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+abc\}$.

(ii) $-(b-c)(c-a)(a-b)\{a^3+b^3+c^3+a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+abc\}$.

(iii) $(b-c)(c-a)(a-b)\{a^3+b^3+c^3+a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+abc\}$.

প্রশ্নমালা 11 (পৃষ্ঠা 37-38)

1. $(b+c)(c+a)(a+b)$. **2.** $(b+c)(c+a)(a+b)$.

3. $(b+c)(c+a)(a+b)$. **4.** $(b+c+2p)(c+a+2p)(a+b+2p)$.

5. $2(b+c)(c+a)(a+b)$.

6. $(b+c)(c+a)(a+b)(p+q)$. **7.** $(a+b+c)(bc+ca+ab)$.

8. $(a+b+c)(bc+ca+ab)$. **9.** $(a+b+c)(bc+ca+ab)$.

10. $2(x+y+z)(x^2+y^2+z^2+3yz+3zx+3xy)$.

11. $2(a+b+c)(bc+ca+ab)$. **12.** $(a+b+c)(bc+ca+ab)(p+q)$.

13. $(qr+rp+pq+1)(p+q+r+pqr)$. **14.** $3(y-z)(x-z)(x+y)$.

15. $3(2y+3z)(3z-x)(x-2y)$. **16.** (i) 240 ; (ii) 780.

17. $(ap+bq+cr)(bq+cr-ap)(cr+ap-bq)(ap+bq-cr)$.

18. $(2x+3y+z)(3y+z-2x)(z+2x-3y)(2x+3y-z)$.

19. 0. **20.** 0. **21.** 0. **22.** 7700.

প্রশ্নমালা 12 (পৃষ্ঠা 39)

1. $(x+1)(x^2+3x+1)$. **2.** $(x+1)(x^2-8x+1)$.

3. $(x-1)(x^2-4x+1)$. **4.** $(x+1)(2x^2+x+2)$.

5. $(x-1)(2x^2-3x+2)$. **6.** $(x^2+x+1)^2$.

7. $(x+1)^2(x^2+3x+1)$. **8.** $(a^2+6a+1)(a^2-3a+1)$.

9. $(x+1)^2(x^2-6x+1)$. **10.** $(x+1)(x-1)(x^2-3x+1)$.

11. $(2x^2-7xy-2y^2)(x^2+xy-y^2)$.
12. $(x^2+2xy-y^2)(3x^2-4xy-3y^2)$.
13. $(x-1)(x^2+3x+1)(x^2-6x+1)$.
14. $(a-b)(2a+b)(a+2b)(a^2+ab+b^2)$.
15. $(a-2x)(a+2x)^4$.

প্রশ্নমালা 13 (পৃষ্ঠা 42)

1. (i) $(2x+3y+4)(x+2y+1)$; (ii) $(x-2y+3)(3x+y+2)$;
(iii) $(x-y+1)(2x-3y-4)$; (iv) $(a+3b+4)(a-2b-1)$.
2. (i) $(x+2y+z)(2x+y+z)$;
(ii) $(x-2y+3z)(3x+4y-2z)$;
(iii) $(4a-5b+6c)(3a+b-2c)$;
(iv) $(x-2y+3z)(2x+3y-5z)$.
3. (i) $(a+2b+3c+1)(a+b+2c+2)$;
(ii) $(x-y+2z+1)(x+3y-z-2)$;
(iii) $(2a-3b-4c+5)(a-2b+3c+4)$;
(iv) $(2x+5y-3z+1)(x-3y-2z+3)$.

প্রশ্নমালা 14 (পৃষ্ঠা 44)

1. $(x-1)(x^2-x+2)$.
2. $(x-1)(3x^2+5x-1)$.
3. $(a-1)(a-2)(a-3)$.
4. $(a-3)(a^2+2a+7)$.
5. $(x-3)(x-4)(x+5)$.
6. $(x-1)^3(x-2)$
7. $(x+1)(x-1)(x-2)(x-4)$.
8. $(a+1)^3(2a-5)$.
9. $(x-2)(x-3)(x^2+x+2)$.
10. $(x+1)(x-1)^2(x-2)(x-4)$.
11. $(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$.
12. $(a+b)(a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6)$.
13. $(a-b)(a^6+a^5b+a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+ab^5+b^6)$.
14. $(x+1)(x-1)(x-2)(x^2-3x+1)$.
15. $(x+1)(x-2)(x+4)(x^2-2x+12)$.

প্রশ্নমালা 15 (পৃষ্ঠা 46-47)

1. $(2x+1)(4x^2+x+1)$.
2. $(4a-3x)(16a^2+5ax+9x^2)$.
3. $(2m-3n)(m^2+2n^2)$.
4. $(x-3)(x^2+3x+7)$
5. $(2a+3)(4a^2+9a+9)$.
6. $(3x-2y)(9x^2+6xy-4y^2)$.

7. $(a-c)(1+b)$. 8. $(a-c)(rx+bqy)$.

9. $(a-c)(b-c)(c^2+ab)$. 10. $(1-x+y)(1-x+z+zx)$.

11. $(a+1)(a^2b-ab-a+b+1)$.

12. $(a-q)\{(p+q)a+q(q-4p)\}$.

13. $(x+y+pa-pb)(x+y-pa+pb)$.

14. $2(1+a)(1+c)(a-c)$. 15. $2(x-a)(x+y+z+a)$.

16. $(a+b)(a-b)(a+2b)(2a-b)(a^2+b^2)$.

17. $(x+3y+10)(x+5y+16)$.

18. $(x^2+y^2-2)(x^2+y^2-1)$. 19. $(2x-y+10)(2x-y-3)$.

20. $(x+2)(x-2)(x-4)(x-8)$. 21. $(3x^2-2x+3)(3x^2-2x+2)$

22. $(4x^2-5y^2+10)(4x^2-5y^2-2)$.

23. $(x+1)(x-5)(x-2)^2$. 24. $(x+2)(x+6)(x^2+8x+10)$.

25. $(4a^2+24a+33)(4a+24a+13)$.

26. $(6a^2+11ab+6b^2)(6a^2+11ab+2b^2)$.

27. $\{x^2+y^2+(a-b)^2\}\{x^2+y^2-(a+b)^2\}$.

28. $(x^2+y^2-1)\{(a+b)^2(x^2+y^2)+(a-b)^2\}$.

29. $(a+1)(b+1)(a-1)(b-1)(a^2+1)(b^2+1)$.

30. $(a+1)(b+1)(a-1)(b-1)(ab+a-b+1)(ab-a+b+1)$.

31. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)$. 32. $(x^2+y^2)(a^2+b^2)(c^2+d^2)$.

33. $(a^2+b^2-1)(x^2+y^2-1)$.

34. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$.

35. $(1+x)(1+y)(1+z)$. 36. $(1-a)(1-2a)(1-3a)(1-4a)$.

37. $(1+x)^2(1+x^2)(1+x^4)(1-x+x^2)$.

38. $(a+b+c)\{a^2(b-c+1)+b^2(c-a+1)+c^2(a-b+1)-bc-ca-ab\}$. 39. $(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)\times(x^2+y^2+z^2)$. 40. $3(y-z)(z-x)(x-y)$.

41. $(2xyz+x^2+y^2+z^2-1)(xyz+1)$.

42. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$.

43. $(a^2+b^2+c^2)(bc+ca+ab)$.

44. $5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$.

45. $(a+b+c)(x+y+z)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)\times(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$.

প্রশ্নমালা 16 (পৃষ্ঠা 49-50)

1. $a+b+c$. 2. $2x+3y-z$. 3. $-(a+b+c)$.
4. $-(c-a)(a-b)$. 5. $-(y-z)(z-x)(x-y)$.
6. (i) ভাগফল $=a^2+b^2+c^2$;
(ii) $(ax+by+cz)^2+(bx-ay)^2+(cy-bz)^2+(az-cx)^2$.
7. ভাগফল $=x+y+z+xyz$.
8. ভাগফল $=a^3+b^3+c^3-3abc$.
9. $(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$.
10. $(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2$.
11. $(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2$.
12. $(y+z-2x)^3+(z+x-2y)^3+(x+y-2z)^3$.
13. $a^3(b-c)^3+b^3(c-a)^3+c^3(a-b)^3$.
14. $(y^2-z^2)^3+(z^2-x^2)^3+(x^2-y^2)^3$.
16. (i) 350 ; (ii) 0 ; (iii) $\frac{1}{3}(r-p^3+3pq)$.
17. 7700 18. $881\frac{1}{3}$. 19. 3360. 20. $(x^2-8x+11)^2$.

প্রশ্নমালা 18 (পৃষ্ঠা 65-66)

1. $x+2$. 2. $2x-3$. 3. $4x+3$.
4. $2x^2+x+1$. 5. x^2-3x-2. 6. $3x^2+3x-1$.
7. $2x^2+x-1$. 8. $x^2-2xy-2y^2$. 9. $x+5$.
10. x^2+8x-2. 11. $7-3x$. 12. $15a+14$.
13. $2x^2+7x+3$. 14. x^2-3x+2. 15. $2x^2+3x+3$.
16. x^2-2x+1. 17. $a^2-2ab+3b^2$.
18. $2a^4y^4+2a^3y^3-27a^2y^2-3ay+36$.
19. $a+27$. 20. $ax+b$ 21. ax^2+bx+c.
22. $ax^2+2hxy+by^2$. 23. $x(x-3)$. 24. $2x(3x+1)$.
25. $x(3x+2)$. 26. $x(2x^2+x+1)$. 27. $2x^2y^2(x-2y)$.
28. $(a-b)^2(a+b)$. 29. $ab(6a^2+2ab-5b^2)$.
30. $5x^2y^4(x^2-5xy+y^2)$. 31. $2xy(x^2+xy+y^2)$.

প্রশ্নমালা 19 (পৃষ্ঠা 72)

1. x^2-x+1 2. x^2+2x+3. 3. $2x^2+x+3$.
4. $3x^2-2x+1$. 5. x^2-5x+1. 6. x^2+5x+1.

7. x^2+2x+3. 8. $x^2+19x+88$. 9. $2x-1$.
10. $a-2p$. 11. x^2-2x+1. 12. x^3-x+1.

প্রশ্নমালা 20 (পৃষ্ঠা 74)

1. $x-2$, 2. $x-2$. 3. $x+1$.
4. $3x+y$. 5. $2x-1$. 6. $x-5$.
7. $x+4y$. 8. a^2-3a+2. 9. a^2-a-12.

প্রশ্নমালা 21 (পৃষ্ঠা 77-78)

1. $2a^4+17a^3+51a^2+62a+24$.
2. $4a^4-24a^3+53a^2-51a+18$.
3. $8a^4-22a^3-a^2+23a+6$.
4. $6a^5+17a^4+22a^3+17a^2+8a+2$.
5. $8a^5-116a^3-59a^2+341a+190$.
6. $x^4-x^3-67x^2+25x+1050$.
7. $6a^5y^5-37a^4y^4+61a^3y^3-31a^2y^2+27ay+22$.
8. $x^5+6x^4+13x^3+15x^2+10x+3$.
9. $2x^5+x^4-10x^3-5x^2+8x+4$.
10. $2x^6+6x^5+13x^4-42x^3-162x^2-381x-234$.
11. $x^4-10x^3+35x^2-50x+24$.
12. $4x^5-36x^4+103x^3-87x^2-26x+24$.
13. $x^6-4x^5-17x^4+80x^3+4x^2-256x+192$.
14. $x^7+2x^6y-xy^6-2y^7$.
15. $x^6+5x^5-33x^4-149x^3+212x^2+684x-720$.
16. $6x^6+5x^5-22x^3+17x-6$.
17. a^2-3a+2.
18. $a^3+6a^2+11a+6$. 19. $x^3-4x^2a+5xa^2-2a^3$.
20. $2a^3-5a^2+4$
21. $2x^2-5x+2$; $2x^2-7x+3$.

প্রশ্নমালা 22 (পৃষ্ঠা 80-81)

1. $\dfrac{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}{bc+ca+ab}$. 2. $\dfrac{1}{(b+c)(c+a)(a+b)}$.

3. $\dfrac{1}{3}$. 4. $-\dfrac{1}{3}$. 5. $\dfrac{x-a}{x+d}$.

6. $\dfrac{x-2}{2x-3}$. 7. $\dfrac{x^2+x-3}{x^2-2}$. 8. $\dfrac{x-7}{x^2+2x-15}$.

9. $\dfrac{2x-3y}{x^2-xy+y^2}$. 10. $\dfrac{x^2-2x+3}{2x^2-2x-1}$.

11. $\dfrac{x^2+2xy+3y^2}{x^3-3xy^2+2y^3}$. 12. $\dfrac{2(x+y)}{3x(x^2+xy+y^2)}$

13. $\dfrac{3a+2}{a(a-5)}$ 14. $\dfrac{4a(a^2+ab+b^2)}{3b(2a^3+3a^2b-3ab^2+b^3}$.

15. $\dfrac{x^2-ax+b}{x^2-bx+a}$ 16. $\dfrac{ax^2-px+b}{bx^2-px+a}$.

প্রশ্নমালা 23 (পৃষ্ঠা 85-87)

1. $-\dfrac{42x}{(x^2-4)(x^2-25)}$. 2. $\dfrac{4(x^2+12x+39)}{(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)}$

3. $\dfrac{2(2x+5)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$. 4. $\dfrac{1}{x^2-9}$.

5. $\dfrac{5}{x-4a}$. 6. $3a^2-3a+12-\dfrac{50a+140}{(a+3)(a+4)}$.

7. $-2x^2+5x+5+\dfrac{2(x^2+3x+2)}{(2x+1)(3x+2)}$.

8. 0. 9. $\dfrac{a-d}{(x+a)(x+d)}$.

10. $\dfrac{3}{(x+2)(x+5)}$ 11. 0. 12. $\dfrac{2(3x^2-10x+10)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

13. $9+\dfrac{3x^2+9x+7}{(x+1)(x+2)(x+3)}$. 14. 0. 15. 0.

16. $\frac{2a}{a+b}$. 17. x^4+2. 18. $\frac{16x^{15}}{x^{16}-a^{16}}$.

19. $\frac{x^4}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}$. 20. $\frac{x^4}{(x-a)^4}$.

21. $\frac{1}{(x-1)(x+1)(x+3)(x+5)}$. 22. $\frac{8x^{15}}{x^{16}-a^{16}}$.

23. $-\frac{1}{x+a}$ 24. $\frac{1}{x-1}$ 25. $\frac{1}{1-a}$ 26. $\frac{1}{x-1}$.

প্রশ্নমালা 24 (পৃষ্ঠা 90-91)

1. 1. 2. p. 3. 0. 4. $p-q$. 5. 0.

6. -2. 7. $-(n+1)$. 8. 1. 9. $\frac{1}{abc}$.

10. $-\frac{x}{(x+a)(x+b)(x+c)}$. 11. $\frac{x^2}{(x+a)(x+b)(x+c)}$.

12. $bc+ca+ab$. 13. $3x+a+b+c$.

14. $6x^2+4x(a+b+c)+a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab$. 15. 0

16. $p+q$. 17. 0. 18. $\frac{a+b+c}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$.

প্রশ্নমালা 25 (পৃষ্ঠা 96-99)

1. $1\frac{1}{3}$. 2. $\frac{7bx}{4ay}$ 3. $-\frac{3a^2}{2b^2}$.

4. $-\frac{5bx}{4ay}$. 5. $\frac{3a^2b^2c^2}{2x^2y^2z^2}$. 6. $\frac{x+y}{a+b}$.

7. 1. 8. x^2+y^2. 9. $\frac{a^4+a^2b^2+b^4}{a^2+b^2}$.

10. $\frac{1}{4}$. 11. $\frac{a+b+c}{b+c-a}$. 12. $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.

13. $\frac{2ab}{a^2+b^2}$. 14. $\frac{2a}{1-a^2}$ 15. $\frac{a^2+ab+b^2}{a(a^2-ab+b^2)}$.

16. $-\frac{a^4+a^2b^2+b^4}{ab(a-b)^2}$ 17. $\frac{(a+b+c)^2}{2bc}$.

18. $\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}$. 19. $\frac{b}{a}$. 20. $\frac{2(x^2+y^2)}{y^2}$.

21. $\frac{c}{a}$. 22. $-x^2y^2z^2$. 23. x. 24. $a+b+c$.

25. $\frac{4a^3x}{x^4-a^4}$. 26. $x+2$. 27. $\frac{2}{x}$. 28. a.

29. $\frac{2a}{1-a^2}$. 30. 2. 31. x. 32. $\frac{1}{a}$.

33. $\frac{x^2+1}{x(x^2+2)}$. 34. 1. 35. $\frac{x^2-1}{x(x^2-2)}$

36. $\frac{4x^2+1}{2x(2x^2+1)}$. 37. $\frac{2x+1}{3x+2}$.

38. $\frac{abcd+ab+ad+cd+1}{bcd+b+d}$ 39. $\frac{(x+1)^2}{x+2}$

40. $\frac{y}{x}$ 41. $x+\frac{1}{x+\frac{2}{3}}$. 42. $2x+\cfrac{1}{x+\cfrac{2}{x+3}}$

43. $4x+\cfrac{1}{3x+\cfrac{1}{2x+\cfrac{1}{x}}}$ 44. $\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x}}}}$.

প্রশ্নমালা 27 (পৃষ্ঠা 115)

1. 1. 2. 4. 3. 2. 4. $-\frac{(a+b)}{4}$.

5. $a-2b$. 6. $\frac{ad-bc}{a-b-c+d}$.

প্রশ্নমালা 28 (পৃষ্ঠা 118)

1. $3\frac{1}{3}$. 2. -9 3. $-1\frac{5}{7}$. 4. $\frac{pa+qb+rc}{p+q+r}$. 5. $-2\frac{1}{2}$.

6. $-3\frac{1}{3}$. **7.** $-3\frac{1}{2}$. **8.** $-5\frac{1}{3}$. **9.** $-4\frac{1}{3}$.

10. $\dfrac{ab+bc-ca-ad}{a+d-2b}$. **11.** $2\frac{1}{2}$. **12.** 6.

13. $-3\frac{1}{2}a$. **14.** 2. **15.** $\frac{1}{12}$.

প্রশ্নমালা 29 (পৃষ্ঠা 121)

1. -1. **2.** $1\frac{2}{5}$. **3.** 2. **4.** 1. **5.** 4.

6. 2. **7.** $-1\frac{1}{3}$. **8.** $-6\frac{1}{3}$. **9.** $\dfrac{dm-bn}{an-cm}$. **10.** $\dfrac{b-d}{c-a}$.

11. $\dfrac{mn-r^2}{2r-m-n}$. **12.** 4. **13.** $4\frac{2}{3}$. **14.** $\dfrac{a+b}{2}$. **15.** 4.

16. 5. **17.** $-\frac{3}{4}$. **18.** $-\frac{5}{6}$. **19.** 5. **20.** $1\frac{16}{31}$. **21.** 6.

প্রশ্নমালা 30 (পৃষ্ঠা 124-126)

1. $a+b+c$. **2.** $-(a+b+c)$. 3. $bc+ca+ab$.

4. $\dfrac{bc+ca+ab}{abc}$ **5.** $p^3+q^3+r^3$. **6.** 2.

7. $\dfrac{3abc}{bc+ca+ab}$. **8.** $-(a^2+b^2+c^2)$. 9. $a^2+b^2+c^2$.

10. $a^3+b^3+c^3$. **11.** $abc(a+b+c)$. **12.** $-(a^2+b^2+c^2)$.

13. $-1\frac{4}{7}$. **14.** $-7\frac{1}{2}$. **15.** -2. **16.** $3\frac{7}{9}$.

17. $\dfrac{bc(l+m)-d(cl+bm)}{a(dl+dm-bl-cm)}$. **18.** $\dfrac{b(qc-pb)}{a(pc-qb)}$. **19.** $-2\frac{1}{2}$.

20. 3. **21.** $2\frac{10}{13}$. **22.** $\dfrac{3abc}{bc+ca+ab}$. **23.** 1.

24. $-\dfrac{6abc}{bc+ca+ab}$. **25.** $\dfrac{b^2+ac}{b^2+c^2}$. **26.** 4. **27.** 4. **28.** $\dfrac{ab-cd}{c^2-a^2}$.

প্রশ্নমালা 31 (পৃষ্ঠা 127-128)

1. 1·73. **2.** $-7·77$ **3.** $6\frac{146}{193}$. **4.** $\frac{9}{44}$. **5.** $-8·74$.

6. $\frac{7}{36}$. **7.** ·3. **8.** 5. **9.** 4. **10.** 1.

11. ·3. **12.** 1. **13.** 1. **14.** 1. **15.** $\frac{1}{8}$.

প্রশ্নমালা 32 (পৃষ্ঠা 133-135)

1. A 200 টাকা ; B 600 টাকা ; C 1000 টাকা. 2. 36জন.
3. 96টি. 4. 10 দিন. 5. 69 টা. 14 আ. 4 পা.
6. 421. 7. 6, 8, 10. 8. 14, 95. 9. 3, 4, 5.
10. 100 টাকা. 11. 400 টাকা 12. 200 টাকা.
13. 125000 টাকা 14. 250টি. 15. 16 গজ ; 4 গজ.
16. 8 গজ. 17. 20 গজ. 18. 2 সের. 19. 2 তোলা.
20. 25 টাকা-দরের 42 মণ, 35 টাকা-দরের 18 মণ. 21. 4 মণ.
22. 1 টা 10 $\frac{70}{143}$ মি. 23. 2টা $7\frac{7}{11}$ মি.
24. (i) 4 টা $41\frac{137}{143}$ মি. ; (ii) 3 ঘ. $41\frac{7}{13}$ মি. (iii) 8টা $23\frac{71}{143}$ মি.
25. (i) 55. 26. 300.

প্রশ্নমালা 33 (পৃষ্ঠা 139)

1. $x=9, y=4$. 2. $x=1, y=5$. 3. $x=2, y=2$.
4. $x=2, y=3$. 5. $x=3, y=2$. 6. $x=2, y=4$.
7. $x=2, y=1$. 8. $x=2, y=3$. 9. $x=4, y=-1$.
10. $x=3, y=2$. 11. $x=6, y=2$. 12. $x=8, y=2$.
13. $x=4, y=3$. 14. $x=12, y=3$. 15. $x=1, y=1$.

প্রশ্নমালা 34 (পৃষ্ঠা 141-142)

1. $x=1, y=1$. 2. $x=5, y=1$. 3. $x=1, y=5$.
4. $x=-1, y=1$. 5. $x=7, y=3$. 6. $x=1, y=2$.
7. $x=2, y=3$. 8. $x=1, y=2$. 9. $x=2, y=5$.
10. $x=2, y=1$. 11. $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{3}$. 12. $x=6, y=8$.
13. $x=6, y=8$. 14. $x=8, y=5$. 15. $x=17, y=25$.
16. $x=a, y=b$. 17. $x=a+b, y=b-a$ 18. $x=a, y=b$.

প্রশ্নমালা 35 (পৃষ্ঠা 144)

1. $x=4, y=3$. 2. $x=-\frac{7}{8}, y=5\frac{1}{8}$. 3. $x=\frac{18}{19}, y=\frac{7}{19}$
4. $x=5, y=2$. 5. $x=5, y=2$. 6. $x=4, y=-1$.
7. $x=3, y=2$. 8. $x=7, y=9$. 9. $x=\frac{833}{1107}, y=\frac{433}{1107}$.
10. $x=-1, y=5$. 11. $x=3, y=5$. 12. $x=16, y=4$.

13. $x=5,\quad y=7$. 14. $x=\frac{5}{2},\quad y=-\frac{1}{2}$. 15. $x=8,\quad y=5$.

16. $x=a,\quad y=b$. 17. $x=\frac{c^2-bc}{a^2-ab},\ y=\frac{ac-c^2}{ab-b^2}$.

18. $x=\frac{pr}{p^2+q^2},\ y=\frac{qr}{p^2+q^2}$.

19. $x=\frac{ab}{a+b},\ y=\frac{ab}{a+b}$. 20. $x=a, y=b$.

প্রশ্নমালা 36 (পৃষ্ঠা 147)

1. $x=-2,\ y=-1$. 2. $x=1,\ y=1$. 3. $x=-2,\ y=4$. 4. $x=2,\ y=0$.

5. $x=2,\ y=2$. 6. $x=3,\ y=4$. 7. $x=-1\frac{3}{5},\ y=1\frac{4}{5}$. 8. $x=3,\ y=2$.

9. $x=1,\ y=1$. 10. $x=7,\ y=1$. 11. $x=4,\ y=5$. 12. $x=\frac{b-c}{a-b},\ y=\frac{c-a}{a-b}$.

13. $x=-\frac{c(b-c)}{a(a-b)},\ y=-\frac{c(c-a)}{b(a-b)}$. 14. $x=0, y=2b$. 15. $x=a,\ y=b$.

প্রশ্নমালা 37 (পৃষ্ঠা 149-151)

1. $x=2, y=1$. 2. $x=3, y=1$. 3. $x=2, y=3$.

4. $x=4, y=3$. 5. $x=5, y=2$. 6. $x=\frac{ab}{a+b},\ y=\frac{ab}{a+b}$.

7. $x=\frac{ab}{a+b},\ y=-\frac{ab}{a+b}$. 8. $x=4, y=10$.

9. $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{3}$. 10. $x=2,\ y=3$. 11. $x=2, y=3$.

12. $x=\frac{1}{3}, y=\frac{1}{5}$. 13. $x=1\frac{1}{2},\ y=4$. 14. $x=2, y=3$.

15. $x=2, y=1$. 16. $x=2\frac{1}{2},\ y=0$. 17. $x=2, y=1$.

18. $x=3, y=2$. 19. $x=a+b, y=a+b$.

20. $x=c+\dfrac{a^2-b^2}{am-bn}$, $y=d+\dfrac{a^2-b^2}{an-bm}$. **21.** $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{1}{4}$.

22. $x=\frac{13}{99}$, $y=\frac{12}{46}$. **23.** $x=2$, $y=\frac{2}{3}$. **24.** $x=-\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{7}$.

25. $x=\dfrac{a^2+b^2}{2ab}$, $y=\dfrac{2ab+b^2-a^2}{2ab}$.

প্রশ্নমালা 38 (পৃষ্ঠা 154-158)

1. 70, 10. **2.** 90°, 45°. **3.** 18, 12. **4.** 40 টাকা, 10 টাকা।
5. 10 টাকা, 12 টাকা। **6.** $\frac{1}{4}$. **7.** $\frac{5}{7}$. **8.** $\frac{3}{11}$.
9. $\frac{4}{7}$. **10.** $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$. **11.** $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{18}$. **12.** $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$.
13. 23. **14.** 25. **15.** 73. **16.** 54.
17. 29. **18.** 47. **19.** 72. **20.** 63. **21.** 91.
22. $14\frac{2}{7}$ দিনে, 50 দিনে। **23.** 10 দিনে। **24.** 20 দিনে।
25. ১মটি দ্বারা 10 মিনিটে, ২য়টি দ্বারা 15 মিনিটে।
26. ঘণ্টায় নৌকা 6 মাইল এবং স্রোত 2 মাইল।
27. ঘণ্টায় নৌকা 9 মাইল, স্রোত 6 মাইল।
28. ঘণ্টায় নৌকা 8 মাইল, স্রোত 3 মাইল।
29. 15 বালক, 4টি করিয়া। **30.** 30 গজ, 20 গজ।
31. 20 ফুট, 10 ফুট। **32.** 10 গজ, 7 গজ। **33.** 42.
34. 35 বৎসর, 10 বৎসর। **35.** 45 বৎসর।
36. 38 বৎসর, 14 বৎসর। **37.** 4 মণ, 175 টাকা।
38. প্রথম হাজারে 100 টাকা ও পরবর্তী প্রতিহাজারে 40 টাকা।
39. টাকায় 5 পাই ; প্রথম 2000 টাকা।
40. চাউলের বস্তা 2 মণ, ময়দার বস্তা 1 মণ।

প্রশ্নমালা 39 (পৃষ্ঠা 164-165)

33. $x+y=3$. $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{5}=1$. **35.** $\dfrac{y}{7}-\dfrac{x}{5}=1$.

36. $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+1=0$. **37** $7y=4x-13$. **38.** $3x+5y+1=0$.

39. $x+2y+8=0$. **40.** $y+4=0$. **41.** $2x-3y=0$.

42. $y=2x+5$. **43.** $2x+y=1$.

বিবিধ প্রশ্নমালা (খ) (পৃষ্ঠা 165-171)

I

1. $-(b-c)(c-a)(a-b)(b+c)(c+a)(a+b)$.
2. (i) $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$; (ii) 10. **3.** (ii) $24xyz$.
4. (i) $(ax+by+cz)^2+(cy-bz)^2+(az-cx)^2+(bx-ay)^2$;
(ii) $(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3$.
6. $(x-3)(x-4)(2x-1)^2$ **7.** $\dfrac{14x^2+29x-15}{14x^2-29x-15}$ **8.** 1.

II

2. 320. **3.** $-(b-c)(c-a)(a-b)(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)$.
4. $(2a+3b-4c-2)(a-2b+3c-1)$.
6. $3x-1$; $x=\frac{1}{3}$. **8.** (ii) 1.

III

2. 0. **3.** (i) $(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$;
(ii) $-(1-x)(1-y)(1-z)(1-a)$. **4.** $(a^2+9a+14)^2-5^2$.
5. 0. **6.** a^2+2a+3 ; $(a-3)(a+4)(a^2+2a+3)$. **7.** $10\frac{2}{3}$.

IV

1. $4abc$. **2.** (i) $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$; (ii) 243.
3. (i) $(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$.
4. (i) $(x-1)(x-2)(x-3)(3x+2)$; (ii) $0, 1, 2, 3, -\frac{2}{3}$.
6. $2x^2-13x+15$.

V

1. 0. **2.** (ii) $(y+z-2x)^3+(z+x-2y)^3+(x+y-2z)^3$.
3. $(x+y)^2(x^2+3xy+y^2)$. **5.** $(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$.
6. $3x^2+8x-3$; $(3x^2+8x-3)(x^2+3x+2)(2x^2-3x+1)$. **7.** 1.

VI

1. 0. **3.** (i) $pq-3r$; (ii) $3(pq-r)$.
4. $(bc+ca+ab)(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)$.
7. $x^2-(a+b)x+ab$; $x^2-(c+a)x+ca$.

VII

1. (ii) -3. 2. $abcxyz$. 3. x^2-2x+3.

4. $(x^2+7x+1)(2x^2-x+1)(x^2-3)$.

5. $(2x+3y+2z)(x+y+3z)$. 8. $\dfrac{abc(a+b+c)}{4}$.

VIII

1. $\frac{1}{2}(p+q+r)$. 2. (ii) -180.

3. $a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$.

4. $2(x+1)(y+1)(x-y)(1-xy)$. 7. ab.

প্রশ্নমালা 40 (পৃষ্ঠা 174-175)

1. 6. 2. 9. 3. 13. 4. 25. 5. 7.
6. 9. 7. 2. 8. 17. 17. 10. 14.
11. 1751. 12. -185. 13. 2057. 14. -1475.
15. 294. 16. 69. 17. 2. 18. $25\frac{2}{7}$.
19. (i) ap^2+bp+c; (ii) ap^3+bp^2+cp+d.

প্রশ্নমালা 41 (পৃষ্ঠা 179-180)

13. -192. 14. $-11\frac{3}{4}$. 15. 174. 16. 1.

17. $(p+q)^2(p+q+1)=a$. 20. $b+c+1=0$.

21. $\{p(p-q)-q\}^2+(p^2+q^2)\{q(p-q)+p\}=0$.

23. $(x+1)(x-1)(x-2)$; $-1, 1, 2$.

24. $(x+1)(x+3)(x-2)$; $-1, -3, 2$.

25. $(x+3)(x-4)(2x-1)$; $-3, 4, \frac{1}{2}$.

26. $(x-1)(x-2)(x-3)(x+2)$; $1, 2, 3, -2$.

প্রশ্নমালা 42 (পৃষ্ঠা 185-186)

15. $-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.

16. $-(b-c)(c-a)(a-b)(bc+ca+ab)$.

17. $-(b-c)(c-a)(a-b)(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)$.

68. $(b+c)(c+a)(a+b)$.

প্রশ্নমালা 43 (পৃষ্ঠা 191-192)

1. 9 : 12 বৃহত্তম ; 1 : 2 ক্ষুদ্রতম। **2.** 5 : 3 বৃহত্তম ; 3 : 4 ক্ষুদ্রতম।
3. $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ বৃহত্তম ; $\frac{1}{4} : \frac{1}{5}$ ক্ষুদ্রতম। **4.** $2x+y : 3x+y$ বৃহত্তর।
5. 1 : 1. **6.** 2 : 1. **7.** 1 : 1. **9.** $\dfrac{ab}{a+b}$.
10. $\dfrac{-ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}$. **11.** 18. **12.** 35. **13.** 12 ; 16.
14. 40 ; 60. **15.** 1 : 2. **16.** 13 : 9. **17.** 11 : 5. **18.** 2 : 1.
19. 23 : 11. **20.** $\frac{13}{14}$. **21.** 5 : 4. **22.** 2 : 1 ; 10.

প্রশ্নমালা 44 (পৃষ্ঠা 194-195)

1. 12. **2.** 49. **3.** $\dfrac{21bc}{2a}$. **4.** a^2.
5. $\dfrac{(c+a)^2}{(b+c)^2}$. **6.** 4. **7.** 6. **8.** a^2b^2.
9. ab/c. **10.** 20. **11.** 9. **12.** c.
13. 5. **14.** 1. **15.** 1. **16.** $\dfrac{ac-b^2}{a+c-2b}$.
17. 10 মণ। **18.** 18 মণ। **19.** 11 গ্যালন।

প্রশ্নমালা 45 (পৃষ্ঠা 200-201)

18. 2. **19.** 2. **20.** 1. **21.** 3. **22.** 2.
23. $\dfrac{dm-bn}{an-em}$. **24.** $\dfrac{ac}{a-d}$. **25.** $\dfrac{bc-ad}{b-d}$.
26. 2. **27.** $-2\frac{1}{2}$. **28.** $3\frac{1}{2}$. **29.** $6\frac{1}{2}$. **30.** 8. **31.** 5.

প্রশ্নমালা 48 (পৃষ্ঠা 218-219)

1. x. **2.** $x^{\frac{2}{3}}$. **3.** $a^{\frac{1}{3}}$. **4.** a^{-5}. **5.** $a^{\frac{3}{5}}$.
6. y^{-18}. **7.** x^{10}. **8.** x. **9.** $a^{\frac{5}{3}}$. **10.** x.
11. $b^{\frac{2}{15}}$. **12.** x^{-11} **13.** $x+2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y$.

14. $2x^{\frac{2}{3}}+5x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+2y^{\frac{2}{3}}$. 15. $6a^{\frac{1}{2}}-7a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}+2b^{\frac{1}{2}}$

16. $x^{\frac{2}{5}}-y^{\frac{2}{5}}$. 17. $x^{2n}-a^{-2n}$. 18. $x+y$.

19. $x-y$. 20. $x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{4}{3}}$. 21. $x^{\frac{11}{12}}$

22. $x^{-\frac{1}{12}}$. 23. a^{-3}. 24. c^{-10}. 25. d^{-5}

26. y^{-m}. 27. $x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{18}}$. 28. $3x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}$. 29. $3abc$.

30. $\frac{1}{2}a^{-2}b^{-2}c^{-2}$. 31. $2a^{-1}b^{-1}c^{-1}$. 32. $2^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}$.

33. $x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}$. 34. $x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}$

35. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}-z^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$. 36. x^{-26}.

37. a^{-20}. 38. x^7. 39. x^{-13}. 40. 0.

41. 0. [প্রশ্নে '$(y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}})$'এর স্থলে '$(y^{\frac{1}{3}}-z^{\frac{1}{3}})$' হইবে]

42. 1. 43. 1. 44. 1. 45. 0.

প্রশ্নমালা 49 (পৃষ্ঠা 221-223)

1. 3. 2. 3. 3. 4. 4. 8. 5. ^{1}

6. $\frac{1}{27}$. 7. $\frac{3}{2}$. 8. $\frac{25}{16}$. 9. $\frac{1}{xy}$. 10. x^{2^x}

11. $a^{3^{n+2}}$. 12. $x^{\frac{13}{12}}y^{\frac{11}{12}}$ 13. y^2.

14. $a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{2}}$. 15. $2^{\frac{1}{48}}$. 16. $x^{-p^2-a^2}$ 17. 1.

18. 2^m. 19. $\frac{1}{50}$. 20. 1. 21. 1. 22. 1. 23. 1.

24. 1. 25. $\left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$ 26. $a^{m+n}b^n$. 27. $\left(\frac{p}{q}\right)^{p+q}$

28. 1. 32. $x=1$. 33. $x=\frac{}{3}$. 34. $x=4$.

35. $x=2$. 36. $x=3$. 37. $x=\frac{1}{2}$. 38. $x=1, y=2$.

39. $x=y=1$. 40. $x=\frac{4}{13}, y=\frac{3}{13}$. 41. $x=-2, y=1$.

প্রশ্নমালা 50 (পৃষ্ঠা 225)

1. $2a^2bc$. 2. $3xy^2z^3$. 3. $8a^5b^3c^2$. 4. $\frac{2}{5}ab^2c^3$.

5. $\frac{9x^2}{25yz^2}$. 6. $2xy^2$. 7. $\frac{3x^3z}{y^2}$. 8. $-\frac{2}{5}x^2y^3z$.

9. $-\frac{4abc^2}{7xy^2z^3}$. 10. $2ab^2c^3$. 11. $\frac{1}{3}x^2y^3z^{-1}$

12. $2a^3b^2c$. 13. $2xy^2z^{-1}$. 14. $2x^2y^3z^{-4}$. 15. $\frac{3xy^3z^4}{5a^2b}$.

প্রশ্নমালা 51 (পৃষ্ঠা 226-227)

1. $x+4$. 2. $ax+b$. 3. $ax+by+c$.

4. $a+b+c+d$. 5. x^2-2x+1. 6. $x^{\frac{1}{m}}-x^{-\frac{1}{m}}$

7. 3^m-5^n. 8. 2^m-3^n. 9. $a+\frac{1}{a}-1$.

10 $2\left(x-\frac{1}{x}\right)-3$. 11. $\frac{x}{y}-\frac{y}{x}-3$. 12. $x^2-\frac{1}{x^2}+2$.

13. $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}-2$. 14. $x^2+\frac{1}{x^2}-2$ 15. $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1$.

16. $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}-1$ 17. $\frac{x}{y}-\frac{y}{x}-\frac{1}{2}$ 18. $bc-ca+ab$.

19. $x^{-4}+x^{-3}+1$. 20. $x^2-x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$.

21. $(x+1)(x+2)(x+3)$. 22. $(x-2)(2x-1)(2x-3)$.

23. x^2+3x+1. 24. $x^2-8x+11$. 25. $4x^2+8x-1$.

প্রশ্নমালা 52 (পৃষ্ঠা 230-231)

1. $a+2b$. 2. $2a+5b$. 3. $12x+7y$.

4. x^2+2x+3. 5. $3x^2+4x-1$. 6. $7x^2-5xy+6y^2$.

7. $1+a+\frac{a^2}{2}$. 8. $2x^2+\frac{x}{2}-2$. 9. $\frac{x^2}{2}-2x+\frac{a}{3}$.

10. $x-3-\frac{2}{x}$. 11. $2x^2+5-\frac{7}{x^2}$. 12. $x^2+2x^{-1}+x^{-2}$.

13. $\frac{x}{y}+3-\frac{y}{x}$. 14. $3x+x^{\frac{1}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}}$ 15. $3a^{\frac{1}{2}}-2-a^{-\frac{1}{2}}$.

16. $2a^2+3a+\frac{3}{a}$. 17. $x^2-x(y+z)-yz$. 18. $3a^2-ab+5b^2$.

19. $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+1$. 20. $a+2$. 21. $m=1$.

22. $n=24$. 23. 1. 24. $x=3$. 25. $x=10$. 28. $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3$.

29. $1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3$. 30. $1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{16}x^3$.

প্রশ্নমালা 53 (পৃষ্ঠা 235-236)

1. $x=4$, $y=2$	2. $x=6$, $y=2$	3. $x=2$, $y=3$	4. $x=3$, $y=2$
5. $x=3$, $y=4$	6. $x=-3$, $y=4$	7. $x=6$, $y=-4$	8. $x=0$, $y=3$
9. $x=4{\cdot}4$, $y={\cdot}2$	10. $x=3$, $y=2$	11. $x=1{\cdot}5$, $y=1$	12. $x=1$, $y=2$
13. $x=-2$, $y=4$	14. $x=-21$, $y=-24$	15. $x=1\frac{5}{7}$, $y=1\frac{5}{7}$	16 $x=4$
17. $x=10$	18. $x=1$	19. $x=-4$	20. $x=4$
21. $x=2, y=3$			
22. $x=2$, $y=-3$	23. $x=8$, $y=3$	24. $x=-3{\cdot}5$, $y=2{\cdot}5$	

25. (0, 0), (−3, 3), (−5, −3). 26. (0,0), (9,0), (4,8) ; ক্ষেত্রফল 36.

প্রশ্নমালা 54 (পৃষ্ঠা 238-240)

1. 20 মাইল দূরে ; 2·5 ঘণ্টা. 2. 11·7 আ. ; 6·4 সের.
3. 21 শি. ; 10·7 টাকা. 4. 25 টাকা ; 300 টাকা.
5. 75·6 গজ. 6. 7 টাকা. 7. 16 টাকা.
8. দ্বিতীয় ব্যক্তি 4 ঘণ্টা চলিবার পর ; 20 মাইল দূরে.
9. 3 ঘণ্টা পরে এবং প্রথম ব্যক্তির যাত্রাস্থান হইতে 12 মাইল দূরে.
10. *A* হইতে ট্রেনটি যাত্রা করিবার 3 ঘণ্টা পরে এবং 45 মাইল দূরে.

11. কলিকাতা হইতে 360 মাইল দূরে ; রাত্রি 12 টায়.
12. ছাড়িবার 1 ঘণ্টা পরে ; ঠিক পরবর্তী স্টেশন হইতে ট্রেনটি ছাড়িবার সময়.
13. 5 টাকা ; 50 টাকা. **14.** প্রতিটাকায় 6 পাই ; 1500 টাকা.

বিবিধ প্রশ্নমালা (গ) (পৃষ্ঠা 240-257)

I

1. 0. **2.** (i) $(2x-3)(x-5)$; (ii) $(3x-2y)(3x+2y)\times(9x^2+6xy+4y^2)(9x^2-6xy+4y^2)$. **3.** $3x^2+2x-1$.
4. 1. **5.** $x=\frac{1}{4}; y=1$. **6.** $x+3$. **7.** 24.
8. $(-3, 0)$ এবং $(0,6)$.

II

1. $(a-b)(c-d)$. **2.** $x=1\frac{1}{2}$.
4. $(a-b)^2(a-2b)^2(a+2b)^2$, **5.** $(ax+by)^2+(bx-ay)^2$
6. $c=1$. **7.** $x=12, y=3·5$. **8.** $a(x^3+1)+b(x^2+x)$.

III

1. (i) 6 ; (ii) $\frac{b}{a}$. **2.** $6a^5-27a^4+47a^3-23a^2-18a+20$
3. (i) $(2x+3)(3x-2)$;
(ii) $(x+y-2)(x^2+y^2+4+2x+2y-xy)$.
4. (i) $x=p+q$; (ii) $x=45, y=46$. **5.** $2x^2-3x$.
7. $x^2+\frac{1}{x^2}-2$. **8,** ক্ষেত্রফল $=6$; বাহুগুলির দৈর্ঘ্য $=3$, 4 এবং 5.

IV

1. (ii) $f=\frac{2uv}{u+v}$. **2.** $(x-3)(x-4)(x+6)$.
3. $x=15, y=10, z=17$. **4.** $\frac{x+a}{x^2-bx+b^2}$.
6. x^2+x+1. **7.** $x=3, y=2$, **8.** $90°$.

V

2. (i) $x=-1$; (ii) $x=0, y=-3$.
3. (i) $(7x+3)(7x+11)$; (ii) $(x-y)(x+y-4)$. 4. 2.
5. গ. সা. গু. $=x^2+3x+2$; ল. সা. গু. $=x^4-5x^2+4$.
7. রাত্রি 12টায় ; কলিকাতা হইতে 360 মাইল দূরে।

VI

1. 4·27. 2. (i) $3(2x-3y)(3y-z)(z-2x)$;
(ii) $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$.
3. (i) $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{3}$; (ii) $x=-2\frac{1}{2}$.
4. $x(1+x-x^2)$. 6. (ii) $x-1$. 7. $2x^2+2x+1$; 221.

VI

1. $\dfrac{2a}{1-a^2}$. 2. (i) $-(b-c)(c-a)(a-b)(bc+ca+ab)$;
(ii) $(a+1)(a-1)(b+1)(b-1)$.
3. (i) $x=\frac{1}{6}, y=\frac{1}{3}$; (ii) $x=-6\frac{2}{3}$. 4. 0 6. $\frac{20}{21}$. 7. দৈর্ঘ্য $=5$.

VIII

1. 1. 2. (i) 0. 4. x^2+7x+1. 7. 38.

IX

2. (i) $x=3$; (ii) $x=\dfrac{ab}{a+b}$. 3. $c=10$.
4. (i) $(x-1)(x-2)(x-3)$; (ii) $(a+3b)(a^2-3ab+3b^2)$.
5. (i) 1 ; (ii) 0. 6. $2(x+a)(2x+5a)(2x-3a)(3x-2a)$.
7. $x=-21$; $y=-24$.

X

1. $\dfrac{1}{x+y}$ 3. (i) $x=\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$; (ii) $x=3, y=2$.
5. $a^2-b^2+c^2-d^2$. 6. 737.

XI

1. $\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+7x+3}$.   3. $a^3+b^3+c^3-3abc$; 31000.

4. $x^2+(y+z)x+yz$.   5. $x=1$. $y=1$, $z=1$.   7. 12.

XII

1. (i) $\dfrac{1}{xyz}$; (ii) $\dfrac{1}{x(x-a)(x-b)}$.   2. $\dfrac{x^2+x+1}{3x^2+2x+3}$.

3. $1+4x-16x^3-32x^4+64x^6$.

5. (i) $(a-b)(a-2b)(2a+b)$; (ii) $(2a-b+10)(2a-b-3)$.

6. $x=4$, $y=5$.   7. (4, 1) ; (3, 4) ; (−3, 2)

XIII

1. t^4.   2. $x+y+z+xyz$.   3. 2.   5. $ax+by+cz$.

6. 0.   7. 1100.

XIV

1. 1.   2. (i) $3(b+c-2a)(c+a-2b)(a+b-2c)$;

(ii) $-(y-z)(z-x)(x-y)(x+y+z)$.

5. $x^3-5x^2+13x-14$.   6. 16.   7. 41 বৎসর ; 19 বৎসর পরে।

XV

1. $\dfrac{x^3}{(x-a)(x-b)(x-c)}$.   2. গ. সা. গু. $=2x^2-3$; ল. সা. গু. $=$ $(2x^3-3)(x^2-x+2)(2x^2-x+3)$.

4. (i) $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$; (ii) $3(x+y)^2+z^2$.

6. $x=\dfrac{a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab}{a+b+c}$.   7. $x=1$, $y=2$.

XVI

1. (i) $a+b+c+3d$.   3. (i) $(x-1)(y-1)(x+1)(y+1)$

(ii) $(a-1)(b-1)(a+1)(b+1)(a^2+1)(b^2+1)$

5. (i) $x^8+x^7+\cdots+x+1$; (ii) $x^{16}+x^{14}+x^{12}+\cdots+x^2+1$.

6. (i) $x=a+b+c$; (ii) $x=a$, $y=b$, $z=c$.   7. 66টা. : 72টা.।

XVII

1. $a+b+c$. 3. $\frac{bc^2}{a-b}$ 4. $\frac{x^2+3x+2}{2x^2-3x+1}$

6. $a=3$; $2x+3y$. 7. $x=3, y=0$.

XVIII

1. 0. 2. (i) $(ax+by)^2+(ay-bx)^2$, অথবা $(ax-by)^2+(ay+bx)^2$; (ii) $(3x+4a)^2+(2x-3b)^2$.

4. $1+x^2+x^4+\cdots\cdots+x^{4n}$

5. $x=0$; অথবা $\frac{2(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)}{n}$.

XIX

2. $1-3a+2a^2$ 3. (i) $x=-2\frac{5}{7}$; (ii) $x=4, y=2$.

4. $(2x+3y+5)(3x-y+2)$. 5. $2x^3-3x^2+x-4$.

6. গ.সা.গু.$=x^2-x+1$; ল.সা.গু.$=(x^2-x+1)(2x^2+1)(3x-2)$. 7. 5.

XX

1. abc. 2. $\frac{1+4b^2c^2+9c^2a^2+a^2b^2}{a^2+b^2+c^2}$. 3. (ii) 1.

4. (i) $(a-b+c+d)(b-a+c+d)$; (ii) $(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)$.

5. (i) $x=\frac{bc+ca+ab}{abc}$; (ii) $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{3}, z=\frac{1}{4}$. 7. 78 টা. 2 আ.।

XXI

1. $1+x+x^2+\cdots+x^{15}$ 2. $1+abc$.

3. $(x-1)(x-2)(x-3)(x+2)(x+4)$. 4. a.

5. (i) 1 ; (ii) $x=21, y=6$. 6. $4x^2+16x+11$.

7. $x=-8, y=7$.

XXII

2. (i) $(x-1)^2(x+1)^2(x^4+5x^2+1)$;
(ii) $-(b-c)(c-a)(a-b)(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)$.

3. (i) 1 ; (ii) $\frac{5x}{2(2x+1)}$ 4. $x=-7$.

5. x^2-4x+1. 7. 213 জন।

XXIII

1. (i) a^{m-1} ; (ii) 1. 3. 1.

4. (i) $x=3\frac{1}{2}$; $x=-1, y=5$.

5. $12(a^4-b^4)(a^2+ab+b^2)$. 6. (i) 432. 7. $(2,-7)$. 8. $\frac{2}{7}$.

XXIV

1. (i) $\frac{16x^{15}}{1-x^{16}}$;(ii) $\frac{2x+3}{5x-2}$. 3. (i) $x=-\frac{5}{6}$; (ii) $x=y=\frac{c}{a+b}$.

4. (i) $2x^3+3x^2y-5y^3$; (ii) $3(b+c)(c+a)(a+b)$.

5. (i) x^2-3x+5 ; (ii) $x^{12}-a^{12}$. 6. $x^3-6x^2+12x-8$.

7. 30 ফুট. 8. $x=3, y=2$.

XXV

1. (i) 2 ; (ii) $\frac{4}{n(n-4)}$.

4. (i) $x=2\frac{1}{7}$; (ii) $x=4\frac{2}{3}$; $y=3\frac{2}{3}, z=3\frac{2}{3}$.

5. (i) $(2a+1)(a^2-2a+4)$; (ii) $(x+y+1)(2x+3y-5z)$.

6. $\frac{2x^2-3x+5}{2x^3+3x^2-2x+7}$.

7. যথাক্রমে 46, 17, 15 বৎসর.

8. (ii) $x=7$.

BOARD OF SECONDARY EDUCATION, WEST BENGAL

1952

1. *Either*,

(*a*) Factorise (*i*) $2x^2+x-15$. (*ii*) x^4+64.

(*b*) Find the L. C. M. of $x^2(x^2-4)$ and $x^4+2x^3-8x^2$.

Or,

(*a*) Find the value of $xy+yz+zx$,
when $x+y+z=9$ and $x^2+y^2+z^2=31$.

(*b*) Solve $\dfrac{a}{bx}-\dfrac{b}{ax}=a^2-b^2$.

2. *Either*,

(*a*) Find the square root of $x^4-2x^3+11x^2-10x+25$.

(*b*) If $\dfrac{ay-bx}{c}=\dfrac{cx-az}{b}=\dfrac{bz-cy}{a}$, prove that $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$.

Or

(*a*) If $a+b+c=0$, prove that $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3=0$.

(*b*) A number consists of two digits, the sum of the digits being 5. If 9 be added to the number, the digits are reversed. Find the number.

3. Draw the graphs of $x+y=2$ and $x=y$. Measure their angle of intersection, and determine the point where they meet.

1953

1. (*a*) Factorise :—

(*i*) $3x^2+14x+8$.

(*ii*) $a^2-b^2-c^2+d^2-2(ad-bc)$.

(*b*) If $x=\dfrac{4ab}{a+b}$, find the value of $\dfrac{x+2a}{x-2a}+\dfrac{x+2b}{x-2b}$.

Or

(c) Find the H. C. F. of $x^2+9x+14$ and $x^3+10x^2+31x+30$.

(d) If $2s=a+b+c$, show that

$$s^2+(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)=ab+bc+ca.$$

2. (a) Solve :—

(i) $\dfrac{x-bc}{b+c}+\dfrac{x-ca}{c+a}+\dfrac{x-ab}{a+b}=a+b+c.$

(ii) $3x+4y=11,$
$5x-2y=1.$

(b) If $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}$, prove that

$$(a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2)=(ab+cd+ef)^2.$$

Or,

(c) If $x+y=2z$ then show that $\dfrac{x}{x-z}+\dfrac{z}{y-z}=1.$

(d) A father's age is four times that of his elder son and five times that of his younger son; when the elder son has lived to three times his present age the father's age will exceed twice that of his younger son by 4 years. Find their present ages.

3. Draw the graph of the equation $2y-3x=7$. From the graph find, by measurement, the value of y when $x=2\frac{1}{3}$ and the value of x when $y=3\frac{1}{2}$.

1954

1. Answer *either* (a) and (b), *or* (c) and (d) :—

(a) Resolve into factors :—

(i) $x^2-y^2+2x+1.$

(ii) $2x^2-x-10.$

(b) Find the H. C. F. of :—

$$3x^3+11x^2+13x+5 \text{ and } 3x^3+12x^2+16x+7.$$

(c) Simplify : $\frac{(a-b)^2-c^2}{a^2-(b+c)^2}+\frac{b-c)^2-a^2}{b^2-(c+a)^2}+\frac{(c-a)^2-b^2}{c^2-(a+b)^2}$.

(d) If $a+b+c=0$, prove that $a^3+b^3+c^3=3abc$.

2. Answer *either* (a) and (b), *or* (c) and (d) :—

(a) Solve :

(i) $\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x-5}=\frac{1}{x-13}-\frac{1}{x-11}$.

(ii) $x+3y=9$,
$4x+y=14$.

(b) If $(b+c-a)x=(c+a-b)y=(a+b-c)z=2$, show that

$$\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=abc.$$

(c) If $a:b=b:c=c:d$, show that

$$(d-a)^2=(d-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.$$

(d) A number consists of two digits, the ten's digit being twice the unit's. If the digits are interchanged, the number is diminished by 18. Find the number.

3. Using the same unit and axes of reference, draw the graphs of the following two equations, and from the graphs find the co-ordinates of their point of intersection :—

(i) $y+x=2$,

(ii) $2x-y=1$.

(At least three points should be plotted for each graph.)

COMPARTMENTAL

1954

1. (a) Resolve into factors :—

(i) $8x-3-4x^2$.

(ii) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$.

(b) If $x+\frac{1}{x}=5$, find the value of $x^3+\frac{1}{x^3}-10$.

Or,

If $5x = 3y$, find the value of
$(3x-2y)^2+(y-2x)^2-(3x-2y)(2y-4x)$.

2. Answer *either* (*a*) and (*b*), *or* (*c*) and (*d*).

(*a*) Solve $6\frac{1}{3}-\frac{x-7}{3}=\frac{4x-2}{5}$.

(*c*) If $x+y=8$, where x and y are real numbers, find the greatest value of xy.

(*c*) If $a : b = b : c$, prove that $abc(a+b+c)^3=(bc+ca+ab)^3$.

(*d*) Divide $(a^2+b^2)^3-8a^3b^3$ by $(a-b)^2$.

3. Draw the graph of $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$, plotting at least 4 points on it. Find the co-ordinates of the point where this graph intersects the straight line joining the origin to the point $(-8, 6)$.

SPECIAL S. F. EXAMINATION

1954

1. Answer *either* (*a*) and (*b*), *or* (*c*) and (*d*).

(*a*) Factorise : (i) $(x+5)(x+13)-9$.
(ii) $4x^4+81y^4$.

(*b*) If $x-\frac{1}{x}=a-\frac{1}{a}$, then prove that $x^3-\frac{1}{x^3}=a^3-\frac{1}{a^3}$.

(*c*) If $(x^2+y^2)(a^2+b^2)-(ax+by)^2=0$, prove that $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$.

(*d*) Find the H.C.F. of $2x^3+x^2-x+3$, and x^3-6x^2+6x-5.

2. Answer *either* (*a*) and (*b*), *or* (*c*) and (*d*).

(*a*) Solve $\frac{x}{x-5}+\frac{x}{x+2}=2$.

(*b*) : Reduce to its lowest terms $\frac{x^2-xy-42y^2}{5x^2-35xy}-\frac{1}{5}$.

(*c*) Divide 54 into two parts such that double of one part exceeds three times the other by 8.

(*d*) If $a+b+c=0$, prove that

$$b^2+bc+c^2=c^2+ca+a^2=a^2+ab+b^2.$$

3. In a graph paper indicate your axes of co-ordinates chosen, and state your scale of representation. Then plot the four points *A*, *B*, *C*, *D* whose co-ordinates are $(-2, 6)$, $(8, 5)$, $(6, -4)$ and $(-7, -5)$ respectively. Join *AC* and *BD*, and from your graph write down the co-ordinates of their point of intersection. On your graph paper, measure off from the origin, with the help of a compass, a length equal to *AC* along the *X*-axis, and thereby find an approximate value of *AC*.

1955

1. Answer *either* (i) and (ii), *or* (iii) and (iv) :

(i) Resolve into factors :

(1) $5-4x-x^2$;

(2) $a^2-b^2+4bc-4c^2$.

(ii) Find the value of $\frac{x-a}{b}-\frac{x-b}{a}$ when $x=\frac{a^2}{a-b}$.

(iii) Find the H. C. F. of :

$$x^2+3x-10 \quad \text{and} \quad x^3-x^2-14x+24.$$

(iv) If $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=0$, show that $a=b=c$.

2. Answer *either* (i) and (ii), *or* (iii) and (iv) :

(i) Solve :

(1) $\frac{a-x}{a}+\frac{2a-x}{2a}=\frac{3a-x}{3a}$;

(2) $2x-y=5$,
$3x+2y=11$.

(ii) A labourer is engaged for 30 days on condition that he receives 2*s*. 6*d*. for each day he works, and loses 1*s*. for each day he is idle ; he receives £2. 7*s*. in all. For how many days is he idle ?

(iii) If $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, show that

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{a^3+b^3+c^3}=\frac{xyz}{abc}.$$

(iv) If $bc+ca+ab=0$, prove that

$$\frac{1}{a^2-bc}+\frac{1}{b^2-ca}+\frac{1}{c^2-ab}=0.$$

3. Using the same unit and the same axes of reference, draw the graphs of the following two equations, plotting at least three points for each graph, and from the graphs find the co-ordinates of their point of intersection :

(i) $x+2y=12$,

(ii) $x-3y=2$.

পরিভাষা

abscissa—ভুজ
absolute—পরম
absolute value—পরম মান
addition—যোগ, সঙ্কলন
adfected quadratic—মিশ্র দ্বিঘাত বা দ্বি-শক্তি
alternando—একান্তর-ক্রিয়া
alternative—বিকল্প
ambiguous—দ্ব্যর্থক
ascending order—উর্দ্ধক্রম
associative law—সংযোগ-নিয়ম
axiom—স্বতঃসিদ্ধ
axis—অক্ষ

binomial—দ্বিপদ
biquadratic—চতুর্ঘাত
braces—ধনুর্ব্বন্ধনী
brackets—বন্ধনী

cancellation—অপসারণ
circle—বৃত্ত
co-efficient—গুণক, সহগ
column—স্তম্ভ, পাটি
commutative law—বিনিয়ম-নিয়ম
complex—দুরূহ, জটিল
componendo—যোগক্রিয়া
compound—মিশ্র
conditional identities—সাপেক্ষ অভেদাবলী
constant (quantity)—ধ্রুবক
continued product—ক্রমিক বা ধারাবাহিক গুণফল
co-ordinates—স্থানাঙ্ক
crotchets—গুরুবন্ধনী
cube—ঘন
cube-root—ঘনমূল
cubic—ত্রিঘাত, ঘন
cyclic order—চক্র-ক্রম

deduction—সিদ্ধান্ত
degree (of an expression)—মান
denominator—হর
descending order—অধঃক্রম
dimension—মাত্রা
distributive law—বিচ্ছেদ-নিয়ম
dividened—ভাজ্য
dividendo—ভাগক্রিয়া
divisibility—বিভাজ্যতা
divisibility theorem—বিভাজ্যতা-প্রতিজ্ঞা
divisor—ভাজক

elimination—অপনয়ন
equation—সমীকরণ
equation of condition—সাপেক্ষ সমীকরণ
evolution—মূলাকর্ষণ
expansion—বিস্তৃতি
exponent or index—সূচক
expression—রাশি, রাশিমালা

factor—উৎপাদক, গুণনীয়ক
factorization—গুণনীয়ক-নির্ণয়, উৎপাদক-নির্ণয়
formulæ (statement)—সূত্র
fraction—ভগ্নাংশ

graph—লেখ, চিত্র
graphical—লৈখিক
group—বিভাগ, সঙ্ঘ

homogeneous—সমমাত্র
horizontal—অনুভূমিক

identity—অভেদ
imaginary—কল্পিত
index—সূচক
index-law—সূচক-নিয়ম
inequality—অসমতা
infinite, infinity—অসীম, অনন্ত
insertion—স্থাপন
integral—অখণ্ড, পূর্ণ
introduction—উপক্রমণিকা
invertendo—বিপরীতক্রিয়া
involution—শক্তি-উন্নয়ন
irrational—অমূলদ

letter—অক্ষর
like—সদৃশ
limit—সীমা, কাষ্ঠা
limiting value—সীমাস্থ মান
linear—একঘাত
literal co-efficient—আক্ষরিক সহগ

maximum—বৃহত্তম
measure—মান
minimum—লঘিষ্ঠ
minor—অনুরাশি
minuend—বিয়োজন
monomial—একপদ, সরল
multinomial—বহুপদ
multiplicand—গুণ্য
multiplier—গুণক

natural number—অখণ্ড সংখ্যা
negative—ঋণ, নেগেটিভ
numerator—লব
numerical measure—সাংখ্যমান
numerical quantity—সাংখ্যরাশি

order—ক্রম
ordinate—কোটি
origin—মূলবিন্দু

parentheses—লঘুবন্ধন
plotting of points—বিন্দু-অঙ্কন
polynomial—বহুপদ
positive—ধন, পজিটিভ
power—শক্তি, ঘাত
product—গুণফল
property (mathematical)—ধর্ম্ম
proportion—সমানুপাত
proposition—প্রতিজ্ঞা
pure quadratic—অমিশ্র দ্বিঘাত বা দ্বিশক্তি

quadrant—পাদ
quadratic—দ্বিঘাত, দ্বিশক্তি
quantity—রাশি
quotient—ভাগফল

radical sign—মূল-চিহ্ন
ratio—অনুপাত
rational—মূলদ
rationalization—করণী-নিরসন
real—বাস্তব
reciprocal—অন্যোন্যক, বিপরীত
reciprocal or recurring expression —বিপরীত রাশিমালা
recurrence—আবৃত্তি
reduction—লঘূকরণ
remainder—অবশিষ্ট
remainder-theorem—ভাগশেষ-উপপাদ্য
removal—অপসারণ
root—মূল, বীজ
row—সারি, পঙ্‌ক্তি

series—শ্রেণী
side (of equation)—পক্ষ
sign—চিহ্ন
simple—সরল
simplification—সরলীকরণ
simultaneous equation—সহ-সমীকরণ
solution – সমাধান
square—বর্গ
square-root—বর্গমূল
squared-paper—বর্গাঙ্কিত কাগজ
stationary—স্থির
subtraction—বিয়োগ, ব্যবকলন
subtrahend—বিয়োজ্য
sum—যোগফল, সমষ্টি
surd—করণী
symbol—চিহ্ন, প্রতীক
symbols of operation—ক্রিয়াসূচক চিহ্ন
symbols of quantity—সাংখ্য-প্রতীক
symbolical expression—সাঙ্কেতিক বাক্য
symmetry—প্রতিসাম্য

erm—পদ, রাশি
to solve—সমাধান করা
transformation—রূপান্তরকরণ
transposition—পক্ষান্তরকরণ
trinomial—ত্রিপদ

unit—একক
unknown quantity—অজ্ঞাত-রাশি
unlike – অসদৃশ

value—মান
vinculum—রেখাবন্ধনী
vertical—উল্লম্ব